

РОСЖЕЛДОР
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»
(ФГБОУ ВО РГУПС)

А.Л. Озябкин

**ОЦЕНКА ДИНАМИКИ И ПРОЧНОСТИ
ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ МАШИН**

**Учебно-методическое пособие для выполнения
практических занятий, контрольных и курсовых работ**

Ростов н/Д, 2019

УДК 629.4.015: 625.144.5: 681.3.06

Рецензент: Волохов А.С., доцент каф. «Эксплуатация и ремонт машин» ФГБОУ ВО РГУПС

Озябкин, А.Л.

Оценка динамики и прочности при проектировании машин : учебно-методическое пособие для выполнения практических занятий, контрольных и курсовых работ / А.Л. Озябкин. – Ростов н/Д, 2019. – 98 с.

Учебно-методическое пособие для выполнения практических занятий, контрольных и курсовых работ содержит примеры расчёта механических систем и оценки их динамических и прочностных характеристик.

Предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов направлений подготовки: 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», профиль «Автомобильный сервис»; «Эксплуатация перегрузочного оборудования портов и транспортных терминалов» (бакалавриат); 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства», профиль: «Подъёмно-транспортные, строительные, дорожные средства и оборудование» (специалитет); 15.03.03 «Прикладная механика», профиль «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг» (бакалавриат); 15.04.03 «Прикладная механика», профиль «Динамика и прочность машин» (магистратура).

Одобрены кафедры «Транспортные машины и триботехника»

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ МАСС	4
1.1 Приведение к расчётной схеме	7
1.2 Составление математической модели	7
1.3 Оценка величин эквивалентных значений коэффициента сопротивления связей	8
1.4 Определение частот и форм собственных колебаний	11
1.5 Численное решение системы дифференциальных уравнений	14
1.6 Структурная модель механической системы, описываемой дифференциальными уравнениями	15
1.7 Логарифмические частотные и временные характеристики	17
1.8 Устойчивость системы по критерию А.М. Ляпунова	20
2 Исследование процессов запуска механической системы ПРИ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ	27
2.1 Приведение физических величин к одной размерности	27
2.2 Построение математической модели	29
2.3 Обоснование частотной модели.	31

1 ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ МАСС

Задание. По первой букве фамилии и последним цифрам студенческого студент выбирает свой вариант расчёта механической системы поступательно движущихся масс. Для схемы задания по рис. 1.1 численные значения следует выбрать согласно табл. 1.1 в соответствие со знаком "+". Для выбранного варианта необходимо:

- 1) упростить механическую систему до расчётной с двумя степенями свободы;
- 2) составить систему дифференциальных уравнений движения; обосновать своё решение;
- 3) определить частоты и формы собственных колебаний;
- 4) составить математическую модель для численного интегрирования в программной среде MathCAD;
- 5) получить решение системы в форме зависимостей обобщённых координат от времени интегрирования, фазовых траекторий и петли гистерезиса;
- 6) оценить частотные, временные и интегральные характеристики динамической системы;
- 7) сделать выводы по работе.

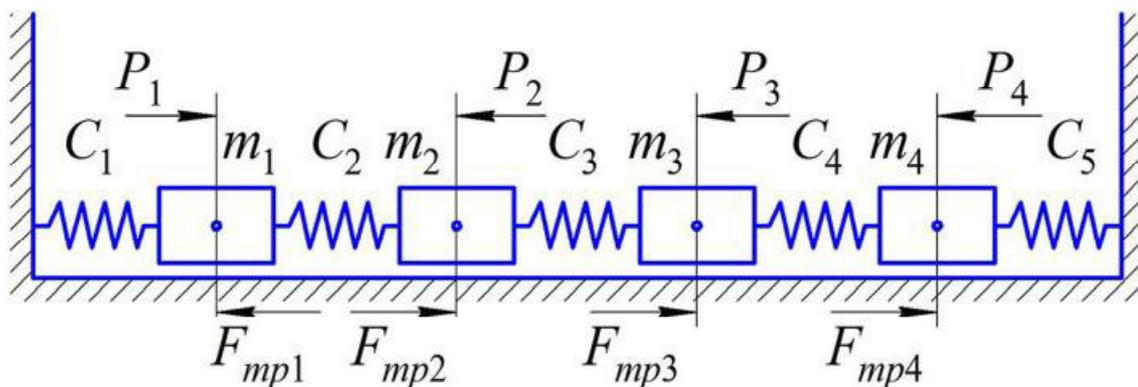


Рис. 1.1 – Схема задания поступательно движущихся масс

Табл. 1.1 – Вариант схемы задания

Вариант (по первой букве фамилии)	m_1	m_2	m_3	m_4	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	P_1	P_2	P_3	P_4
А	+	+	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-
Б	+	+	+	-	+	+	+	-	-	+	-	-	-
В	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	-	+	-
Г	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	-	-
Д	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+
Е	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	-	-	-
Ж	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-	+
З	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	+
И	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+

Продолжение табл. 1.1

Вариант (по первой букве фамилии)	m_1	m_2	m_3	m_4	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	P_1	P_2	P_3	P_4
К	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	+
Л	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	+	-
М	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-	-	+
Н	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	+	+
О	+	+	+	-	+	+	+	-	-	-	-	+	-
П	+	+	+	-	+	+	+	-	-	+	-	+	-
Р	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	-	+
С	+	+	+	-	+	+	+	-	-	+	+	-	-
Т	+	+	+	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-
У	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	-
Ф	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	-	+	-
Х	+	+	+	-	+	+	+	-	-	-	-	+	-
Ц	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	-	+	+
Ч	+	+	+	-	+	+	+	-	-	+	-	+	-
Ш	+	+	+	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-
Щ	+	+	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-
Э	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	+	+
Ю	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-
Я	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	+	-

Вариант (по предпоследней цифре зачётки)	m_1	m_2	m_3	m_4	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	f	λ
	кг				$\times 10^3$ Н/м					—	—
0	20	25	10	10	1,0	1,5	1,0	1,0	2,0	0,15	1,1
1	15	20	12	13	1,2	1,1	1,0	1,5	1,5	0,16	1,12
2	18	20	10	15	2,0	1,0	1,0	1,1	1,6	0,17	1,14
3	15	18	10	12	1,0	1,0	1,2	1,5	1,5	0,18	1,16
4	16	22	20	15	2,0	1,5	1,5	1,0	1,0	0,19	1,18
5	15	14	10	10	1,2	1,4	1,6	2,0	1,5	0,20	1,20
6	25	20	11	13	1,0	1,5	1,5	2,0	1,2	0,21	1,22
7	20	16	10	10	2,0	1,8	1,5	1,0	1,0	0,22	1,24
8	19	15	10	12	1,0	1,0	1,3	2,0	1,5	0,23	1,26
9	20	15	15	10	1,0	1,2	1,5	1,8	1,0	0,24	1,28

* f – безразмерный коэффициент трения;

λ – безразмерный коэффициент динамичности.

Вариант (по последней цифре за- чётки)	P_1				P_2				P_3				P_4			
	$10^3 \cdot [a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(k\omega t)]$															
	a_1	b_1	ω	k	a_1	b_1	ω	k	a_1	b_1	ω	k	a_1	b_1	ω	k
0	5,0	2,0	0,2	2	2,5	0,5	0,1	3	1,2	0,5	2,5	2	9,0	4,0	0,1	2
1	4,0	1,5	0,4	3	2,0	0,4	0,2	5	0,9	0,4	2,2	4	8,0	3,0	0,2	3
2	3,0	1,0	0,6	2	1,5	0,3	0,3	3	0,6	0,2	1,9	2	7,0	2,0	0,3	2
3	2,0	0,5	0,8	3	1,0	0,2	0,4	5	0,3	0,1	1,6	4	6,0	1,0	0,4	3
4	1,0	0,1	1,0	2	0,5	0,1	0,5	3	0,1	0,05	1,3	2	5,0	1,5	0,5	2
5	9,0	5,0	1,5	3	5,0	1,0	0,3	5	4,5	0,5	5,0	4	4,0	1,2	1,0	3
6	8,0	4,0	2,0	2	4,0	0,8	0,6	3	4,0	1,0	4,0	2	3,0	0,9	1,2	2
7	7,0	3,0	2,5	3	3,0	0,6	0,9	5	3,0	1,5	3,0	4	2,0	0,6	1,4	3
8	6,0	2,0	3,0	2	2,0	0,4	1,2	3	2,0	0,6	2,0	2	1,0	0,3	1,6	2
9	5,0	1,0	3,5	3	1,0	0,2	1,5	5	1,0	0,2	1,0	4	0,5	0,1	1,8	3

Методический пример.

Рассмотрим в качестве примера приведение механической системы поступательно движущихся масс с тремя степенями свободы к механической системе с двумя степенями свободы, если известно, что внешняя нагрузка воздействует на массы m_1 и m_3 , а численное значение массы m_3 значительно меньше других масс. Расчётная схема исходной системы приведена на рис. 1.2.

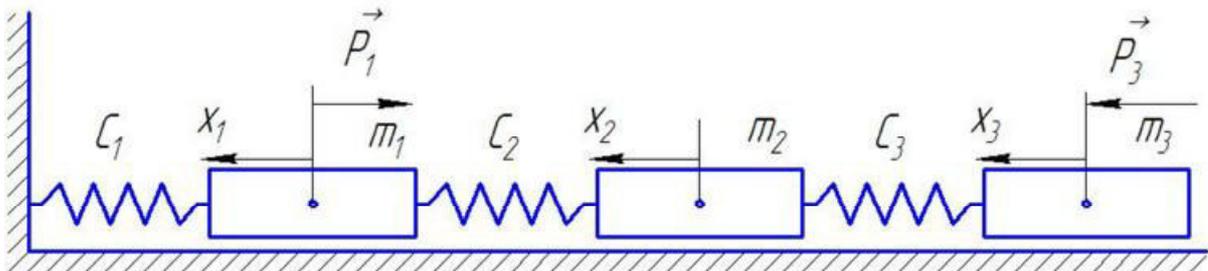


Рис. 1.2 – Расчётная схема исходной механической системы поступательно движущихся масс

Исходные данные для расчёта схемы:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 20,0 \text{ кг}; & C_1 &= 1000 \text{ Н/м}; & f &= 0,15; & \lambda &= 1,1; \\
 m_2 &= 25,0 \text{ кг}; & C_2 &= 1500 \text{ Н/м}; & & & & \\
 m_3 &= 10,0 \text{ кг}; & C_3 &= 1000 \text{ Н/м}; & & & &
 \end{aligned}$$

$$P_1 = 10^3 \cdot [8 \cdot \cos(2t) + 4 \cdot \sin(2 \cdot 2t)];$$

$$P_3 = 10^3 \cdot [4 \cdot \cos(4t) + 1 \cdot \sin(2 \cdot 4t)].$$

1.1 Приведение к расчётной схеме

Так как $m_3 \ll m_1$, $m_3 \ll m_2$ и нагрузки P_1 и P_3 приложены соответственно к массам m_1 и m_3 , то упростим данную схему до двух массовой путём исключения из расчёта массы m_2 , получив численные значения эквивалентной схемы (рис. 1.3).

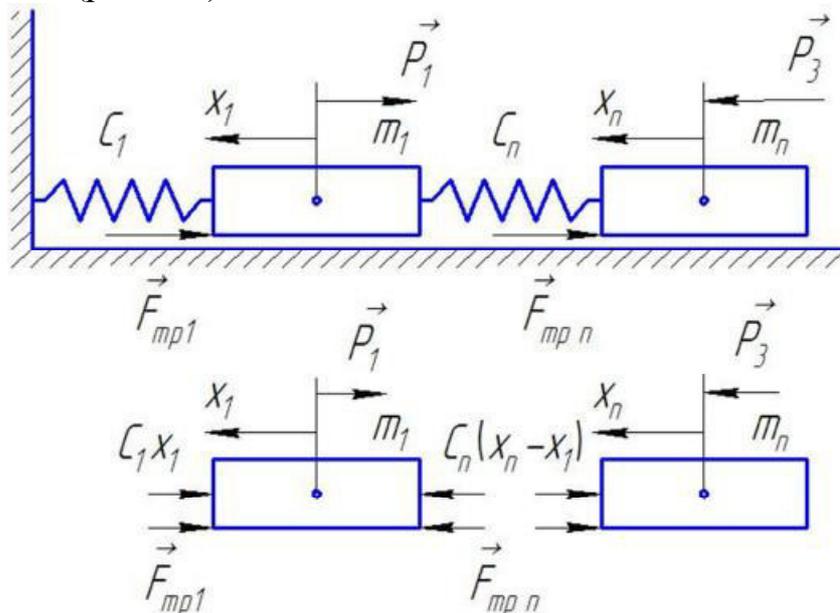


Рис. 1.3 – Приведенная расчётная схема механической системы поступательно движущихся масс (а) и силы, действующие в ней (б)

Рассчитаем значения приведенных физических величин:

$$m_n = m_2 + m_3;$$

$$\frac{1}{C_n} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}, \quad C_n = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}.$$

Имеем:

$$m_n = 25,0 + 10,0 = 35,0 \text{ кг};$$

$$C_n = \frac{1500 \times 1000}{1500 + 1000} = 600 \text{ Н/м}.$$

1.2 Составление математической модели

Систему дифференциальных уравнений эквивалентной расчётной системы составим с использованием метода Даламбера

$$\vec{J}_r = \vec{F} + \vec{J}_e + \vec{J}_c,$$

где F – равнодействующая активных сил, приложенных к массе;

J_e – сила инерции в переносном движении;

J_c – кориолисова сила инерции;

J_r – сила инерции в относительном движении.

Установим условия динамики относительного движения в направлении оси X (см. рис. 1.3,б)

$$\begin{aligned}\vec{J}_{rn} &= \vec{F}_n + \vec{R}_n + \vec{J}_{en} + \vec{J}_{cn}; \\ \vec{J}_{r1} &= \vec{F}_n + \vec{F}_1 + \vec{R}_n + \vec{R}_1 + \vec{J}_{e1} + \vec{J}_{c1},\end{aligned}$$

где \vec{F}_n, \vec{F}_1 – силы реакции пружин, обусловленных их сжатием

$$\vec{F}_n = C_n \cdot (x_n - x_1), \quad \vec{F}_1 = C_1 x_1,$$

где x_n и x_1 – соответственно большее и меньшее смещения от положения статического смещения;

\vec{R}_n, \vec{R}_1 – силы сопротивления движению

$$\vec{R}_n = F_{mpn} \cdot \text{sign}(\dot{x}_n - \dot{x}_1), \quad \vec{R}_1 = F_{mp1} \cdot \text{sign}(\dot{x}_1);$$

$\text{sign}(a)$ – знак скорости аргумента a

$$\begin{aligned}\text{если } a = 0, & \text{ то } \text{sign}(a) = 0, \\ \text{если } a > 0, & \text{ то } \text{sign}(a) = +1, \\ \text{если } a < 0, & \text{ то } \text{sign}(a) = -1;\end{aligned}$$

$\vec{J}_{en}, \vec{J}_{e1}$ – силы инерции в переносном движении

$$\begin{aligned}\vec{J}_{en} &= P_3 = 4000 \cos(4t) + 1000 \sin(8t), \\ \vec{J}_{e1} &= -P_1 = -8000 \cos(2t) - 4000 \sin(4t);\end{aligned}$$

$\vec{J}_{cn}, \vec{J}_{c1}$ – силы инерции Кориолоса

$$\vec{J}_{cn} = 0, \quad \vec{J}_{c1} = 0;$$

$\vec{J}_{rn}, \vec{J}_{r1}$ – силы инерции относительного движения

$$\vec{J}_{rn} = m_n \ddot{x}_n, \quad \vec{J}_{r1} = m_1 \ddot{x}_1.$$

В результате проецирования сил на ось координат, получим

$$\begin{aligned}m_n \ddot{x}_n &= -C_n \cdot (x_n - x_1) - F_{mpn} \cdot \text{sign}(\dot{x}_n - \dot{x}_1) + J_{en}; \\ m_1 \ddot{x}_1 &= C_n \cdot (x_n - x_1) - C_1 x_1 + F_{mpn} \cdot \text{sign}(\dot{x}_n - \dot{x}_1) - F_{mp1} \cdot \text{sign}(\dot{x}_1) + J_{e1},\end{aligned}$$

или, система дифференциальных уравнений при кулоновом трении масс о неподвижную поверхность

$$\left. \begin{aligned}m_n \ddot{x}_n + F_{mpn} \cdot \text{sign}(\dot{x}_n - \dot{x}_1) + C_n \cdot (x_n - x_1) &= J_{en}; \\ m_1 \ddot{x}_1 - F_{mpn} \cdot \text{sign}(\dot{x}_n - \dot{x}_1) + F_{mp1} \cdot \text{sign}(\dot{x}_1) - C_n \cdot (x_n - x_1) + C_1 x_1 &= J_{e1}.\end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

1.3 Оценка величин эквивалентных значений коэффициента сопротивления связей

Так как массы смещаются под воздействием внешних сил, то в точках их контакта с опорной поверхностью возникает сила трения, пропорциональная силе нормального давления. Мерой взаимодействия

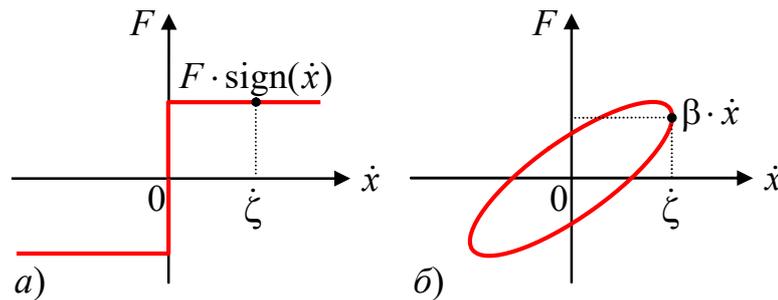
является коэффициент трения. Из курса теории трения известно, что коэффициент трения по Кулону определяется выражением

$$f = \frac{F_{mp}}{N},$$

где F_{mp} – сила трения;

N – сила нормального воздействия.

Под влиянием силы трения движение масс представляет нелинейный характер, так как движение реализуется только при преодолении сил трения покоя. На рис. 1.4,а представлен график зависимости силы трения от скорости поступательного движения при Кулоновом трении.



а – при Кулоновом трении; б – при вязкостном сопротивлении

Рис. 1.4 – Графики зависимостей силы трения F_{mp}

Задача линеаризации уравнений динамики состоит в том, чтобы работа сил трения при Кулоновом (рис. 1.4,а) и вязкостном (рис. 1.4,б) трении соответствовали друг другу.

Величина эквивалентного коэффициента вязкого трения β , определяется из условия равенства энергий, поглощаемых фрикционной системой

$$W_1 = 2F_{mp} 2\zeta_0 = 4F_{mp}\zeta_0,$$

где ζ_0 – наибольшее перемещение (амплитуда) при колебаниях, м

$$\zeta_0 = F_{дин} / C;$$

$F_{дин}$ – максимальное значение силы в динамике

$$F_{дин} = \lambda \cdot F_{mp};$$

λ – коэффициент динамичности, показывающий во сколько раз динамическое смещение больше статического; в расчётах можно ориентировочно принимать $\lambda = 1,1 \dots 1,5$ ($\lambda = 1,1$ – по заданию)

и условным гидравлическим гасителем колебаний для неупругого сопротивления колебаниям, близких к гармоническим $\zeta = \zeta_0 \cdot \sin(\omega t)$:

$$W_2 = \int_0^{2\pi} (\beta \dot{\zeta}) \dot{\zeta} dt = \beta \int_0^{2\pi} \dot{\zeta}^2 dt = \beta \zeta_0^2 \omega^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega t dt = \pi \beta \zeta_0^2 \omega.$$

Тогда при $W_1 = W_2$ имеем

$$4F_{mp}\zeta_0 = \pi\beta\zeta_0^2\omega,$$

откуда эквивалентный коэффициент сопротивления вязкого трения

$$\beta_0 = \frac{4F_{mp}}{\pi\zeta_0\omega}.$$

Выполним расчёт эквивалентного коэффициента вязкого трения:

Зная значения масс и коэффициента трения ($f = 0,15$ – по заданию) вычислим значения сил трения, действующих в контакте тел с опорной поверхностью

$$F_{mp} = f \cdot N = f \cdot mg,$$

откуда $F_{трn} = f \cdot m_n g = 0,15 \cdot 35 \cdot 9,81 = 51,5$ Н;

$$F_{тр1} = f \cdot m_1 g = 0,15 \cdot 20 \cdot 9,81 = 29,43$$
 Н.

Определим:

– максимальное динамическое смещение

$$F_{динn} = \lambda \cdot F_{трn} = 1,1 \cdot 51,5 = 56,65$$
 Н;

$$F_{дин1} = \lambda \cdot F_{тр1} = 1,1 \cdot 29,43 = 32,37$$
 Н,

– наибольшее смещение из положения статического равновесия

$$\xi_{0n} = \frac{F_{динn}}{C_n} = \frac{56,653}{600} = 0,0944$$
 м;

$$\xi_{01} = \frac{F_{дин1}}{C_n + C_1} = \frac{32,37}{600 + 1000} = 0,0202$$
 м,

– частоту гармонических колебаний

$$\omega_n = \sqrt{\frac{C_n}{m_n}} = \sqrt{\frac{600}{35}} = 4,14$$
 с⁻¹;

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{C_n + C_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{600 + 1000}{20}} = 8,94$$
 с⁻¹,

– эквивалентный коэффициент сопротивления вязкого трения

$$\beta_n = \frac{4F_{динn}}{\pi\zeta_{0n}\omega_n} = \frac{4 \cdot 56,65}{\pi \cdot 0,09442 \cdot 4,14} = 184,53$$
 Н·с/м;

$$\beta_1 = \frac{4F_{дин1}}{\pi\zeta_{01}\omega_1} = \frac{4 \cdot 32,37}{\pi \cdot 0,02023 \cdot 8,94} = 227,91$$
 Н·с/м.

Получим ту же систему дифференциальных уравнений (1.1), только лишь в линейной постановке задачи

$$\left. \begin{aligned} m_n \ddot{x}_n + \beta_n \cdot (\dot{x}_n - \dot{x}_1) + C_n \cdot (x_n - x_1) &= J_{en}; \\ m_1 \ddot{x}_1 - \beta_n \cdot (\dot{x}_n - \dot{x}_1) + \beta_1 \dot{x}_1 - C_n \cdot (x_n - x_1) + C_1 x_1 &= -J_{e1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

1.4 Определение частот и форм собственных колебаний

Так как сопротивление колебаниям незначительно изменяет частоты собственных колебаний, то при определении частот и форм собственных колебаний систему дифференциальных уравнений приведенной расчётной схемы (1.2) запишем без учёта сил сопротивления. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} m_n \ddot{x}_n + C_n \cdot (x_n - x_1) &= J_{en}; \\ m_1 \ddot{x}_1 - C_n \cdot (x_n - x_1) + C_1 x_1 &= -J_{e1}. \end{aligned} \right\}$$

Решение этой системы состоит из общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения. При $J_{en} = J_{e1} = 0$ получим систему однородных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} m_n \ddot{x}_n + C_n \cdot (x_n - x_1) &= 0; \\ m_1 \ddot{x}_1 - C_n \cdot (x_n - x_1) + C_1 x_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

решением которой являются функции

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= a_1 \sin(\omega t + \varphi); \\ x_n &= a_n \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned} \right. \quad (1.4)$$

где a_1 и a_n – неизвестные амплитуды колебаний масс;

ω – частота колебаний, с^{-1} ;

t – время, с ;

φ – сдвиг фаз.

После подстановки функций (1.4) в уравнения (1.3) получим

$$\left\{ \begin{aligned} [-m_n a_n \omega^2 + C_n \cdot (a_n - a_1)] \cdot \sin(\omega t + \varphi) &= 0; \\ [-m_1 a_1 \omega^2 - C_n \cdot (a_n - a_1) + C_1 a_1] \cdot \sin(\omega t + \varphi) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Равенства (1.5) справедливы, если: во-первых $\sin(\omega t + \varphi) = 0$ и, во-вторых слагаемые в скобках также равны нулю. После группировки слагаемых в квадратных скобках имеем:

$$\begin{aligned} (-m_n \omega^2 + C_n) a_n &= C_n a_1; \\ C_n a_n &= (-m_1 \omega^2 + C_n + C_1) a_1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Несмотря на то, что в уравнениях (1.6) три неизвестных величины: амплитуды колебаний a_1 , a_n и частота ω , неизвестные величины частот собственных колебаний можно вычислить следующим образом. Находим из первого уравнения отношение

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{C_n}{-m_n \omega^2 + C_n}$$

и такое же отношение из второго уравнения

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{-m_1\omega^2 + C_n + C_1}{C_n}. \quad (1.7)$$

Совместимость полученных выражений приводит к уравнению, в котором одна неизвестная величина – частота ω :

$$\frac{C_n}{-m_n\omega^2 + C_n} = \frac{-m_1\omega^2 + C_n + C_1}{C_n}$$

или

$$(-m_n\omega^2 + C_n) \cdot (-m_1\omega^2 + C_n + C_1) = C_n^2.$$

После преобразований получим биквадратное частотное уравнение

$$\omega^4 - \left(\frac{C_n}{m_n} + \frac{C_n + C_1}{m_1} \right) \omega^2 + \frac{C_n C_1}{m_n m_1} = 0,$$

решением которого являются следующие выражения собственных частот колебаний

$$\omega_{1-4} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{C_n}{m_n} + \frac{C_n + C_1}{m_1} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{C_n}{m_n} + \frac{C_n + C_1}{m_1} \right)^2 - 4 \frac{C_n C_1}{m_n m_1}} \right]}.$$

После подстановки исходных значений масс и жесткостей упругих связей

$$\omega_{1-4} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{600}{35} + \frac{600 + 1000}{20} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{600}{35} + \frac{600 + 1000}{20} \right)^2 - 4 \frac{600 \times 1000}{35 \times 20}} \right]}$$

получим значения частот собственных колебаний $\omega_{1,2} = \pm 3,13 \text{ с}^{-1}$; $\omega_{3,4} = \pm 9,34 \text{ с}^{-1}$.

Так как в данном примере затухание колебаний отсутствует ($n = 0$), то на комплексной плоскости найденные значения частот соответствуют незатухающим периодическим колебаниям и корням $s_{i,j} = \pm i\omega_0$, расположенным на мнимой оси (рис. 1.5).

Система (1.5) не позволяет найти значения амплитуд колебаний, но возможно установить соотношение между ними. Для этого примем относительную деформацию $a_{11} = a_{12} = 1$, а в равенство (1.7) подставим значения найденных собственных частот

$$\chi_{n1} = \frac{a_{n1}}{a_{11}} = \frac{-20 \times 3,13^2 + 600 + 1000}{600} = 2,34;$$

$$\chi_{n2} = \frac{a_{n2}}{a_{12}} = \frac{-20 \times 9,34^2 + 600 + 1000}{600} = -0,24.$$

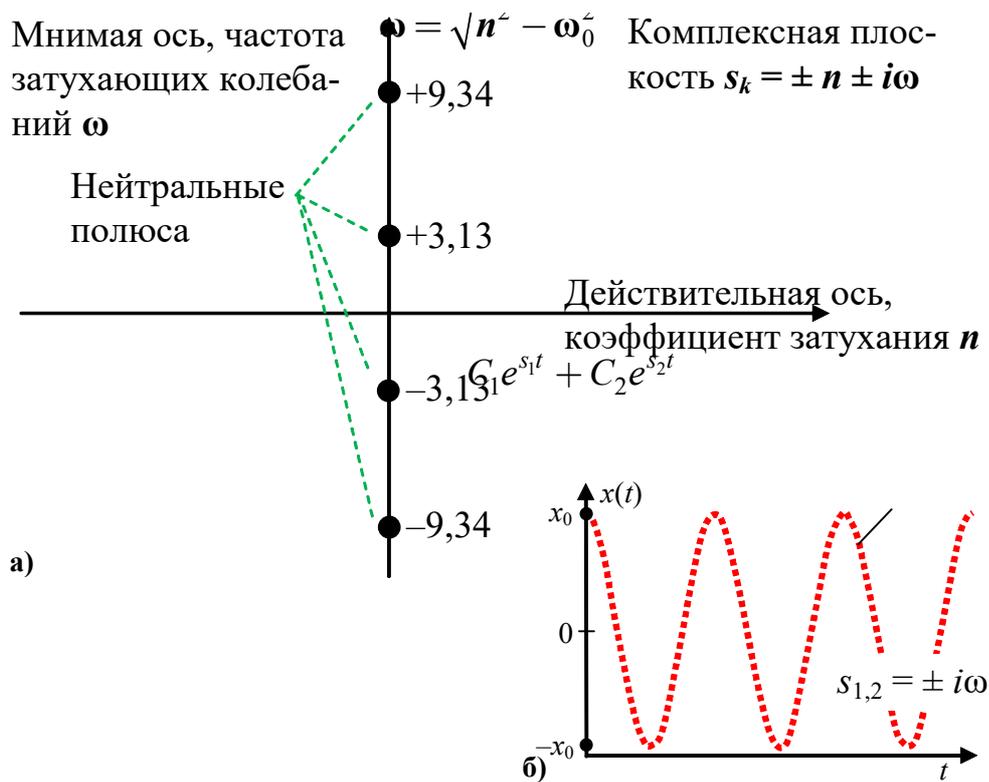


Рис. 1.5 – Полюса (•) на комплексной плоскости (а) и соответствующие им вид свободного (невозбуждённого) движения (б) от ненулевого начального положения x_0

Соответствующие уравнениям (1.3) формы собственных колебаний представлены на рис. 1.6.

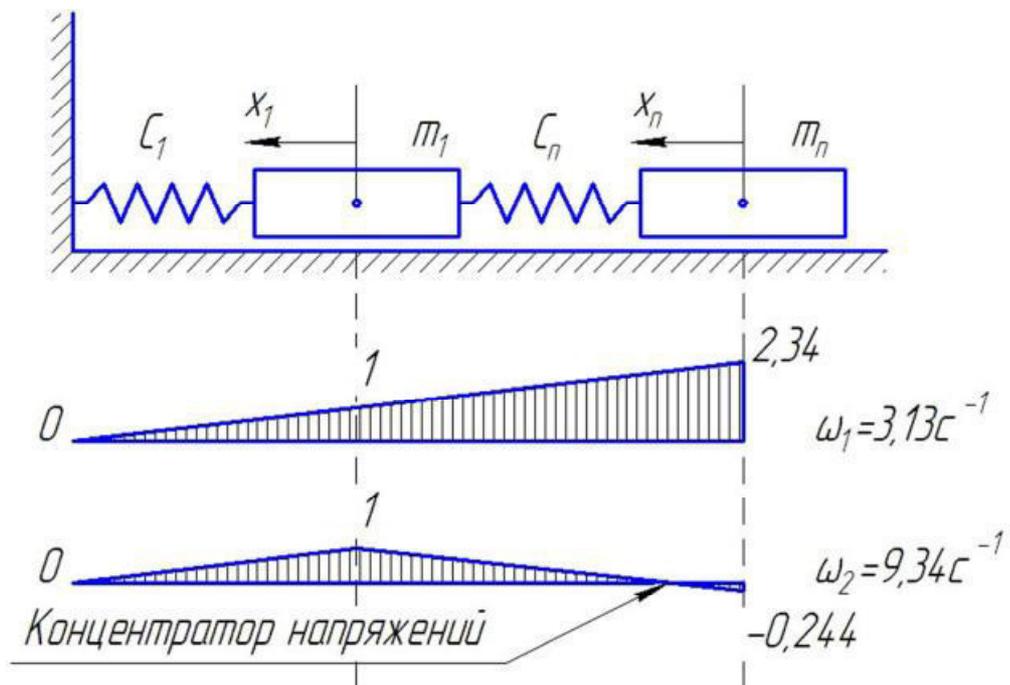


Рис. 1.6 – Приведенная расчётная схема механической системы поступательно движущихся масс (а) и формы, частоты собственных колебаний (б)

Колебания, соответствующие первой собственной частоте $3,13 \text{ c}^{-1}$, происходят с деформацией сжатия упругих связей и в любой момент вре-

мени отношение амплитуд масс постоянно и равно $\chi_{n1} = 2,34$. В другом движении обе массы колеблются с частотой $9,34 \text{ с}^{-1}$, а отношение амплитуд масс в любой момент времени равно $\chi_{n2} = -0,244$. Этой частоте соответствует одноузловая собственная форма колебаний с деформациями как сжатия упругих связей, так и их растяжения.

Следовательно, заданные функции P_1 и P_3 с частотами внешнего воздействия на механическую систему 2, 4 и 8 с^{-1} относятся как к низочастотным, так и высокочастотным колебаниям. Вторая гармоника силы внешнего возбуждения P_3 близка к резонансной – возможны колебания типа биеений.

1.5 Численное решение системы дифференциальных уравнений

Искомое решение системы дифференциальных уравнений (1.2) разрешим относительно старшей производной

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_n &= -\frac{\beta_n}{m_n} \dot{x}_n + \frac{\beta_n}{m_n} \dot{x}_1 - \frac{C_n}{m_n} x_n + \frac{C_n}{m_n} x_1 + J_{en}; \\ \ddot{x}_1 &= \frac{\beta_n}{m_1} \dot{x}_n - \frac{\beta_n}{m_1} \dot{x}_1 - \frac{\beta_1}{m_1} \dot{x}_1 + \frac{C_n}{m_1} x_n - \frac{C_n}{m_1} x_1 - \frac{C_1}{m_1} x_1 + J_{e1} \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Применим явную форму Коши преобразования двух дифференциальных уравнений (1.8) в систему четырёх линейных уравнений первого порядка

Вводимые переменные s	Преобразованная система уравнений первого порядка
$s_0 = x_n;$	$\dot{s}_0 = s_2;$
$s_1 = x_1;$	$\dot{s}_1 = s_3;$
$s_2 = \dot{x}_n;$	$\dot{s}_2 = -\frac{C_n}{m_n} s_0 + \frac{C_n}{m_n} s_1 - \frac{\beta_n}{m_n} s_2 + \frac{\beta_n}{m_n} s_3 + \frac{J_{en}}{m_n};$
$s_3 = \dot{x}_1.$	$\dot{s}_3 = \frac{C_n}{m_1} s_0 - \frac{C_n + C_1}{m_1} s_1 + \frac{\beta_n}{m_1} s_2 - \frac{\beta_n + \beta_1}{m_1} s_3 + \frac{J_{e1}}{m_1}$

$$\left. \right\}, \quad (1.9)$$

Тогда модель системы (1.9) в терминах пространства состояний будет иметь следующий вид

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{s}_0 \\ \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{s}}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{C_n}{m_n} & \frac{C_n}{m_n} & -\frac{\beta_n}{m_n} & \frac{\beta_n}{m_n} \\ \frac{C_n}{m_1} & -\frac{C_n + C_1}{m_1} & \frac{\beta_n}{m_1} & -\frac{\beta_n + \beta_1}{m_1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{s}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_n} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} J_{en} \\ J_{e1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}(t)}; \quad (1.10)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ x_1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} J_{en} \\ J_{e1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}(t)}.$$

Сформируем в командном окне MATLAB значения матриц состояния и создадим модель системы:

```
>> A=[0 0 1 0; 0 0 0 1; -cn/mn cn/mn -bn/mn bn/mn; ...
      cn/m1 -(cn+c1)/m1 bn/m1 -(bn+b1)/m1];
>> B=[0 0; 0 0; 1e6/mn 0; 0 -1e6/m1];
>> C=[1 0 0 0; 0 1 0 0];
>> D=[0 0; 0 0];
>> WW=ss(A,B,C,D)
```

WW =

a =

	x1	x2	x3	x4
x1	0	0	1	0
x2	0	0	0	1
x3	-17.14	17.14	-5.272	5.272
x4	30	-80	9.227	-20.62

b =

	u1	u2
x1	0	0
x2	0	0
x3	28.57	0
x4	0	-50

c =

	x1	x2	x3	x4
y1	1	0	0	0
y2	0	1	0	0

d =

	u1	u2
y1	0	0
y2	0	0

Continuous-time state-space model.

1.6 Структурная модель механической системы, описываемой дифференциальными уравнениями

Сгруппируем члены системы дифференциальных уравнений (1.2) относительно переменных координат

$$\left. \begin{aligned} m_n \ddot{x}_n + \beta_n \dot{x}_n + C_n x_n &= \beta_n \dot{x}_1 + C_n x_1 + J_{en}; \\ m_1 \ddot{x}_1 + (\beta_n + \beta_1) \dot{x}_1 + (C_n + C_1) x_1 &= \beta_n \dot{x}_n + C_n x_n - J_{e1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Применив преобразование Лапласа к уравнениям (1.11), можно выделить в данной системе три передаточные функции как отношение изображений выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях

$$\begin{aligned} X_n(s) &= W_1(s) \cdot X_1(s) + W_2(s) \cdot J_{en}(s); \\ X_1(s) &= W_3(s) \cdot X_n(s) + W_4(s) \cdot J_{e1}(s), \end{aligned}$$

где W_1, W_2, W_3 – передаточные функции отдельных звеньев

$$\begin{aligned} W_1(s) &= \frac{X_n(s)}{X_1(s)} = \frac{\beta_n s + C_n}{m_n s^2 + \beta_n s + C_n}; \\ W_2(s) &= \frac{X_n(s)}{J_{en}(s)} = \frac{1}{m_n s^2 + \beta_n s + C_n}; \\ W_3(s) &= \frac{X_1(s)}{X_n(s)} = \frac{\beta_n s + C_n}{m_1 s^2 + (\beta_n + \beta_1) s + C_n + C_1}; \\ W_4(s) &= \frac{X_1(s)}{J_{e1}(s)} = \frac{1}{m_1 s^2 + (\beta_n + \beta_1) s + C_n + C_1}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Согласно выражениям (1.12), составим структурную модель данной системы (рис. 1.7).

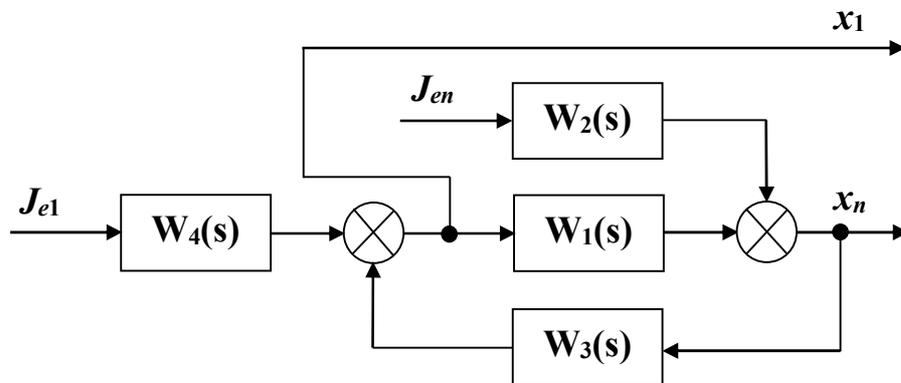


Рис. 1.7 – Структурная модель механической системы

Согласно правилам преобразования структурных схем, мы здесь имеем последовательное и параллельно-встречное с положительной обратной связью соединение звеньев. Система уравнений и передаточная функция такой многомерной системы

$$\begin{pmatrix} X_n(s) \\ X_1(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - W_3(s) \cdot W_1(s)} \begin{pmatrix} W_2(s) & -W_2(s) \cdot W_3(s) \\ W_4(s) \cdot W_1(s) & -W_4(s) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} J_{en}(s) \\ J_{e1}(s) \end{pmatrix};$$

Последовательность вычислений в MATLAB следующая:

```
>> m1=20000; mn=35000; c1=1e6; cn=0.6e6; b1=227908; bn=184531;
>> W1=tf([bn cn], [mn bn cn]);
>> W2=tf(1e6, [mn bn cn]);
>> W3=tf([bn cn], [m1 bn+b1 cn+c1]);
```

```
>> W4=tf(1e6,[m1 bn+b1 cn+c1]);
>> W = [W2 -W2*W3; W4*W1 -W4]/(1-W3*W1)
W =
```

From input 1 to output...

```
      7e14 s^4 + 1.813e16 s^3 + 1.441e17 s^2
      + 5.427e17 s + 9.6e17
1:  -----
      2.45e13 s^6 + 7.636e14 s^5 + 7.617e15 s^4
      + 4.243e16 s^3 + 1.463e17 s^2 + 3.035e17 s
      + 3.6e17

      1.292e20 s^5 + 3.765e21 s^4 + 3.747e22 s^3
      + 1.866e23 s^2 + 5.028e23 s + 5.76e23
2:  -----
      4.9e17 s^8 + 2.538e19 s^7 + 5.065e20 s^6
      + 5.212e21 s^5 + 3.261e22 s^4 + 1.343e23 s^3
      + 3.665e23 s^2 + 6.341e23 s + 5.76e23
```

From input 2 to output...

```
      -1.292e20 s^5 - 3.765e21 s^4 - 3.747e22 s^3
      - 1.866e23 s^2 - 5.028e23 s - 5.76e23
1:  -----
      4.9e17 s^8 + 2.538e19 s^7 + 5.065e20 s^6
      + 5.212e21 s^5 + 3.261e22 s^4 + 1.343e23 s^3
      + 3.665e23 s^2 + 6.341e23 s + 5.76e23

      -7e14 s^4 - 1.813e16 s^3 - 1.441e17 s^2
      - 5.427e17 s - 9.6e17
2:  -----
      1.4e13 s^6 + 6.512e14 s^5 + 1.08e16 s^4
      + 8.082e16 s^3 + 3.206e17 s^2 + 7.615e17 s
      + 9.6e17
```

Continuous-time transfer function.

1.7 Логарифмические частотные и временные характеристики

Логарифмические частотные характеристики построим с помощью следующих команд:

```
>> figure(1);subplot(1,2,1); bode(W,'r',WW,'b:'); grid on
>> subplot(1,2,2); nyquist(W,'r',WW,'b:'); grid on
```

Результаты вычислений приведены на рис. 1.8.

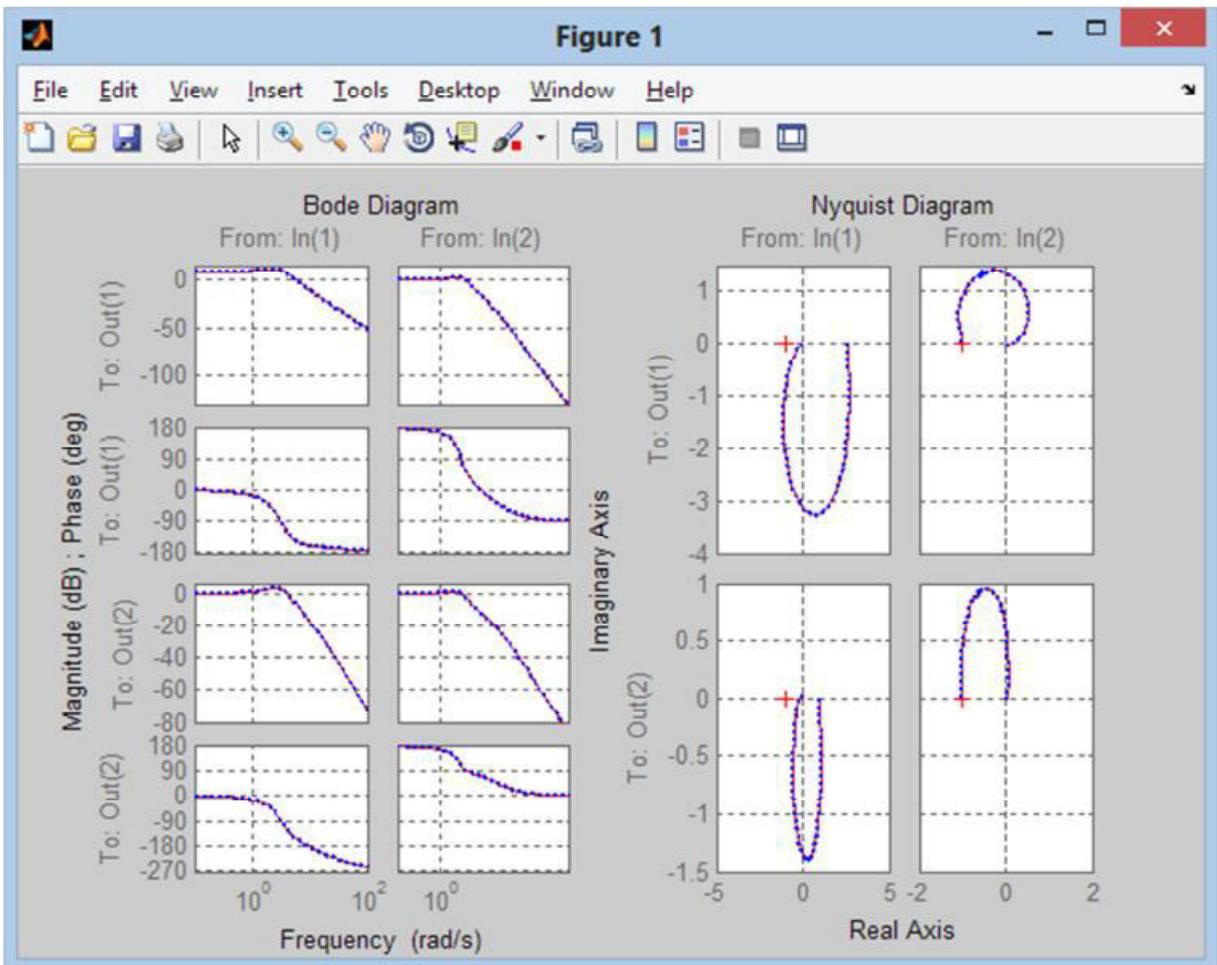


Рис. 1.8 – Логарифмические амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики (а); амплитудно-фазово-частотные характеристики (б)

Временные характеристики построим с помощью следующих команд:

```
>> figure(2); subplot(1,2,1); step(W, 'r', WW, 'b:'); grid on
>> subplot(1,2,2); impulse(W, 'r', WW, 'b:'); grid on
```

Результаты вычислений приведены на рис. 1.9.

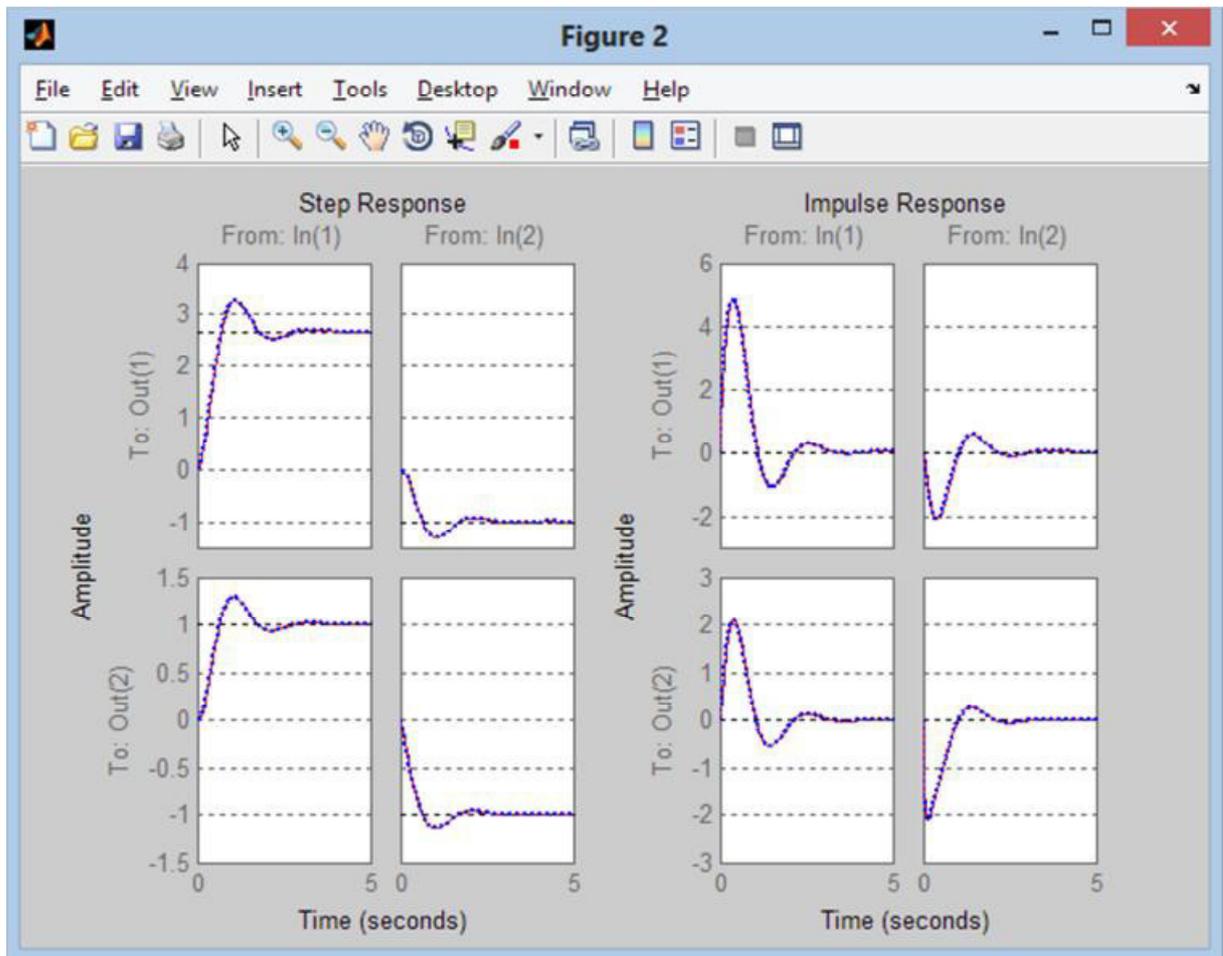


Рис. 1.9 – Временные характеристики системы: а – переходная функция Хэвисайда (или функция включения); б – импульсная функция Дирака (или функция удара)

Результаты вычислений показали, что моделируемые подсистемы относятся к колебательным с высоким сопротивлением движению, близким к аperiodическим звеньям.

1.8 Моделирование отклика системы на внешнее воздействие

Далее сформируем периодическую функции времени, внешнего воздействия и реакции системы на периодическую функцию. Представим полученные характеристики на рис. 1.10.

```
>> t=0:0.1:50; % Диапазон времени расчёта
>> H=[4*cos(4*t)+1*sin(8*t); ...
      8*cos(2*t)+4*sin(4*t)]; % Периодическая функция
>> [h,t]=lsim(WW,H,t); % Реакция системы
>> figure(3);subplot(2,1,1);plot(t,H);grid on;
>> xlabel('Время, с'); ylabel('Амплитуда');
>> legend('Jen','Jel')
>> subplot(2,1,2);plot(t,h); grid on
>> xlabel('Время, с'); ylabel('Амплитуда');
>> legend('Mn','M1')
```

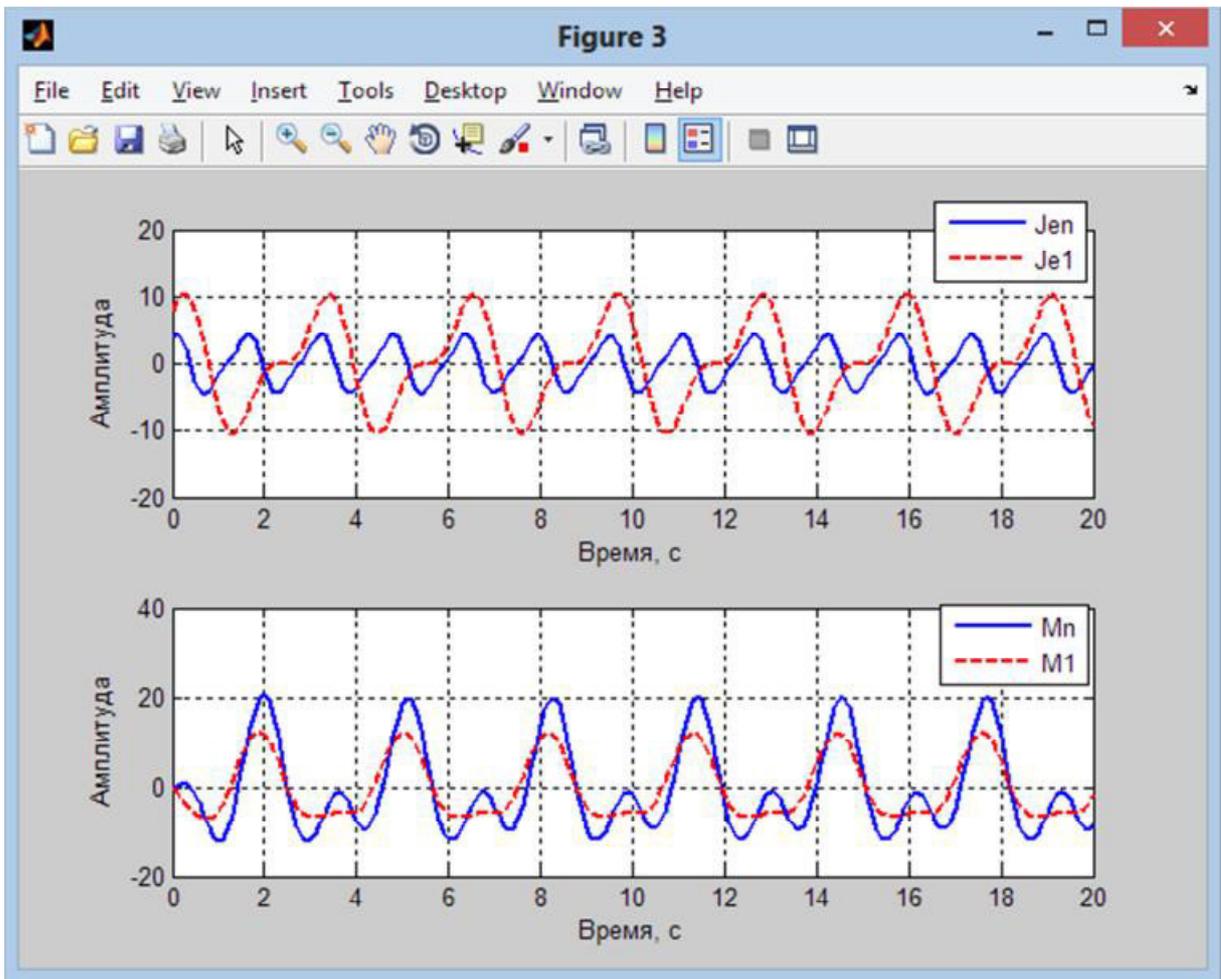


Рис. 1.10 – Результаты численного решения системы дифференциальных уравнений при заданном внешнем воздействии

1.9 Устойчивость системы по критерию А.М. Ляпунова

Система устойчива, если упругие связи системы (1.8) не имеют пластических деформаций. Формулировка общего пространства состояний для системы может быть выражена системой уравнений (1.10).

Сперва примем, что внешнее воздействие на систему отсутствует. Тогда (1.10) может быть записано в следующем общем виде

$$\dot{s} = As, \quad (1.13)$$

где A – матрица состояния системы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{C_n}{m_n} & \frac{C_n}{m_n} & -\frac{\beta_n}{m_n} & \frac{\beta_n}{m_n} \\ \frac{C_n}{m_1} & -\frac{C_n + C_1}{m_1} & \frac{\beta_n}{m_1} & -\frac{\beta_n + \beta_1}{m_1} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что в данном случае состояния системы $s_1 = s_2 = 0$ являются особыми точками.

Удобным представлением функции Ляпунова является скалярная квадратичная форма

$$V(s) = \dot{s}Ps \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

где P – реальная симметричная матрица.

Чтобы обеспечить $V > 0$, реальная симметричная матрица P должна быть *положительно определённой матрицей*, что обозначим как $P > 0$. Тогда требование $P > 0$ будет выполнено, если выполнено одно из следующих условий:

1. Собственные числа $\lambda_1 \dots \lambda_4$ матрицы P положительны;
2. (Теорема Сильвестра) Детерминанты всех дискриминантов матрицы P положительные, то есть

$$p_{11} > 0 \ \& \ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \ \& \ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \ \& \ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} > 0$$

Гарантировав $V > 0$, исследуем её производную

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) &= \dot{s}^T Ps + s^T P\dot{s} = \\ &= [As]^T Ps + s^T P[As] = s^T [A^T P + PA]s \end{aligned}$$

Для обеспечения $\dot{V} \leq 0$ выберем отрицательную определённость выражения $A^T P + PA$, или

$$A^T P + PA = -Q, \quad (1.15)$$

где Q – положительно определённая матрица

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix} > 0.$$

В качестве иллюстрации можно выбрать значение положительно определённой матрицы

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

которое обеспечит $V > 0$ и, следовательно, V представляет собой как кандидат для функции Ляпунова.

Затем исследуем его производную времени, чтобы удостовериться о характере линейной системы. Для этого оценим значение

$$\begin{aligned}
 A^T P + PA = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{C_n}{m_n} & \frac{C_n}{m_1} \\ 0 & 0 & \frac{C_n}{m_n} & -\frac{C_n + C_1}{m_1} \\ 1 & 0 & -\frac{\beta_n}{m_n} & \frac{\beta_n}{m_1} \\ 0 & 1 & \frac{\beta_n}{m_n} & -\frac{\beta_n + \beta_1}{m_1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{C_n}{m_n} & \frac{C_n}{m_n} & -\frac{\beta_n}{m_n} & \frac{\beta_n}{m_n} \\ \frac{C_n}{m_1} & -\frac{C_n + C_1}{m_1} & \frac{\beta_n}{m_1} & -\frac{\beta_n + \beta_1}{m_1} \end{bmatrix} = -Q
 \end{aligned}$$

или

$$A^T P + PA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 - \frac{C_n}{m_n} & \frac{C_n}{m_1} \\ 0 & 0 & \frac{C_n}{m_n} & 1 - \frac{C_n + C_1}{m_1} \\ 1 - \frac{C_n}{m_n} & \frac{C_n}{m_n} & -2\frac{\beta_n}{m_n} & \frac{\beta_n}{m_1} + \frac{\beta_n}{m_n} \\ \frac{C_n}{m_1} & 1 - \frac{C_n + C_1}{m_1} & \frac{\beta_n}{m_n} + \frac{\beta_n}{m_1} & -2\frac{\beta_n + \beta_1}{m_1} \end{bmatrix} = -Q$$

Определим теперь дискриминанты матрицы Q :

$$\begin{aligned}
& |q_{11}| = 0 \ \& \ \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} = 0 \ \& \ \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{C_n - 1}{m_n} \\ 0 & 0 & -\frac{C_n}{m_n} \\ \frac{C_n - 1}{m_n} & -\frac{C_n}{m_n} & 2\frac{\beta_n}{m_n} \end{vmatrix} = 0 \ \& \ \dots \\
& \dots \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{C_n - 1}{m_n} & -\frac{C_n}{m_n} \\ 0 & 0 & -\frac{C_n}{m_n} & \frac{C_n + C_1}{m_1} - 1 \\ \frac{C_n - 1}{m_n} & -\frac{C_n}{m_n} & 2\frac{\beta_n}{m_n} & -\frac{\beta_n}{m_1} - \frac{\beta_n}{m_n} \\ -\frac{C_n}{m_1} & \frac{C_n + C_1}{m_1} - 1 & -\frac{\beta_n}{m_1} - \frac{\beta_n}{m_n} & 2\frac{\beta_n + \beta_1}{m_1} \end{vmatrix} = \left(\frac{C_n}{m_n} + \frac{C_n + C_1}{m_1} - \frac{C_n C_1}{m_n m_1} - 1 \right)^2
\end{aligned}$$

После подставки значений моделируемой системы получим

$$\begin{aligned}
\frac{C_n}{m_n} + \frac{C_n + C_1}{m_1} - \frac{C_n C_1}{m_n m_1} - 1 &= \frac{0,6 \cdot 10^6}{35000} + \frac{0,6 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^6}{20000} - \frac{0,6 \cdot 10^6 \times 1 \cdot 10^6}{35000 \times 20000} - 1 = \\
&= -761,
\end{aligned}$$

Следовательно, матрица Q не является положительно определённой матрицей и фактически является отрицательной полуопределённой матрицей. Тогда скалярная квадратичная форма функции Ляпунова (1.14) с единичной матрицей P не отражает свойства системы. Однако следует также утверждать, что в данном случае не найдена подходящая функция для идентификации устойчивости моделируемой линейной системы. Поэтому нельзя утверждать, что система неустойчива. В этом случае применим *второй метод Ляпунова*, который заявляет:

Если общая линейная система (1.13) устойчива, то там существуют положительно определённые матрицы $P > 0$ и $Q > 0$, которые удовлетворяют алгебраическому уравнению Ляпунова (1.15). Поскольку матрица C положительно определена, то система асимптотически устойчива в целом. Более того, так как

$$C^T = -(A^T P + P A) = -(P^T A + A^T P^T) = -(P A + A^T P) = -C,$$

то матрица C симметрична.

На практике целесообразно решать обратную задачу. Выбирают какую-либо положительно определенную положительную матрицу, например $C = I$. Тогда из (1.15) можно получить P . Если квадратичная форма P оказывается неопределенной (знакопеременной), то по теореме Ляпунова о неустойчивости начало координат неустойчиво. Если P положительно

определена, то поскольку система линейна и стационарна, начало координат асимптотически устойчиво в целом. Обоснованность такого анализа зависит от того, определяет ли уравнение (1.15) однозначно матрицу P , если задана симметричная и положительная C .

Это значимая теорема для нахождения подходящей матрицы P для любой устойчивой линейной системы и реализована в функции MATLAB `lyap.m`. Воспользуемся этими возможностями MATLAB, используя две следующие команды, которые обращаются к функции пользователя `syl`:

```
>> X = syl(A, [], [], 0) % Решение уравнения A^T X A - X = -Q
>> X = syl(A, B, C, 1) % Решение уравнения A X + X B = -C
```

Пользовательская функция `syl` имеет следующий вид:

```
function G = syl(A,B,C,mode)
    disp('==== УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ ПО ЛЯПУНОВУ =====');
    if mode==0,
        disp('Уравнение Ляпунова A^T X A - X = -Q, ');
        disp('где A - квадратная матрица связи вектора состояния
системы');
        disp('и его производной; Q - симметричная и положительно
опреде-');
        disp('лённая матрица');
    elseif mode==1,
        disp('Уравнение Ляпунова A X + X B = -C, ');
        disp('где A - квадратная матрица связи вектора состояния
системы');
        disp('и его производной; B - матрица связи входного
сигнала и');
        disp('производной вектора состояния; C - матрица связи вы-
ходного');
        disp('сигнала и вектора состояния');
    end
    disp(' ');
    % Извлечь параметры подсистем
    [ma,na]=size(A);
    if mode==0,
        % Решение уравнения Ляпунова
        G=lyap(A,eye(ma));
    elseif mode==1,
        BA=zeros(ma,na);
        [L,N]=size(B);
        BA(1:L,1:N)=B(1:L,1:N);
        CA=eye(ma);
        [L,N]=size(C);
        CA(1:L,1:N)=C(1:L,1:N);
        % Решение второго уравнения Ляпунова
        G=lyap(A,BA,CA);
    end
    % вычисление главных миноров
    [L,N]=size(G);
    minor=1;
    for i=1:N
```

```

    dd=det(G(1:i, 1:i));
    if dd<0
        minor=0;
    end
end
disp('По критерию Сильвестра решение');
if minor==0
    disp('не является положительно-определённой матрицей, следовательно,');
    disp('система НЕ ЯВЛЯЕТСЯ АСИМТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОЙ');
else
    disp('является положительно-определённой матрицей, следовательно,');
    disp('система АСИМТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВА');
end

```

Приведём результаты вычислений:

===== УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ ПО ЛЯПУНОВУ =====
 Уравнение Ляпунова $A^T X A - X = -Q$,
 где A - квадратная матрица связи вектора состояния системы и его производной; Q - симметричная и положительно определённая матрица

По критерию Сильвестра решение является положительно-определённой матрицей, следовательно, система АСИМТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВА

X =

0.3416	0.0585	-0.5000	0.0640
0.0585	0.1712	-0.0640	-0.5000
-0.5000	-0.0640	1.8795	0.3670
0.0640	-0.5000	0.3670	2.2212

===== УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ ПО ЛЯПУНОВУ =====
 Уравнение Ляпунова $A X + X B = -C$,
 где A - квадратная матрица связи вектора состояния системы и его производной; B - матрица связи входного сигнала и производной вектора состояния; C - матрица связи выходного сигнала и вектора состояния

По критерию Сильвестра решение является положительно-определённой матрицей, следовательно, система АСИМТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВА

X =

1.0480	-0.3076	0.0933	0.0200
0.2279	-0.0000	0.0350	0.0200
-3.6667	1.0000	-0.0000	0
-1.0000	0.0000	-0.0000	0

1.10 Выводы

1) В результате выполнения контрольной работы была выполнена линеаризация нелинейных характеристик трения по Кулону и получена система линейных дифференциальных уравнений двухмассной приведенной расчётной схемы.

2) Определены частоты и формы собственных колебаний приведенной расчётной схемы.

3) Идентифицирована структурная схема моделируемой системы, состоящей из двух форсирующе-колебательных звеньев и двух колебательных звеньев с постоянным коэффициентом усиления.

4) С помощью пакета прикладных программ Control System Toolbox, входящий в состав математического программного продукта MATLAB, определена эквивалентная передаточная матрица моделируемой системы.

5) При известной передаточной матрице моделируемой системы построены логарифмические частотные и временные характеристики. Анализ переходных функций Дирака показал, что для массы m_n перерегулирование составляет $\sigma_{mn} = 22,4\%$ ($29,6\%$), а для массы $m_1 - \sigma_{m1} = 29,6\%$ ($13,9\%$); время переходных колебательных процессов для массы m_n составляет $t_{mn} = 2,66$ с ($2,66$ с), а для массы $m_1 - t_{m1} = 2,66$ с ($2,45$ с), что менее допустимых 2-х периодов свободных колебаний. Следовательно, моделируемая механическая система спроектирована удовлетворительно.

6) Выполнено численное интегрирование моделируемой системы при заданном внешнем воздействии P_n и P_1 . Показано незначительное динамическое отклонение моделируемых масс от заданного внешнего воздействия.

7) Согласно уравнениям А.М. Ляпунова моделируемая транспортная система представляет собой асимптотически устойчивую систему.

2 ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЗАПУСКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

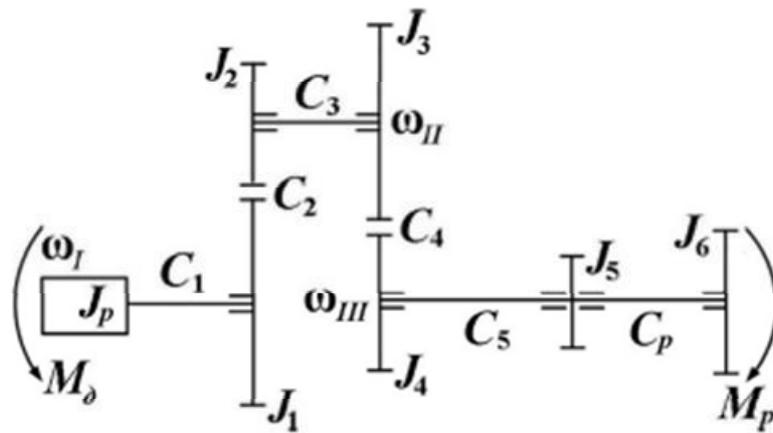


Рисунок 2.1 – Расчётная схема механизма

Исходные данные: $J_p=1,5 \cdot 10^{-2}$ кг·м, $J_1=1,0 \cdot 10^{-2}$ кг·м, $J_2=2,0 \cdot 10^{-2}$ кг·м, $J_3=1,5 \cdot 10^{-2}$ кг·м, $J_4=1,8 \cdot 10^{-2}$ кг·м, $J_5=1,7 \cdot 10^{-2}$ кг·м, $J_6=2,4 \cdot 10^{-2}$ кг·м, $C_1=1,5 \cdot 10^4$ Н·м²/рад, $C_2=2,1 \cdot 10^6$ Н/м, $C_3=1,0 \cdot 10^4$ Н·м²/рад, $C_4=2,0 \cdot 10^6$ Н/м, $C_5=1,8 \cdot 10^4$ Н·м²/рад, $C_p=0,5 \cdot 10^4$ Н·м²/рад, $\omega_1=72$ рад/с, $\omega_2=30$ рад/с, $\omega_3=30$ рад/с, $M_d=2,5 \cdot 10^2$ Н·м.

2.1 Приведение физических величин к одной размерности

Определим передаточные отношения схемы

$$i_{12} = \frac{\omega_I}{\omega_{II}} = \frac{120}{100} = 1,2; \quad i_{12} = \frac{\omega_{II}}{\omega_{III}} = \frac{100}{76} = 1,316.$$

где ω_I , ω_{II} , ω_{III} – угловые скорости соответствующих валов.

Найдём крутящий момент на каждом из валов:

- ведущего вала (вала приведения), $M_I = M_d = 250$ Н·м;
- промежуточного вала, $M_{II} = M_I \cdot i_{12} = 250 \cdot 1,2 = 300$ Н·м;
- ведомого вала, $M_{III} = M_{II} \cdot i_{34} = 300 \cdot 1,316 = 394,737$ Н·м.

Определим значения требуемых диаметров валов, округлив полученные значения до ближайшего большего по ГОСТ 2590-88

$$d_I = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot M_I}{[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 250}{20 \cdot 10^6}} = 0,04 \text{ м};$$

$$d_{II} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot M_{II}}{[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 300}{20 \cdot 10^6}} = 0,042 \text{ м};$$

$$d_{III} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot M_{III}}{[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 394,737}{20 \cdot 10^6}} = 0,046 \text{ м.}$$

где $[\tau_k]$ – допускаемое напряжение на кручение.

Найдём радиус начальной окружности шестерён J_3 и J_5

$$r_1 = \frac{K_d \cdot \sqrt[3]{\frac{M_I \cdot K_{H\beta} \cdot (i_{12} + 1)}{\psi_{bd} \cdot [\sigma_H]^2 \cdot i_{12}}}}{2},$$

$$r_3 = \frac{K_d \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{II} \cdot K_{H\beta} \cdot (i_{34} + 1)}{\psi_{bd} \cdot [\sigma_H]^2 \cdot i_{34}}}}{2},$$

где M – крутящий момент, передаваемый шестерней, Н·м;

K_d – для прямозубых передач $K_d = 0,77$;

$K_{H\beta}$ – коэффициент неравномерности распределения нагрузки по ширине венца зубчатого зацепления, для прямозубых передач $K_{H\beta} = 1$;

i_{12} – передаточное число зубчатой передачи;

Ψ_{bd} – коэффициент ширины венца зубчатого колеса по среднему диаметру ($\Psi_{bd} \approx 0,3$);

$[\sigma_H]$ – допускаемое контактное напряжение.

$$r_1 = \frac{0,77 \cdot \sqrt[3]{\frac{250 \cdot 1 \cdot (1,2 + 1)}{0,3 \cdot 790^2 \cdot 1,2}}}{2} = 0,052 \text{ м;}$$

$$r_3 = \frac{0,77 \cdot \sqrt[3]{\frac{300 \cdot 1 \cdot (1,316 + 1)}{0,3 \cdot 790^2 \cdot 1,316}}}{2} = 0,054 \text{ м.}$$

Жёсткость зубчатого зацепления приведём к эквивалентной жёсткости вала:

$$C_{2пр} = C_2 \cdot r_3^2 = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,052^2 = 5653,86 \text{ Н} \cdot \text{м/рад};$$

$$C_{4пр} = C_4 \cdot r_5^2 = 2,0 \cdot 10^6 \cdot 0,054^2 = 5917,3 \text{ Н} \cdot \text{м/рад}.$$

Коэффициенты сопротивления колебаниям, Н·м·с/рад, определим по формуле:

$$\beta = 2 \cdot \xi \cdot J \cdot \omega_0 = 2 \cdot \xi \cdot J \cdot \sqrt{\frac{C}{J}} = \xi \cdot \sqrt{4 \cdot J \cdot C},$$

где ξ – безразмерный коэффициент демпфирования фрикционных связей;

J – момент инерции, кг·м²;

C – коэффициент упругости, Н·м/рад.

$$\beta_1 = \xi \cdot \sqrt{4 \cdot J_p \cdot C_1} = 6$$

$$\begin{aligned}\beta_{2np} &= \xi \cdot \sqrt{4 \cdot J_1 \cdot (C_1 + C_{2np})} = 5,749 \\ \beta_3 &= \xi \cdot \sqrt{4 \cdot J_2 \cdot (C_{2np} + C_3)} = 7,078 \\ \beta_{4np} &= \xi \cdot \sqrt{4 \cdot J_3 \cdot (C_3 + C_{4np})} = 6,181 \\ \beta_5 &= \xi \cdot \sqrt{4 \cdot J_4 \cdot (C_{4np} + C_5)} = 8,3 \\ \beta_p &= \xi \cdot \sqrt{4 \cdot J_5 \cdot (C_5 + C_p)} = 7,909 \\ \beta_k &= \xi \cdot \sqrt{4 \cdot J_6 \cdot (C_p + C_k)} = 277,162\end{aligned}$$

2.2 Построение математической модели

Кинематическая схема описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}J_p \varphi_p'' + C_1(\varphi_p - \varphi_1) + \beta_1(\varphi_p' - \varphi_1') &= M_D \\ J_1 \varphi_1'' - C_1(\varphi_p - \varphi_1) + C_{2np}(\varphi_1 - \varphi_2) - \beta_1(\varphi_p' - \varphi_1') + \beta_{2np}(\varphi_1' - \varphi_2') &= 0 \\ J_2 \varphi_2'' - C_{2np}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_3(\varphi_2 - \varphi_3) - \beta_{2np}(\varphi_1' - \varphi_2') + \beta_3(\varphi_2' - \varphi_3') &= 0 \\ J_3 \varphi_3'' - C_3(\varphi_2 - \varphi_3) + C_{4np}(\varphi_3 - \varphi_4) - \beta_3(\varphi_2' - \varphi_3') + \beta_{4np}(\varphi_3' - \varphi_4') &= 0 \quad (2.1) \\ J_4 \varphi_4'' - C_{4np}(\varphi_3 - \varphi_4) + C_5(\varphi_4 - \varphi_5) - \beta_{4np}(\varphi_3' - \varphi_4') + \beta_5(\varphi_4' - \varphi_5') &= 0 \\ J_5 \varphi_5'' - C_5(\varphi_4 - \varphi_5) + C_p(\varphi_5 - \varphi_6) - \beta_5(\varphi_4' - \varphi_5') + \beta_p(\varphi_5' - \varphi_6') &= 0 \\ J_6 \varphi_6'' - C_p(\varphi_5 - \varphi_6) - \beta_p(\varphi_5' - \varphi_6') &= M_p - C_k \varphi_6 - \beta_k \varphi_6'\end{aligned}$$

где $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6$ – моменты инерции, кг·Н²/рад

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_p$ – коэффициент сопротивления

C_1, C_3, C_5, C_p , – угловая жёсткость упругих связей, Н·м/рад;

C_{2np}, C_{4np} – линейная жесткость вала, Н/м;

C_k – жесткость рабочего органа, Н·м/рад ($C_k=20 \cdot 10^6$ Н·м/рад);

M_D – момент движущий, Н·м:

$$M_D(t) = \zeta_1 \sin(\omega_1 t) + \zeta_2 \sin(3\omega_1 t)$$

M_p – момент реактивный, Н·м:

$$M_p(t) = \zeta_3 \sin(\omega_2 t) + \zeta_4 \sin(3\omega_2 t)$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_p$ – обобщённые координаты;

Введём в рассмотрение координаты состояния фрикционной системы в форме вектора координат состояния S

$$\begin{aligned} S &= (s_0 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 \quad s_5 \quad s_6 \quad s_7 \quad s_8 \quad s_9 \quad s_{10} \quad s_{11} \quad s_{12} \quad s_{13})^T = \\ &= (\varphi_p \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4 \quad \varphi_5 \quad \varphi_6 \quad \varphi_p' \quad \varphi_1' \quad \varphi_2' \quad \varphi_3' \quad \varphi_4' \quad \varphi_5' \quad \varphi_6')^T \end{aligned}$$

Получим систему дифференциальных уравнений в координатах состояния

$$s_0' = s_7$$

$$s_1' = s_8$$

$$s_2' = s_9$$

$$s_3' = s_{10}$$

$$s_4' = s_{11}$$

$$s_5' = s_{12}$$

$$s_6' = s_{13}$$

$$s_7' = \frac{1}{J_p} [-C_1(s_0 - s_1) - \beta_1(s_7 - s_8) + M_d]$$

$$s_8' = \frac{1}{J_1} [C_1(s_0 - s_1) - C_{2np}(s_1 - s_2) + \beta_1(s_7 - s_8) - \beta_{2np}(s_8 - s_9)]$$

$$s_9' = \frac{1}{J_2} [C_{2np}(s_1 - s_2) - C_3(s_2 - s_3) + \beta_{2np}(s_8 - s_9) - \beta_3(s_9 - s_{10})]$$

$$s_{10}' = \frac{1}{J_3} [C_3(s_2 - s_3) - C_{4np}(s_3 - s_4) + \beta_3(s_9 - s_{10}) - \beta_{4np}(s_{10} - s_{11})]$$

$$s_{11}' = \frac{1}{J_4} [C_{4np}(s_3 - s_4) - C_5(s_4 - s_5) + \beta_{4np}(s_{10} - s_{11}) - \beta_5(s_{11} - s_{12})]$$

$$s_{12}' = \frac{1}{J_5} [C_5(s_4 - s_5) - C_p(s_5 - s_6) + \beta_5(s_{11} - s_{12}) - \beta_p(s_{12} - s_{13})]$$

$$s_{13}' = \frac{1}{J_6} [C_p(s_5 - s_6) - C_k s_6 + \beta_p(s_{12} - s_{13}) - \beta_k s_{13} + M_p]$$

Для построения петли гистерезиса и последующего определения частотных характеристик объекта в связях моделируемой системы определим величины упруго-диссипативных связей, Н

$$\begin{aligned}
F_p &= \beta_1 \cdot d\varphi_p + C_1 \cdot \varphi_p \\
F_1 &= \beta_{2pr} \cdot d\varphi_1 + C_{2pr} \cdot \varphi_1 \\
F_2 &= \beta_3 \cdot d\varphi_2 + C_3 \cdot \varphi_2 \\
F_3 &= \beta_{4pr} \cdot d\varphi_3 + C_{4pr} \cdot \varphi_3 \\
F_4 &= \beta_5 \cdot d\varphi_4 + C_5 \cdot \varphi_4 \\
F_5 &= \beta_p \cdot d\varphi_5 + C_p \cdot \varphi_5 \\
F_6 &= \beta_k \cdot d\varphi_6 + C_k \cdot \varphi_6
\end{aligned} \tag{2.2}$$

2.3 Обоснование частотной модели.

Представим элемент кинематической схемы с жёсткостью C_2 в форме так называемого «чёрного ящика» (рисунок 2.1) с одним входным и одним выходным информационными сигналами и применим математический аппарат цифровой обработки сигналов для анализа частотных характеристик.



N – входное силовое воздействие; τ – выходное силовое воздействие
Рисунок 2.1 – Представление системы в виде «чёрного ящика»

Основной целью спектрального анализа является оценивание спектральных характеристик случайных динамических процессов и обнаружение в них периодических составляющих.

При определении комплексного коэффициента передачи системы используем метод усреднённых периодограмм Уэлча [1] при вычислении спектральной плотности мощности (СПМ), являющейся мерой интенсивности сигнала и его простейших составляющих.

Комплексный коэффициент передачи системы определится выражением

$$W_{\tau N}(i\omega) = \frac{P_{\tau N}(i\omega)}{P_{NN}(\omega)} \tag{2.3}$$

где периодограмма определяется выражением:

$$P_{\tau N}[k\omega_1] = \frac{S_{\tau N}[k\omega_1]}{FU} = \frac{1}{F} \cdot \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \left(w_k \tau_k e^{-i \cdot \frac{2\pi km}{n}} \right) \cdot \left(w_k N_k e^{-i \cdot \frac{2\pi km}{n}} \right)^*}{\frac{1}{n} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} w_m^2};$$

$$P_{NN}[k\omega_1] = \frac{S_{NN}[k\omega_1]}{FU} = \frac{1}{F} \cdot \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \left(w_k N_k e^{-i \cdot \frac{2\pi km}{n}} \right)^2}{\frac{1}{n} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} w_m^2},$$

где F – единица частоты оцифрованного сигнала;
 U – энергия дискретно-временного окна;
 $S_{\tau N}$, S_{NN} – квадрат амплитудных гармоник преобразования Фурье;
 w_k – отсчёты применённой весовой функции окна;
 $*$ – комплексное сопряжение вычисленной функции;
 ω_1 – частота первой гармоники преобразования (самая низкочастотная составляющая), $\omega_1 = 1 / T$;
 T – период оцифровки данных, с;
 n – количество оцифрованных чисел в единицу времени.

2.4 Построение и анализ временных характеристик

При устойчивой системе искомые функции переходной функции Хэвисайда $h(t)$ и импульсной функции Дирака $w(t)$ можно получить, если на вход полученной модели частотной передаточной функции $W_{\tau N}(i\omega)$ (4) подать входные воздействия соответственно функциями Хэвисайда $1(t)$ и Дирака $\delta(t) = 1'(t)$.

Единичная ступенчатая функция мгновенно возрастает от нуля до единицы и далее остаётся неизменным [1]

$$N(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0; \\ 1, & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

График переходной функции, то есть зависимости $h(t)$ от времени t , называют переходной или разгонной характеристикой, сопровождающей работу элемента кинематической схемы при переходе от одного стационарного режима работы к другому, также стационарному.

Дельта-функция Дирака $\delta(t)$ – это импульс, площадь которого равна единице при длительности Δt , равной нулю, и высоте, равной бесконечности

$$N(t) = \delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) = \begin{cases} \infty, & \text{при } t = 0; \\ 0, & \text{при } t \neq 0, \end{cases}$$

где $1'(t)$ – производная по времени от функции Хэвисайда.

Импульсная переходная функция $w(t)$, иначе называемая весовой функцией (функцией веса), представляет собой реакцию динамической системы на единичное импульсное воздействие $\delta(t)$ при нулевых начальных условиях.

График импульсной переходной функции называют импульсной переходной характеристикой, однозначно оценивает характер колебаний в случае внезапно приложенных импульсных внешних воздействий.

Если при использовании в модели элемента кинематической схемы указанных функций Хэвисайда и Дирака выходной сигнал удовлетворяет определённым условиям, то часто можно считать, что он тем более будет удовлетворять им и при иных характерных воздействиях.

Для определения временных характеристик анализируемого объекта используем способ В.В. Солодовникова [3]. Он позволяет построить кривую переходного процесса, если дифференциальные уравнения объекта не известны, а задаются экспериментально снятыми частотными характеристиками. В этом случае выходной отклик объекта на функцию Хэвисайда $1(t)$ в виде переходной функции $h(t)$ для положительных и отрицательных отсчётов времени можно получить, используя интеграл

$$h(t) = \frac{4}{\omega_{\max}} \int_0^{\frac{\omega_{\max}}{2}} P(\omega) \cdot \frac{\sin(2\pi\omega t)}{2\pi\omega} d\omega \quad (2.4)$$

где ω_{\max} – максимальная частота оцифрованного сигнала, $\omega_{\max} = 1 / \Delta t$;

Δt – период времени оцифрованных данных анализируемых сил нормального воздействия и тангенциального смещения;

$P(\omega)$ – вещественная частотная характеристика.

Тогда импульсную функцию Дирака $w(t)$ в соответствии с определим дифференцированием переходной функции.

Также известно, что по известным значениям переходной функции Хэвисайда $h(t)$, можно получить выходной отклик системы $\tau(t)$ на произвольное входное воздействие $N(t)$, используя свойства свёртки сигналов и интеграл Дюамеля [10]

$$\tau^*(t) = N(t) * h(t) = N(0) \cdot h(t) + \int_0^t N(t - \tau) \cdot \frac{d}{dt} h(t) d\tau. \quad (2.5)$$

Таким образом, при экспериментальном определении частотных и временных характеристик, мы можем определить временные оценки качества моделируемой системы:

- установившаяся амплитуда переходной функции $h_{\text{уст}} = h(t_{\max})$;
- время нарастания $t_{\text{н}}$, характеризующая длительность протекания переходного процесса (обычно это тот промежуток времени, в течение которого реакция системы на функцию Хэвисайда достигает величины $1 - 1/e \approx 63,2\%$. В этом случае постоянная времени звена T характеризует время убывания реакции системы до уровня $1/e \approx 36,8\%$ от своего первоначального значения, где $e \approx 2,718$);

– время регулирования t_p – интервал времени, по истечении которого отклонение переходной характеристики от установившегося значения $h_{уст}$ не превышает некоторой заданной величины $|h(t) - h_{уст}| \leq \Delta = 0,05$, и характеризует быстродействие системы. Чем меньше время регулирования собственного переходного движения при отработке функции включения $1(t)$, тем более быстродействующей является система;

– перерегулирование, выраженное в процентах $\sigma = \frac{h_{\max} - h_{уст}}{h_{уст}} \cdot 100\%$;

– период колебаний, с: $T = t(h_{\max}) - t(h_{\max 2})$;

– декремент колебаний, характеризующий затухание колебаний за один

период колебаний T : $\delta = \ln \left| \frac{h_{\max} - h_{уст}}{h_{\max 2} - h_{уст}} \right|$

– добротность колебательного контура, мера относительной диссипации (рассеивания) энергии, характеризующая качество колебательной системы. Добротность характеризует отношение полной энергии W , запасённой системой, к энергии W_{mp} , которая теряется в колебательной системе за один период свободных колебаний. Чем больше добротность колебательной системы, тем меньше потери энергии в системе за одно колебание и медленнее затухают колебания. $Q \approx \frac{\pi}{\delta}$

– число колебаний n , в результате которых амплитуда колебаний уменьшится в 2,7 раз за время релаксации фрикционных связей t_p $n \approx \frac{1}{\delta}$

2.5 Оценка упруго-диссипативных характеристик

К косвенным оценкам качества в теории автоматического управления относят интегральные оценки. Интегральные оценки дают обобщённую оценку быстроты затухания и величины отклонения регулируемой величины в совокупности, без определения того и другого в отдельности. Интегральные характеристики удобны для систем управления фрикционными системами, так как дают единый числовой критерий качества. Недостатком является то, что одним и тем же значениям интегральной оценки соответствуют различные формы динамических переходных процессов, что создаёт недостаточную определённость решения задачи. Однако они позволяют сравнить результаты математического или физического моделирования при одинаковых нагрузочно-скоростных условиях эксплуатации.

Для оценки упруго-диссипативных характеристик были предложены следующие [4, 5, 6]:

– I_C – интегральная оценка энергии упруго-инерционных сил фрикционного взаимодействия объекта, способствующих сближению контактирующих пар трения

$$I_C = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\omega_{\max}}{2}} P(\omega) d\omega, \text{ если } P(\omega) \geq 0,$$

где $P(\omega)$ – вещественная частотная функция;

ω_{\max} – максимальная частота оцифрованного сигнала, $\omega_{\max} = 1 / \Delta t$;

n – количество частотных гармоник.

– I_m – интегральная оценка энергии инерционных сил фрикционного взаимодействия объекта, способствующих росту потери стабильности фрикционной связи

$$I_m = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\omega_{\max}}{2}} |P(\omega)| d\omega, \text{ если } P(\omega) < 0;$$

– I_P – интегральная оценка энергии упруго-инерционных сил фрикционного взаимодействия объекта

$$I_P = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\omega_{\max}}{2}} |P(\omega)| d\omega;$$

– I_{Fc} – интегральная оценка энергии сил сопротивления колебаниям

$$I_{Fc} = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\omega_{\max}}{2}} |Q(\omega)| d\omega, \text{ если } Q(\omega) \leq 0,$$

где $Q(\omega)$ – вещественная частотная функция.

– I_{Fp} – интегральная оценка энергии сил трения, возникающих в результате фрикционных автоколебаний объекта

$$I_{Fp} = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\omega_{\max}}{2}} Q(\omega) d\omega, \text{ если } Q(\omega) > 0;$$

– I_Q – интегральная оценка диссипативной энергии объекта, то есть сил трения, вызывающих как сопротивление относительно смещению, так и сил трения, вызванных фрикционными автоколебаниями

$$I_Q = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\omega_{\max}}{2}} |Q(\omega)| d\omega;$$

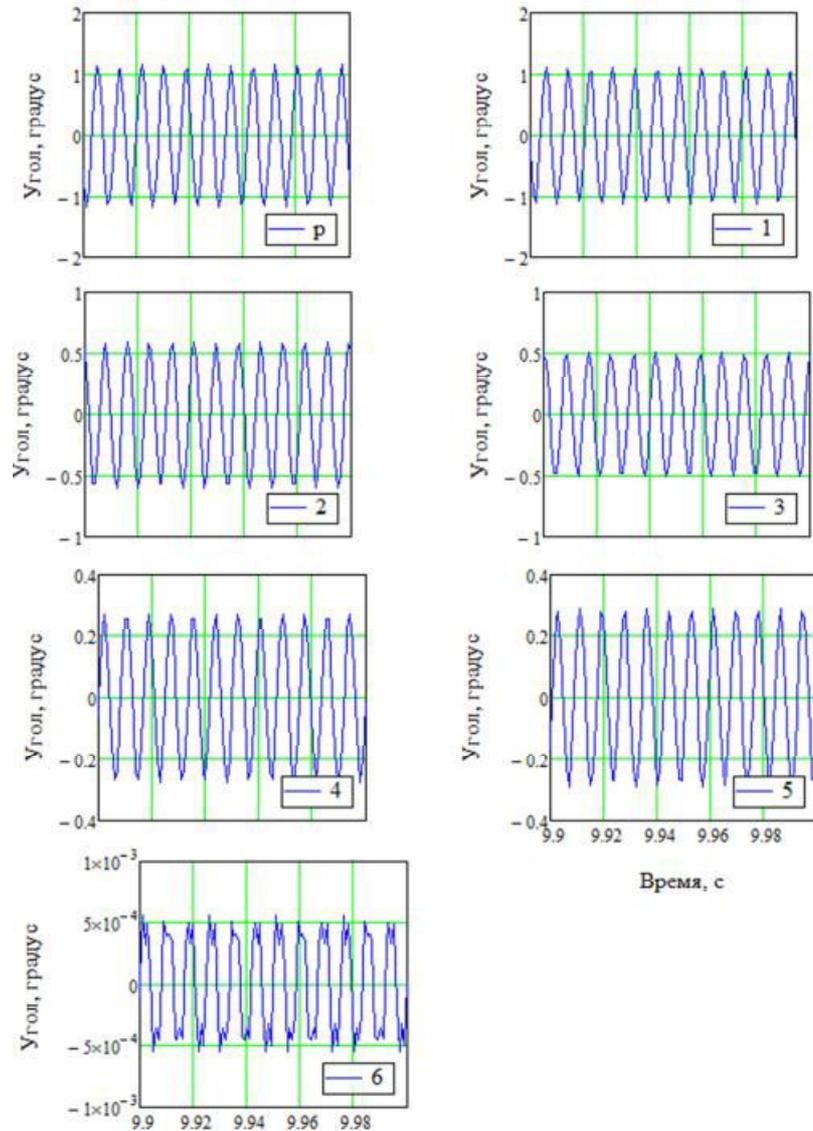
Отношение I_Q / I_P пропорционально корневому показателю колебательности, следовательно для оценки безразмерной величины коэффициента демпфирования I_ξ используем выражение

$$I_{\xi} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{I_Q}{I_P}\right)^2}}},$$

где I_Q – оценка диссипативной части энергии;
 I_P – оценка консервативной части энергии.

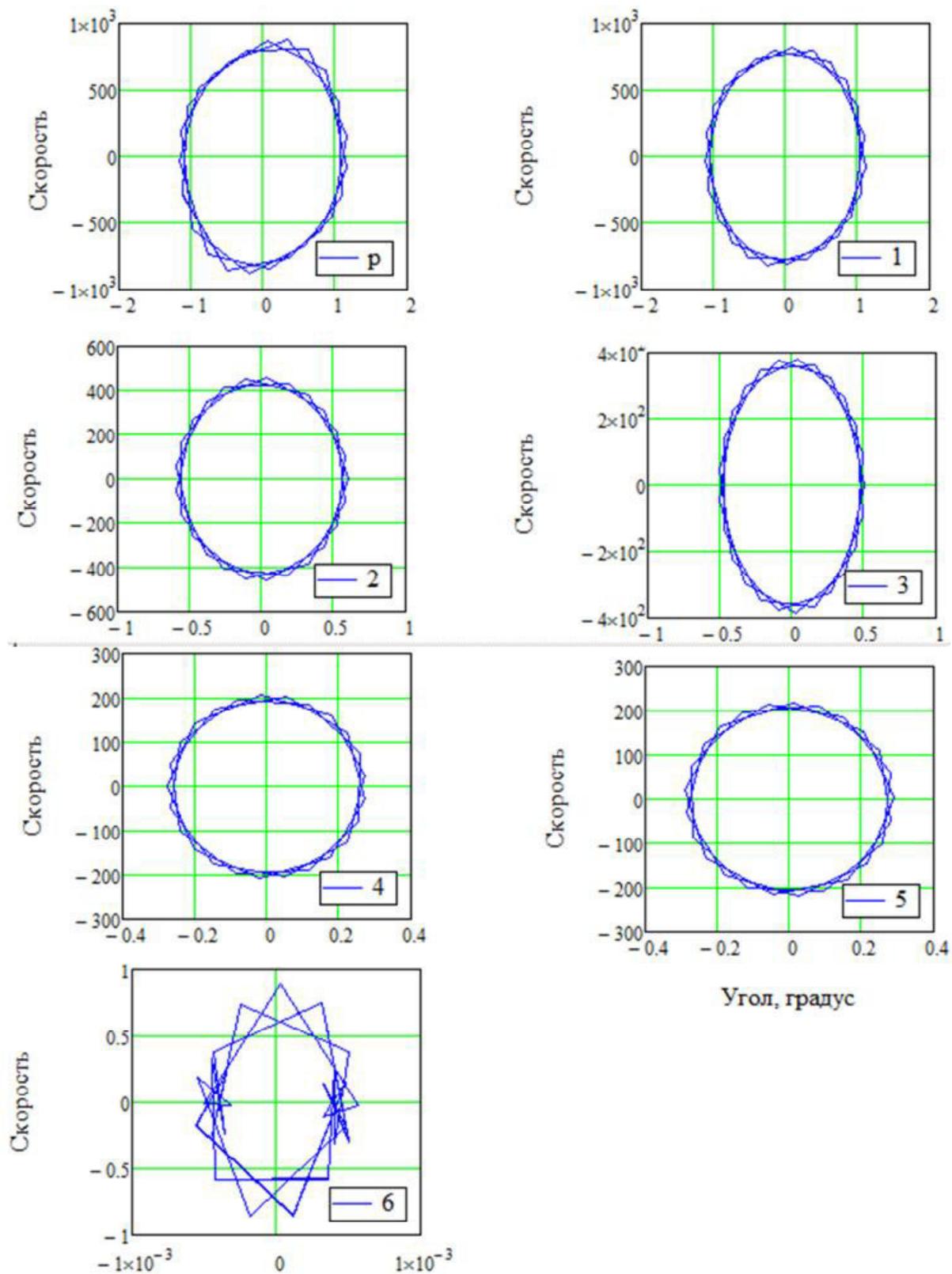
2.6 Результаты расчёта математической модели

В приложении 1 представлена программа, написанная в MathCAD 15, для расчёта математической модели численным методом интегрирования, оценки частотных и временных характеристик, а также оценки адекватности полученной модели. На рис. 2.2 – рис. 2.8 представлены результаты численного моделирования элементов кинематической схемы.



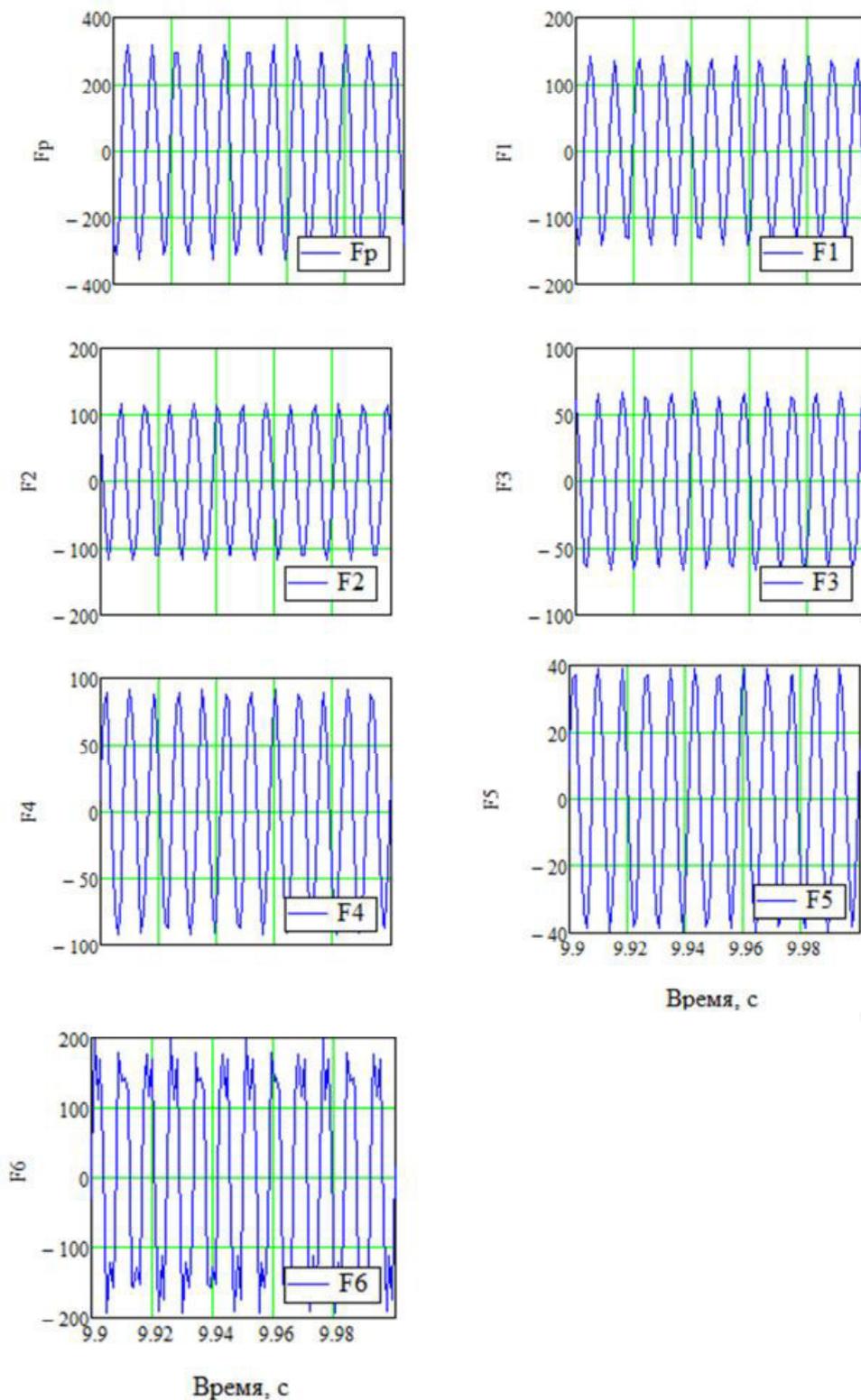
а – ротора двигателя; б – ведущей шестерни 1; в – ведомой шестерни 2;
г – ведущей шестерни 3; д – ведомой шестерни 4; е – рабочего органа 5;
ж – рабочего органа б

Рисунок 2.2 – Временные функции угловых смещений во времени



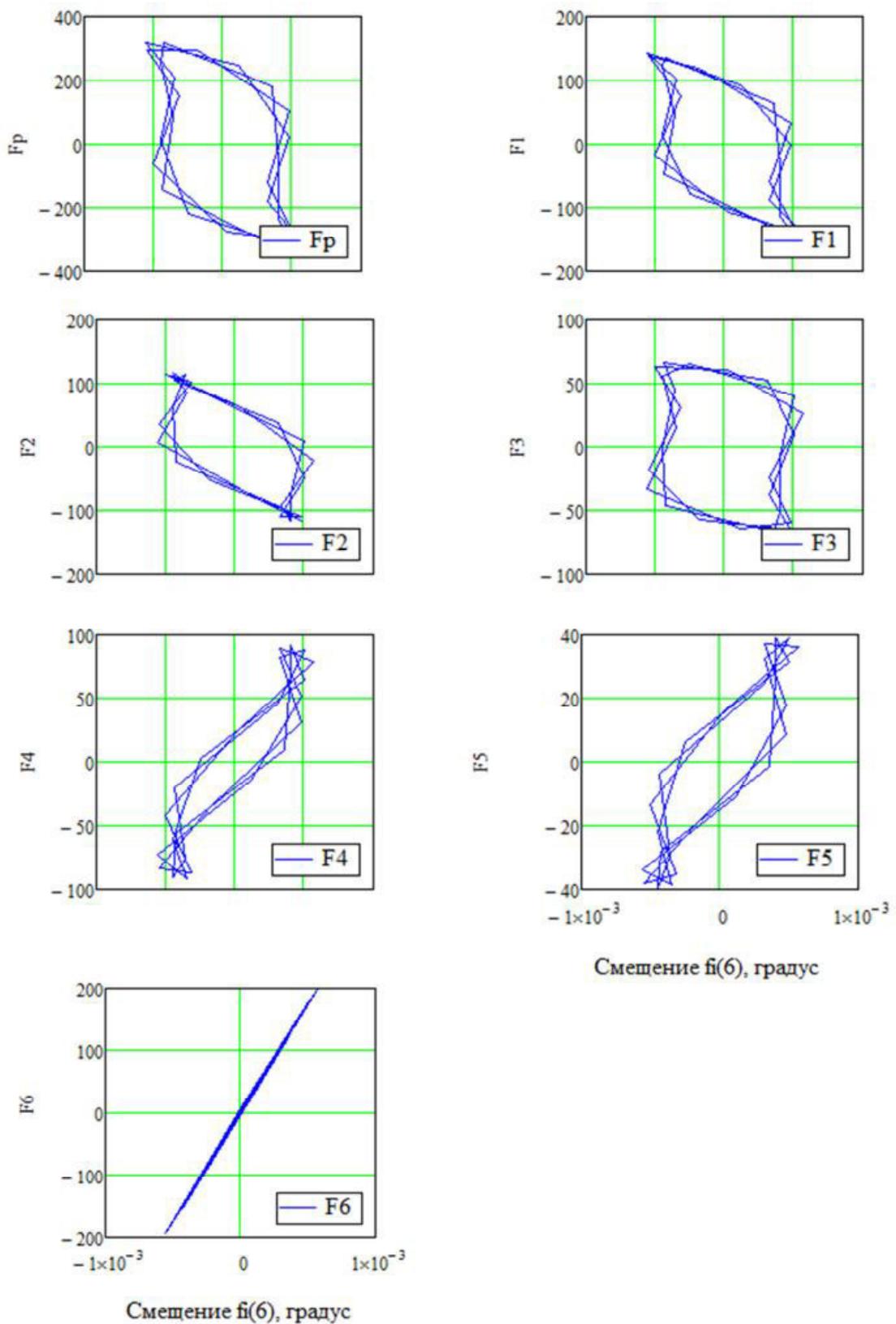
а – ротора двигателя; б – ведущей шестерни 1; в – ведомой шестерни 2;
 г – ведущей шестерни 3; д – ведомой шестерни 4; е – рабочего органа 5;
 ж – рабочего органа 6

Рисунок 2.3 – Фазовые траектории движения масс модели



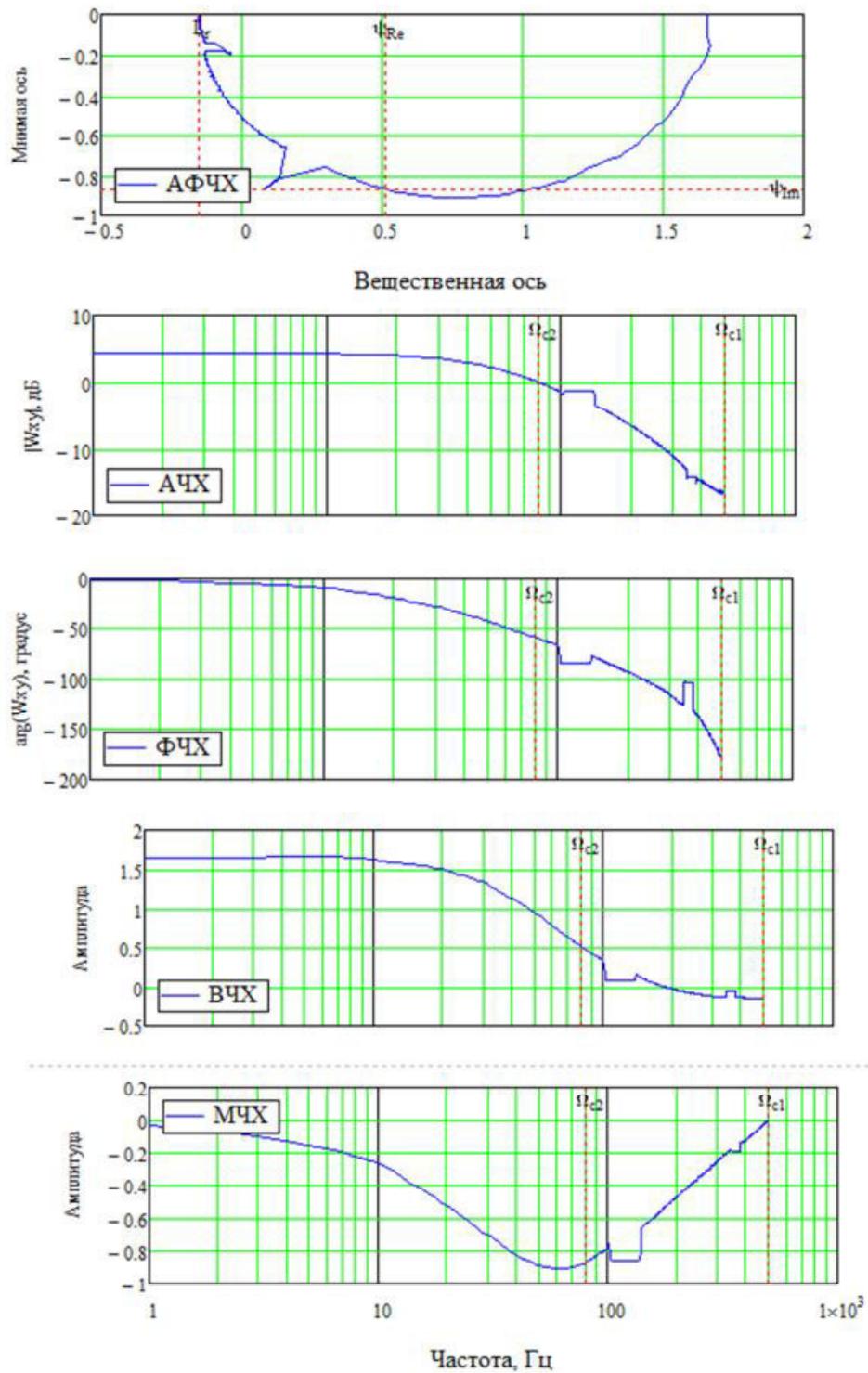
а – ротора двигателя; б – ведущей шестерни 1; в – ведомой шестерни 2;
 г – ведущей шестерни 3; д – ведомой шестерни 4; е – рабочего органа 5;
 ж – рабочего органа 6

Рисунок 2.4 – Временные характеристики внешнего воздействия и сил упруго-диссипативных связей



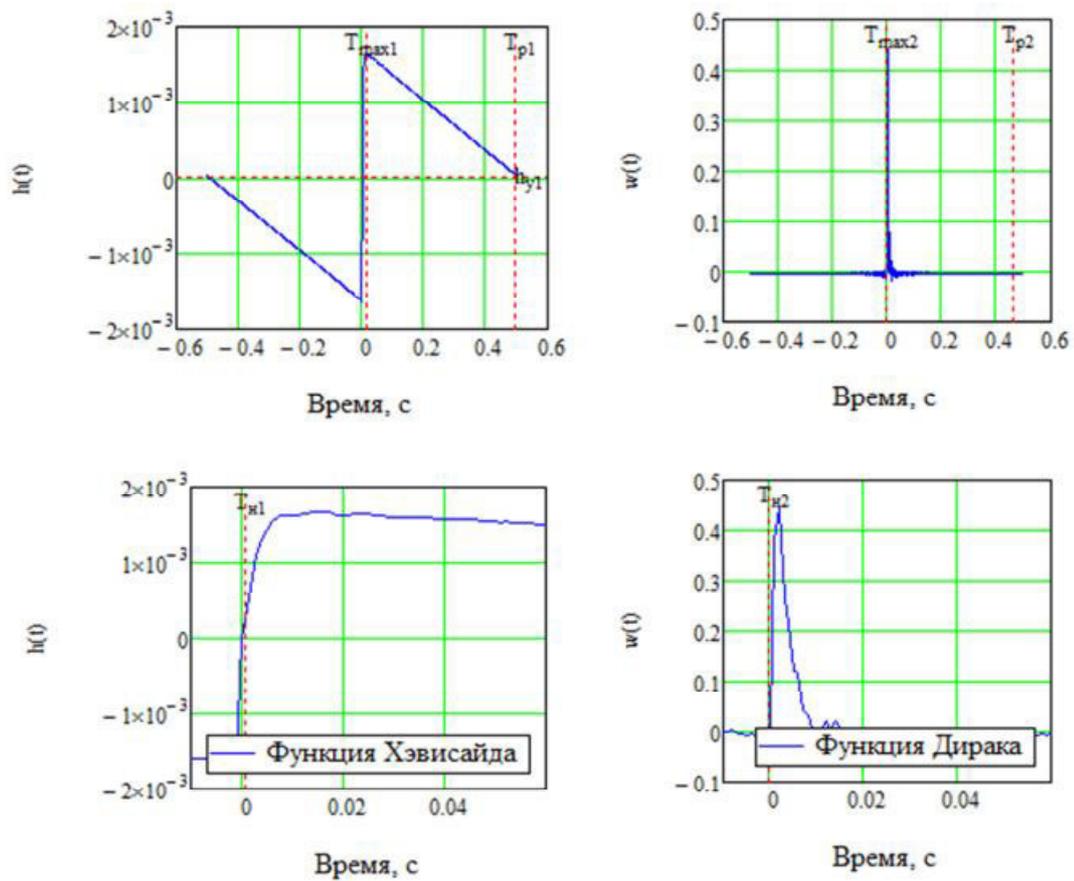
а – ротора двигателя; б – ведущей шестерни 1; в – ведомой шестерни 2;
 г – ведущей шестерни 3; д – ведомой шестерни 4; е – рабочего органа 5;
 ж – рабочего органа 6

Рисунок 2.5 – Петля гистерезисных потерь энергии



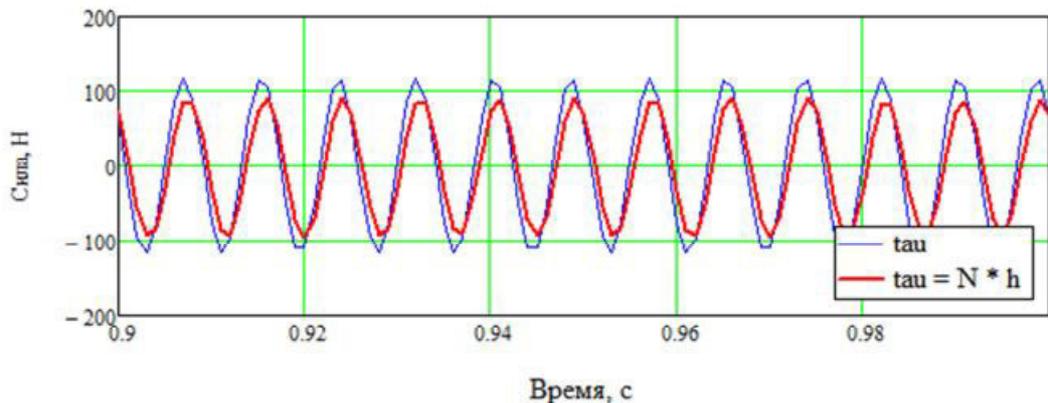
a – амплитудная фазовая частотная характеристика (АФЧХ); *б* – амплитудная частотная характеристика (АЧХ); *в* – фазовая частотная характеристика (ФЧХ); *г* – вещественная частотная характеристика (ВЧХ); *д* – мнимая частотная характеристика (МЧХ)

Рисунок 2.6 – Частотные характеристики периодogramмным методом Уэлча с использованием весового окна Гаусса, усреднении по времени



a – переходной функции Хэвисайда $h(t)$ – отклика объекта на единичную функцию включения $1(t)$; *б* – импульсной функции Дирака $w(t)$ – отклика объекта на импульсную ударную функцию $\delta(t) = 1'(t)$

Рисунок 2.7 – Временные характеристики системы



a – по расчёту; *б* – по вещественной частотной характеристике, то есть отклик $\tau(t)$ по заданному внешнему воздействию $N(t)$ и переходной функции Хэвисайда

Рисунок 2.8 – Вид переходного процесса

Модуль амплитудной фазовой частотной характеристики (рисунок 2.6, а) соответствует коэффициенту передачи объекта $W_{\tau N}(\omega)$ по амплитуде на каждой частоте гармонического колебания с частотой ω , т.е. $A_{\tau}(\omega) = W_{\tau N}(\omega) \cdot A_N(\omega)$, где $A_N(\omega)$ и $A_{\tau}(\omega)$ – амплитудные составляющие сил нормального воздействия и тангенциального смещения. Указанная харак-

теристика представлена на рисунке 2.6, б и измеряется в относительных единицах – децибелах. На амплитудной частотной характеристике идентифицируем эквивалентный коэффициент передачи +4 дБ, что соответствует указанному ранее статическому коэффициенту передачи 1,7.

Анализ фазовой частотной характеристики (рисунок 2.6, в) позволяет идентифицировать, что тангенциальные смещения шестерни 2 имеют задержку по времени, не превышающую критической величины сдвига фазы на -180° , т.е. в данном трибосопряжении инерционные силы фрикционного взаимодействия отсутствуют.

Согласно вещественной частотной характеристике (рисунок 2.6, г) зубчатое зацепление характеризуется потенциальной энергией в частотном диапазоне 0...20 Гц и незначительное кинетической энергией – в диапазоне частот 20...500 Гц.

По мнимой частотной характеристике (рисунок 2.6, д) фиксируем диапазон частот сил трения, обуславливающих сопротивление колебаниям, 0...500 Гц с максимумом на частоте 65 Гц.

Таблица 2.1 – Частотные характеристики зубчатого зацепления

Наименование характеристики	Значение
Статическое смещение	1,657
Показатель динамической колебательности М	1,005
Интегральная оценка упругих сил фрикционного взаимодействия	105,536
Интегральная оценка инерционных сил фрикционного взаимодействия	32,894
Интегральная оценка сил сопротивления колебаниям	198,956
Интегральная оценка сил трения, обусловленных фрикционными автоколебаниями	0
Эквивалентный динамический коэффициент демпфирования	1,437
Резонансная частота ω_p (рисунок 2.9 и рисунок 2.10), Гц	5,859
Резонансная амплитуда A_{max} (рисунок 2.10) вертикального смещения тяги б	1,674
Упруго-инерционная составляющая смещения на резонансной частоте ω_p	1,665
Диссипативная составляющая смещения вертикальной тяги б на резонансной частоте ω_p , мм	-0,175
Частота среза ω_{c2} по амплитуде (рисунок 2.9), Гц	500
Запас устойчивости по амплитуде, дБ	16,45
Амплитуда на частоте среза ω_{c2} по амплитуде, мм	0,15

Перейдём к рассмотрению временных характеристик объекта, представленных на рисунке 2.7. Переходная характеристика $h(t)$ объекта представлена на рисунке 2.7, а. Видно, что она имеет падающую характеристику к состоянию покоя с временем регулирования T_{p1} , соответствующего установившейся амплитуды переходной функции $h_{уст}$, не превышающей

заданной величины отклонения $\Delta = 5\%$ управляемой величины от установившегося значения; временем достижения максимальной амплитуды $T_{\max 1}$ и временем нарастания $T_{н1}$. Табличные характеристики переходной функции Хэвисайда представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Временные характеристики объекта при переходных динамических воздействиях

Наименование характеристики	Значение	
	$h(t)$	$w(t)$
Установившаяся амплитуда $h_{уст}$ и $w_{уст}$, рад	$4,011 \cdot 10^{-5}$	$-3,289 \cdot 10^{-3}$
Время нарастания t_n , мс	$10 \cdot 10^{-4}$	0
Время регулирования t_p , с	0,498	0,463
Перерегулирование σ , %	$4,065 \cdot 10^3$	$1,341 \cdot 10^3$
Период колебаний T_0 , с	-0,515	0,02
Частота собственных колебаний $\omega_0 = 1/T_0$, Гц	-1,942	50
Максимум функции h_{\max} и w_{\max} , рад	$1,671 \cdot 10^{-3}$	0,444
Декремент затухания δ	6,163	3,526
Добротность колебательного контура Q	0,51	3,836
Число полных колебаний n	1	16
Число колебаний, характеризующее период релаксации фрикционных связей	0,162	0,261
Период релаксации фрикционных связей, с	-0,084	$5,214 \cdot 10^{-3}$

Импульсная характеристика $w(t)$ представлена на рисунке 2.8, б и оценивается параметрами, представленными в таблице 2.2.

2.7 Оценка адекватности модели

Рисунок 2.8 характеризует соответствие отклика частотно-временной модели объекта $W_{\tau N}(i\omega)$, $h(t)$, $w(t)$ заданным временным функциям сил нормального воздействия $N(t)$ и тангенциального смещения $\tau(t)$. Оценим теперь адекватность полученной модели.

Во-первых, оценим среднюю квадратичную ошибку эксперимента

$$\sigma_{\tau} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |\tau_i - \tau_i^*|} = 31,197,$$

где τ – силы тангенциального смещения (3), вычисленные согласно дифференциальным уравнениям модели (1);

τ^* – силы тангенциального смещения, вычисленные с помощью интеграла Дюамеля (6) по значениям переходной функции $h(t)$.

Во-вторых, для оценки адекватности математической модели примем расчётное значение коэффициента детерминации.

Коэффициент детерминации R^2 – это доля дисперсии зависимой переменной, объясняемая рассматриваемой моделью зависимости, то есть объясняющими переменными. Более точно – это единица минус доля

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (\tau_i - \tau_i^*)^2}{\sum_{i=0}^{n-1} (\tau_i - \mu_\tau)^2} = 0,86,$$

где μ_τ – математическое ожидание случайной величины $\tau(t)$.

В данном случае коэффициент детерминации близок к 1, то частотно-временная модель соответствует расчётным данным.

Коэффициент множественной корреляции R характеризует меру тесноты связи между откликами, выражает точность прогноза зависимой переменной и показывает, на сколько процентов найденная функция регрессии описывает связь между исходными и расчётными значениями параметров:

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0,90} = 0,93.$$

Поскольку коэффициент детерминации имеет высокое значение, то можно говорить об адекватности математических моделей в пределах диапазона исходных данных.

Применим оценку адекватности по линейной регрессии с независимыми одинаково распределёнными нормальными случайными ошибками, для чего определим расчётное F_p и теоретическое F_T значения критерия Фишера.

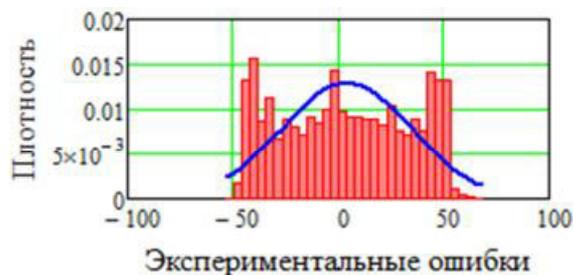


Рисунок 2.9 – Экспериментальная и теоретические плотности распределения ошибок модели

Примем статистический уровень значимости критерия $\alpha = 0,05$.

Расчётное значение критерия Фишера

$$F_p = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - p - 1}{p};$$

где R^2 – коэффициент детерминации;

n – количество значений расчётной функции, $n = 1024$;

p – количество независимых функций; величины силы тангенциального смещения τ (3) и τ^* (6).

$$F_p = \frac{0,86}{1 - 0,86} \cdot \frac{1024 - 2 - 1}{2} = 3097.$$

– табличное значение критерия Фишера $F_T(0,05; p-1; n-1) = 3,85$.

Так как расчётное значение критерия Фишера больше табличного, то коэффициент множественной корреляции R соответствует анализируемым данным и нулевая гипотеза адекватности модели принимается.

Математической мерой корреляции случайных величин служит линейный коэффициент корреляции Пирсона

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (\tau_i - \mu_\tau) \cdot (\tau_i^* - \mu_{\tau^*})}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (\tau_i - \mu_\tau)^2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (\tau_i^* - \mu_{\tau^*})^2}} = 0,94,$$

где μ_τ – математическое ожидание силы тангенциального смещения τ (3);

μ_{τ^*} – математическое ожидание той же величины, определённой по частотно-временной модели с применением интеграла Дюамеля (6).

Так как $r_{xy} \approx 1$, то наблюдается прямая функциональная связь, с увеличением $\tau(t)$ возрастает $\tau^*(t)$. Значимость линейного коэффициента корреляции проверяется на основе t-критерия Стьюдента. Для этого вычислим – расчётное значение критерия

$$t_p = \frac{r_{xy}}{\sqrt{1 - r_{xy}^2}} \cdot \sqrt{n - 2} = 99,7,$$

где n – количество значений расчётной функции, $n = 1024$.

– табличное значение критерия

$$t_\tau(1 - \alpha/2, n - 1) = 1,96.$$

Так как расчётное значение критерия Стьюдента больше табличного, то значения сил τ (3) и τ^* (6) соответствуют друг другу, и нулевая гипотеза адекватности модели принимается.

В данном случае ошибка математической модели 1,7 % меньше допустимой величины 6 %; рассчитанные критерии Фишера и Стьюдента выше, чем табличные, то объяснённая дисперсия ошибок математических моделей существенно больше, чем необъяснённая, и модели можно считать статистически значимыми.

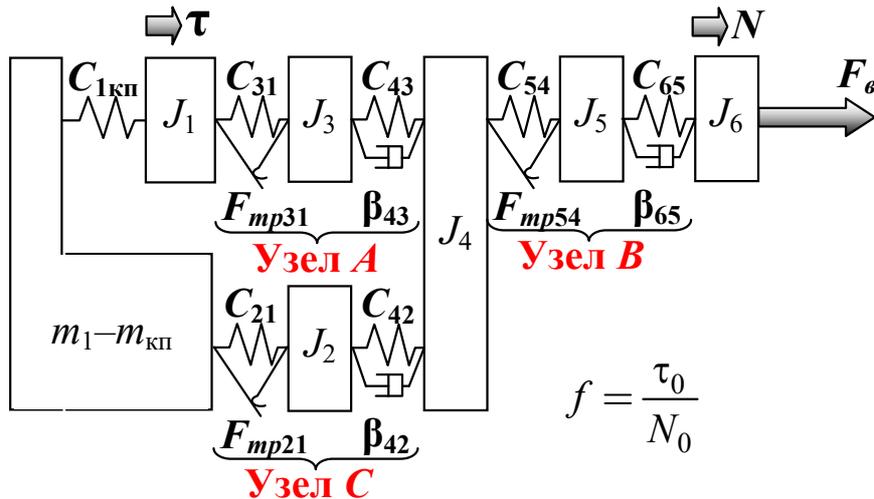


Рис. 1 - Кинематическая схема объекта с фрикционными узлами трения А, В и С

Техническое задание: исследовать демпфирующие характеристики объекта, если безразмерный коэффициент демпфирования узлов А, В и С $\xi := 0.1$. Оценить частотные и временные критерии качества и проверить адекватность модели.

Дополнительные исходные параметры

$g := 9.80665$	м/с ² - Ускорение свободного падения
$\Gamma_p := \frac{180}{\pi}$	Размерность одного радиана
$\Delta_B := 0.0065$	м - Эксцентриситет приложения вертикальной силы
$r_k := 0.081$	м - Радиус полукольцевой пружины 1
$r_C := 0.025$	м - Радиус внешнего кольца 2, запрессовываемого в корпус объекта
$r_A := 0.006$	м - Радиус кольца 3, запрессовываемого в ось крепления полукольцевой пружины
$r_B := 0.015$	м - Радиус кольца 5, запрессовываемого в ось крепления вертикальной тяги
$b := 0.03$	м - Ширина колец
$Q_0 := 100$	Па ($Q_0 \cdot \frac{0.001}{g \cdot 0.01^2} = 102 \text{ т/см}^2$) - Контактное давление колец
$f := 0.1$	Коэффициент трения скольжения валов по внутренней поверхности колец вращательных пар

Дополнительные исходные параметры

Массы

$m_{кп} := 2$	кг - Масса полукольцевой пружины 1
$m_2 := 0.5$	кг - Масса кольцевой втулки 2 (ось С)
$m_3 := 0.2$	кг - Масса кольцевой втулки 3 (ось А)
$m_4 := 1.5$	кг - Масса вала-эксцентрика 4
$m_5 := 1$	кг - Масса кольцевой втулки 5 (ось В)
$m_6 := 3$	кг - Масса вертикальной тяги 6

Массы

Жёсткости

$$C_{кп} := 5 \cdot 10^7$$

Жёсткость полукольцевой пружины 1, Н/м ($\frac{g \cdot 1000}{C_{кп}} = 1.96 \times 10^{-4}$ мм/кг)

$$C_2 := 2 \cdot 10^7$$

Жёсткость кольца 2, Н/м ($\frac{g \cdot 1000}{C_2} = 4.9 \times 10^{-4}$ мм/кг)

$$C_3 := 1.5 \cdot 10^7$$

Жёсткость кольца 3, Н/м ($\frac{g \cdot 1000}{C_3} = 6.54 \times 10^{-4}$ мм/кг)

$$C_4 := 130 \cdot 10^7$$

Угловая жёсткость вала-эксцентрика 4, Н/рад ($\frac{g \cdot \Gamma p \cdot r_C}{C_4 \cdot 0.001} = 1.08 \times 10^{-5}$ градус/кг)

$$C_{4к} := 4 \cdot 10^7$$

Жёсткость консоли вала-эксцентрика 4, Н/м ($\frac{g \cdot 1000}{C_{4к}} = 2.45 \times 10^{-4}$ мм/кг)

$$C_5 := 6 \cdot 10^7$$

Жёсткость кольца 5, Н/м ($\frac{g \cdot 1000}{C_5} = 1.63 \times 10^{-4}$ мм/кг)

$$C_6 := 3.922 \cdot 10^7$$

Жёсткость вертикальной тяги 6, Н/м ($\frac{g \cdot 1000}{C_6} = 2.5 \times 10^{-4}$ мм/кг)

$$C_{п} := 0.4 \cdot 10^7$$

Жёсткость покрытия (жёлтый цвет), Н/м ($\frac{g \cdot 1000}{C_{п}} = 2.45 \times 10^{-3}$ мм/кг)

$$C_{\varphi} := 1850$$

Жёсткость вертикальной тяги, Н/м

Жёсткости

Расчётные моменты инерции, кг·м²

$$J_1 := m_{кп} \cdot r_k^2$$

$$J_2 := m_2 \cdot r_C^2$$

$$J_3 := m_3 \cdot r_A^2$$

$$J_4 := m_4 \cdot r_C^2$$

$$J_5 := m_5 \cdot r_B^2$$

$$r_6(\varphi) := \Delta_B \cdot \cos(\varphi)$$

$$J_6(\varphi) := m_6 \cdot r_6(\varphi) \cdot r_B$$

Расчётные моменты инерции, кг·м²

Расчётные коэффициенты угловой упругости, Н·м/рад

$$C_{1кп} := C_{кп} \cdot r_k^2$$

$$C_{21} := C_2 \cdot r_C^2$$

$$C_{42} := \frac{C_4 \cdot C_{\Pi} \cdot r_C^2}{C_4 + C_{\Pi} \cdot r_C^2}$$

$$C_{31} := C_3 \cdot r_A^2$$

$$C_{43} := \frac{C_{4к} \cdot C_{\Pi}}{C_{4к} + C_{\Pi}} \cdot r_A^2$$

$$C_{54} := C_5 \cdot r_B^2$$

$$C_{65}(\varphi) := \frac{C_6 \cdot C_{\Pi}}{C_6 + C_{\Pi}} \cdot r_B \cdot r_6(\varphi)$$

▲ Расчётные коэффициенты угловой упругости, Н·м/рад

$\xi := 0.1$

Коэффициент демпфирования покрытия с требуемыми трибологическими характеристиками

Функции возмущения:

$y_0 := 0.0005$

м - Амплитуда внешнего смещения

$y_1 := y_0 \cdot 0$

м - Амплитуда третьей гармоники внешнего смещения

$\omega := 4$

Гц - Частота внешнего воздействия

$type := 7$

Тип весовой функции окна для сглаживания спектральных характеристик

$n_{seg_dividend} := 4.5$

0 - прямоугольное весовое окно (0...1);

$n_{shift_multiplier} := 0.5$

1 - коническое прямоугольное весовое окно;

$a_{0_costaper} := 0$

2 - треугольное весовое окно;

$a_{7_gaussian} := 2.7$

3 - весовое (сглаживающее) окно Хэмминга;

$b_{8_kaiser} := 4.7$

4 - весовое (сглаживающее) окно Ханна;

$b_{9_cheby} := 50$

5 - весовое (сглаживающее) окно Наталла;

6 - весовое (сглаживающее) окно Блэкмана;

7 - весовое (сглаживающее) окно Гаусса (2...20);

8 - весовое (сглаживающее) окно Кайзера (2...20);

9 - весовое (сглаживающее) окно Чебышева (50...).

$B := 3$

Количество диапазонов частоты на одну октаву (1, 3, 12 или 24)

**ПРЕДЕЛЬНО-ДОПУСТИМЫЕ УРОВНИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН (ОПОРНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ)
для оценки качества системы**

J _{кр} :=	"Макс. доп. величина стационарного коэф. трения Γ"	0.0535
	"Мин. доп. запас устойчивости по амплитуде L"	15
	"Мин. доп. запас устойчивости по фазе ψ"	60
	"Макс. доп. частотный показатель колебательности M"	2.376
	"Макс. доп. частота по условию A(ω) = A(0), Гц"	470
	"Мин. доп. частота по условию A(ω) = 0.707A(0), Гц"	490
	"Мин. доп. резонансная частота A[ω(p)] = A _{max} , Гц"	190
	"Макс. доп. квадр. интегр. критерий качества Γ"	5.4 · 10 ⁻⁵
	"Макс. доп. квадр. интегр. критерий качества Γ"	3
	"Макс. доп. интегр. оценка упруго-инерционных сил I(c)"	0.055
	"Макс. доп. интегр. оценка инерционных сил I(m)"	0.033
	"Макс. доп. интегр. оценка сил трения I(сопр.)"	0.055
	"Макс. доп. оценка сил фрикционных автоколебаний I(фр.к)"	0.01
	"Мин. доп. оценка динамич. коэф. демпфирования I(γ)"	0.7
	"Макс. доп. время запаздывания t(z), с"	0.0009
	"Макс. доп. мин. время нарастания t(n.min), с"	0.0013
	"Макс. доп. макс. время нарастания t(n.max), с"	0.0043
	"Макс. доп. время регулирования t(p), с"	0.029
	"Макс. доп. время установившегося значения h[t(max)], с"	0.05
	"Макс. доп. перерегулирование σ, %"	30
	"Макс. доп. добротность Q"	10.5
	"Мин. доп. коэф. демпфирования ξ"	0.95
	"Макс. доп. число колебаний регулируемой величины N"	3
	"Макс. доп. линейный интегральный критерий качества I(1)"	1.5 · 10 ⁻⁴
	"Макс. доп. линейный интегральный критерий качества I(2)"	4.8 · 10 ⁻⁴

Параметры интегрирования:

$$\text{sgn}(x) := \frac{x}{\sqrt{x^2 + 0.00001}}$$

$$z := -0.1, -0.09 .. 0.1$$

$$t_{\text{start}} := 0$$

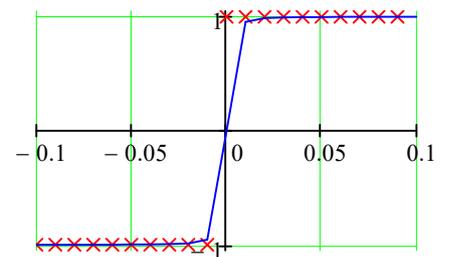
$$t_{\text{end}} := 60$$

$$n_{\text{iter}} := 60000$$

$$n_{\text{start}} := \text{round}(0.98333 \cdot n_{\text{iter}}) = 59000$$

$$\Delta t := \frac{t_{\text{end}} - t_{\text{start}}}{n_{\text{iter}}} = 0.001 \quad \text{Период дискретизации, с}$$

$$\Omega_{\text{max}} := \frac{1}{\Delta t} = 1000 \quad \text{Частота дискретизации, Гц}$$



Скорость

Расчётные коэффициенты сопротивления, Н·м·с/рад

$$\beta_{42} := \xi \cdot \sqrt{4 \cdot J_4 \cdot C_{42}}$$

$$\beta_{43} := \xi \cdot \sqrt{4 \cdot J_4 \cdot C_{43}}$$

$$\beta_{65}(\varphi) := \xi \cdot \sqrt{4 \cdot J_6(\varphi) \cdot C_{65}(\varphi)}$$

Расчётные коэффициенты сопротивления, Н·м·с/рад

☐ Расчётные силы трения

$$S_2 := 2 \cdot \pi \cdot r_C \cdot b$$

Контактная площадь колец

$$S_3 := 2 \cdot \pi \cdot r_A \cdot b$$

$$S_5 := 2 \cdot \pi \cdot r_B \cdot b$$

$$F_{тр21} := f \cdot \frac{Q_0}{S_2}$$

Сила трения, действующая в контакте колец

$$F_{тр31} := f \cdot \frac{Q_0}{S_3}$$

$$F_{тр54} := f \cdot \frac{Q_0}{S_5}$$

Функция внешней нагрузки на объект

$$\zeta_0(t) := y_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \omega \cdot t) + y_1 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot \omega \cdot t)$$

Функция внешнего воздействия на модель

```

FB(t) :=
  φ ← asin( (ζ0(t) / ΔB) )
  dφ ← ( d/dt ζ0(t) ) / ( ΔB · √( 1 - (ζ0(t) / ΔB)2 ) )
  k ← ( rk + (rA + rC) · f · sign(φ · dφ) ) / ( ΔB · cos(φ) - (rC + rB) · f · sign(φ · dφ) )
  u ← [ ΔB · cos(φ) - (rC + rB) · f ] > 0
  x ← round(t, 5)
  y ← round( (Cφ · φ) / (1000 · g), 4 )
  z ← round( (k · Cφ · φ) / (1000 · g), 4 )
  s ← "Время = {0}; alfa = {1}; k = {2}; Работоспособность = {3}; Нагрузка = {4} т; Сила = {5} т"
  trace(s, x, round(φ · Γp, 4), round(k, 4), u, y, z)
  pause("Условие работоспособности не выполнено!") if u ≠ 1
  return k · Cφ · φ
    
```

☐ Расчётные силы трения

☐ Дифференциальные уравнения

Начальные условия:

$$\mathbf{s} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) := \begin{bmatrix} s_6 \\ s_7 \\ s_8 \\ s_9 \\ s_{10} \\ s_{11} \\ \frac{1}{J_1} \cdot [\mathbf{F}_{\text{тp31}} \cdot r_A \cdot \text{sgn}(s_8 - s_6) - C_{1\text{кп}} \cdot s_0 + C_{31} \cdot (s_2 - s_0)] \\ \frac{1}{J_2} \cdot [-\mathbf{F}_{\text{тp21}} \cdot r_C \cdot \text{sgn}(s_7) + \beta_{42} \cdot (s_9 - s_7) - C_{21} \cdot s_1 + C_{42} \cdot (s_3 - s_1)] \\ \frac{1}{J_3} \cdot \left[-\mathbf{F}_{\text{тp31}} \cdot r_A \cdot \text{sgn}(s_8 - s_6) + \beta_{43} \cdot (s_9 - s_8) \dots \right. \\ \left. + -C_{31} \cdot (s_2 - s_0) + C_{43} \cdot (s_3 - s_2) \right] \\ \frac{1}{J_4} \cdot \left[-\beta_{42} \cdot (s_9 - s_7) - \beta_{43} \cdot (s_9 - s_8) + \mathbf{F}_{\text{тp54}} \cdot r_B \cdot \text{sgn}(s_{10} - s_9) \dots \right. \\ \left. + -C_{42} \cdot (s_3 - s_1) - C_{43} \cdot (s_3 - s_2) + C_{54} \cdot (s_4 - s_3) \right] \\ \frac{1}{J_5} \cdot \left[-\mathbf{F}_{\text{тp54}} \cdot r_B \cdot \text{sgn}(s_{10} - s_9) + \beta_{65}(s_5) \cdot (s_{11} - s_{10}) \dots \right. \\ \left. + -C_{54} \cdot (s_4 - s_3) + C_{65}(s_5) \cdot (s_5 - s_4) \right] \\ \frac{1}{J_6(s_5)} \cdot \left[-\beta_{65}(s_5) \cdot (s_{11} - s_{10}) - C_{65}(s_5) \cdot (s_5 - s_4) + \mathbf{F}_B(\mathbf{t}) \cdot r_6(s_5) \right] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} := \text{Radau}(\mathbf{s}, \mathbf{t}_{\text{start}}, \mathbf{t}_{\text{end}}, \mathbf{n}_{\text{iter}}, \mathbf{D})$$

$$\mathbf{X} := \text{submatrix}(\mathbf{X}, \mathbf{n}_{\text{start}}, \mathbf{n}_{\text{iter}}, 0, 12)$$

$$\mathbf{T} := \mathbf{X}^{\langle 0 \rangle}$$

- временной интервал;

$$\varphi_{\text{кп}} := \mathbf{X}^{\langle 1 \rangle}$$

$$\varphi_2 := \mathbf{X}^{\langle 2 \rangle}$$

- перемещения масс, м;

$$\varphi_3 := \mathbf{X}^{\langle 3 \rangle}$$

$$\varphi_4 := \mathbf{X}^{\langle 4 \rangle}$$

$$\varphi_5 := \mathbf{X}^{\langle 5 \rangle}$$

$$\varphi_6 := \mathbf{X}^{\langle 6 \rangle}$$

$$d\varphi_{\text{кп}} := \mathbf{X}^{\langle 7 \rangle}$$

$$d\varphi_2 := \mathbf{X}^{\langle 8 \rangle}$$

- скорости перемещения масс, м/с.

$$d\varphi_3 := \mathbf{X}^{\langle 9 \rangle}$$

$$d\varphi_4 := \mathbf{X}^{\langle 10 \rangle}$$

$$d\varphi_5 := \mathbf{X}^{\langle 11 \rangle}$$

$$d\varphi_6 := \mathbf{X}^{\langle 12 \rangle}$$

$$s_B := \zeta_0(\mathbf{T}) \cdot \frac{r_k}{\Delta_B}$$

- вертикальное смещение тяги, мм

Силы, возникающие в элементах конструкции

$$\mathbf{i} := 0 .. \mathbf{n}_{\text{iter}} - \mathbf{n}_{\text{start}}$$

$$\mathbf{F}_C := \frac{1}{r_C} \cdot (\mathbf{F}_{\text{тp21}} \cdot r_C \cdot \text{sgn}(d\varphi_2) + C_{21} \cdot \varphi_2)$$

$$\mathbf{F}_A := \frac{1}{r_A} \cdot [\mathbf{F}_{\text{тp31}} \cdot r_A \cdot \text{sgn}(d\varphi_3 - d\varphi_{\text{кп}}) + C_{31} \cdot (\varphi_3 - \varphi_{\text{кп}})]$$

$$F_B := \frac{1}{r_B} \cdot [F_{Tp54} \cdot r_B \cdot \text{sgn}(d\varphi_5 - d\varphi_4) + C_{54} \cdot (\varphi_5 - \varphi_4)]$$

$$N_i := F_B(T_i)$$

Сила входного воздействия на объект

$$\tau := F_A$$

Сила тангенциального смещения

$$N_{\max} := \max(N) = 4828.8$$

Максимальная нормальная сила, Н

$$\tau_{\max} := \max(\tau) = 295.4$$

Максимальная тангенциальная сила, Н

$$\sigma_N := \text{stdev}(N) = 2465.5$$

Среднее квадратичное отклонение нагрузки, Н

$$\sigma_F := \text{stdev}(\tau) = 143.3$$

Среднее квадратичное отклонение силы воздействия, Н

Коэффициент трения во вращательных парах трения

$$f_{A_i} := \text{if} \left(\left| \frac{F_{A_i}}{N_i} \right| > 1, \text{NaN}, \left| \frac{F_{A_i}}{N_i} \right| \right)$$

$$f_{B_i} := \text{if} \left(\left| \frac{F_{B_i}}{N_i} \right| > 1, \text{NaN}, \left| \frac{F_{B_i}}{N_i} \right| \right)$$

$$f_{C_i} := \text{if} \left(\left| \frac{F_{C_i}}{N_i} \right| > 1, \text{NaN}, \left| \frac{F_{C_i}}{N_i} \right| \right)$$

Функция возвращает математическое ожидание вектора, если данные содержат нечисловые данные

$$N\text{mean}(M) := \begin{cases} \text{newM} \leftarrow M^{(0)} & N\text{mean}(f_A) = 0.063 \\ \text{for } i \in 1 \dots \text{cols}(M) - 1 & \text{if } \text{cols}(M) > 1 \\ \quad \text{newM} \leftarrow \text{stack}(\text{newM}, M^{(i)}) & N\text{mean}(f_B) = 0.429 \\ \text{newM} \leftarrow \text{filterNaN}(\text{newM}) & N\text{mean}(f_C) = 0.258 \\ \text{mean}(\text{newM}) \end{cases}$$

Следующая функция возвращает сглаженную версию данных, сгенерированную экспоненциальным сглаживанием с весом α .

```

filt(fx) := | x ← expsmooth(filterNaN(fx), 0.25)   f1A := filt(fA)   mA := Nmean(f1A) = 0.063
| id ← matchNaN(fx)   f1B := filt(fB)   mB := Nmean(f1B) = 0.428
| m ← длина(id)   f1C := filt(fC)   mC := Nmean(f1C) = 0.257
| n ← длина(fx)
| k ← -1
| for i ∈ 0 .. n - 1
| | l ← 1
| | for j ∈ 0 .. m - 1
| | | if i = idj
| | | | l ← 0
| | | | break
| | | yi ← 0 if l = 0
| | otherwise
| | | k ← k + 1
| | | yi ← xk
| return markNaN(y, id)
    
```

▣ Дифференциальные уравнения

▣ Частотные характеристики методом усреднённых по времени периодограмм

Периодограмма определяется выражением:

$$P_{xx}(e^{i\omega}) = \frac{S_{xx}(e^{i\omega})}{FU}; \quad P_{xx}(e^{i\omega}) = \frac{1}{F} \cdot \frac{\left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (w_k \cdot x_k \cdot e^{-i \cdot k \cdot \omega}) \right]^2}{\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (|w_k|)^2},$$

где F - единица частоты оцифрованного сигнала, по умолчанию 2π ;

- U - энергия дискретно-временного окна.
- S_{xx} - квадрат амплитудных гармоник БПФ;
- w_k - отсчёты весовой функции окна.

Периодограмма двух векторов данных определяется выражением:

$$P_{xy}(e^{i\omega}) = \frac{1}{F} \cdot \frac{\left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left[(w_k \cdot x_k \cdot e^{-i \cdot k \cdot \omega}) \cdot (w_k \cdot \overline{y_k} \cdot e^{-i \cdot k \cdot \omega}) \right] \right]}{\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (|w_k|)^2},$$

где $\overline{y_k}$ - комплексно-сопряжённый отсчёт вектора u.

Периодограмма не является состоятельной оценкой спектральной плотности мощности, поскольку дисперсия такой оценки сравнима с квадратом её математического ожидания. С ростом числа используемых отсчётов данных значения периодограммы начинают всё быстрее флуктуировать.

Создадим вспомогательную функцию для вычисления вектора частот,

где τ - интервал отсчётов в секундах;

n - количество частотных гармоник преобразования;

r = 1 - признак действительно-значных данных для преобразования.

```

freqz( $\tau$ , n, r) :=
  freq_res  $\leftarrow$   $\frac{1}{\tau \cdot n}$ 
  for i  $\in$  0..n-1
    wi  $\leftarrow$  freq_res · i

  Nyq  $\leftarrow$   $\frac{0.5}{\tau}$ 
  if mod(n, 2)  $\neq$  0
    half_res  $\leftarrow$  0.5 · freq_res
    halfNPTS  $\leftarrow$  0.5 · (n + 1)
    whalfNPTS-1  $\leftarrow$  Nyq - half_res
    whalfNPTS  $\leftarrow$  Nyq + half_res
  otherwise
    halfNPTS  $\leftarrow$  0.5 · n + 1
    whalfNPTS-1  $\leftarrow$  Nyq

  wn-1  $\leftarrow$   $\frac{1}{\tau}$  - freq_res
  n  $\leftarrow$  halfNPTS if r = 1
  for i  $\in$  0..n-1
    Wi  $\leftarrow$  wi
  return W

```

Вычисление спектральной плотности мощности путем вычисления усреднённой периодограммы Уэлча

Уэлч (Welch) внёс в метод Бартлетта два усовершенствования: использование весовой функции и разбиение на перекрывающиеся фрагменты. Применение весовой функции позволяет ослабить растекание спектра и уменьшить смещение получаемой оценки спектра плотности мощности ценой незначительного ухудшения разрешающей способности. Перекрытие сегментов введено для того, чтобы увеличить их число и уменьшить дисперсию оценки.

Итак, вычисления при использовании метода Уэлча (метода усреднения модифицированных периодограмм) организуется следующим образом.

1) Вектор отсчётов сигнала делится на перекрывающиеся сегменты. Как правило, на практике используется перекрытие на 50 % или 75 %. Строго говоря, оптимальная степень перекрытия зависит от используемой весовой функции. Например, для гауссовских случайных процессов при использовании окна Ханна минимальная дисперсия оценки спектра плотности мощности получается при перекрытии сегментов на 65 %.

2) Каждый сегмент умножается на используемую весовую функцию.

3) Для взвешенных сегментов вычисляются модифицированные периодограммы.

4) Периодограммы всех сегментов усредняются.

Также как и для периодограммы Бартлетта, дисперсия оценки, получаемая методом Уэлча, уменьшается примерно пропорционально числу сегментов. Благодаря перекрытию в методе Уэлча используется больше сегментов, поэтому дисперсия оценки спектра плотности мощности оказывается меньше, чем для метода Бартлетта.

Метод Уэлча является наиболее популярным периодограммным методом спектрального анализа.

Создадим функцию для вычисления периодограммы,

где \mathbf{x} - анализируемый вектор данных (выход);

\mathbf{y} - анализируемый вектор данных (вход);

\mathbf{w} - весовое окно;

n - число частот для вычисления спектральной плотности мощности;

$nseg$ - число отсчетов на сегмент;

$nshift$ - число отсчетов, соответствующее сдвигу между сегментами;

τ - интервал отсчётов в секундах.

```

welch(x, y, w, npsd, nseg, nshift,  $\tau$ ) :=
  nx  $\leftarrow$  длина(x)
   $\tau \leftarrow \frac{1}{2 \cdot \pi}$  if  $\tau \leq 0$ 
  if nseg < 1
    | nseg  $\leftarrow$  floor( $\frac{nx}{4.5}$ ) if nshift < 0
    | nseg  $\leftarrow$  floor( $\frac{nx + 7 \cdot nshift}{8}$ ) otherwise
  nshift  $\leftarrow$  floor(0.5 · nseg) if nshift < 0
  npsd  $\leftarrow$  max( $256, 2^{\left(\frac{\text{floor}(\frac{\log(nseg-1)}{\log(2)} + 1)\right)}$ ) if npsd < 256
  r  $\leftarrow$  0
  if npsd = 2  $\left(\frac{\text{floor}(\frac{\log(npsd)}{\log(2)})}{\log(2)}\right) \wedge nseg \leq npsd \wedge nshift < nseg$ 
    | lmo  $\leftarrow$  nseg - nshift
    | ns  $\leftarrow$  max( $1, \text{floor}\left(\frac{nx - nshift}{lmo}\right)$ ) if lmo > 0
    | ns  $\leftarrow$  1 otherwise
    | for j  $\in$  0 .. npsd - 1
      | Sj  $\leftarrow$  0
      | for k  $\in$  1 .. ns
        | for j  $\in$  0 .. nseg - 1
          | idx  $\leftarrow$  j + (k - 1) · lmo
          | if idx < nx
            | | xwj  $\leftarrow$  xidx · wj
            | | ywj  $\leftarrow$  yidx · wj
            | | r  $\leftarrow$  Im(xidx) = 0 if r = 0
            | otherwise
            | | xwj  $\leftarrow$  0
            | | ywj  $\leftarrow$  0
          | for j  $\in$  nseg .. npsd - 1
            | | xwj  $\leftarrow$  0
            | | ywj  $\leftarrow$  0
          | X  $\leftarrow$  CFFT(xw)
          | Y  $\leftarrow$  CFFT(yw)
          | for j  $\in$  0 .. npsd - 1
            | Sj  $\leftarrow$  Sj + Xj ·  $\overline{Y_j}$ 

```

```

scale ←  $\frac{\tau \cdot \text{npsd}^2}{\text{ns} \cdot w \cdot w}$ 
if r = 1
    halfNPTS ← 0.5 · npsd + 1 if mod(npsd, 2) ≠ 0
    halfNPTS ← 0.5 · npsd + 1 otherwise
    for i ∈ 0 .. halfNPTS - 1
        Pi ← 2 · scale · Si
    P0 ← 0.5 · P0
    PhalfNPTS-1 ← 0.5 · PhalfNPTS-1 if mod(npsd, 2) = 0
    for i ∈ 0 .. npsd - 1 otherwise
        Pi ← scale · Si
W ← freqz(τ, npsd, r)
return augment(W, P)

```

Функция для проверки и усечения количества обрабатываемых при спектральном анализе данных

```

Xfloor2(data) := | m ← длина(data)
                   | k ← 2
                   |   floor( $\frac{\log(m-1)}{\log(2)}$ ) + 1
                   | for i ∈ 0 .. m - 1
                   |   yi ← datai
                   | for i ∈ m .. k - 1
                   |   yi ← 0
                   | return y

```

ВЫЧИСЛЕНИЯ

x := X_{floor2}(N) Входной сигнал (усилие в вертикальной тяге, Н)

y := X_{floor2}(τ) Выходной сигнал (усилие в полукольцевой пружине, Н)

n := длина(x) - общее количество данных;

nseg := | z ← floor($\frac{n}{\text{nseg_dividend}}$) - количество данных в сегменте;
 | z ← z + 1 if (type = 7 ∨ type = 9) ∧ mod(z - 1, 2) nseg = 227
 | return z

nshift := floor(n_{shift_multiplier} · nseg) = 113 - сдвиг данных между сегментами 50 %;

floor($\text{round}(\frac{n - \text{nshift}}{\text{nseg} - \text{nshift}})$) = 8 - количество сегментов в данных;

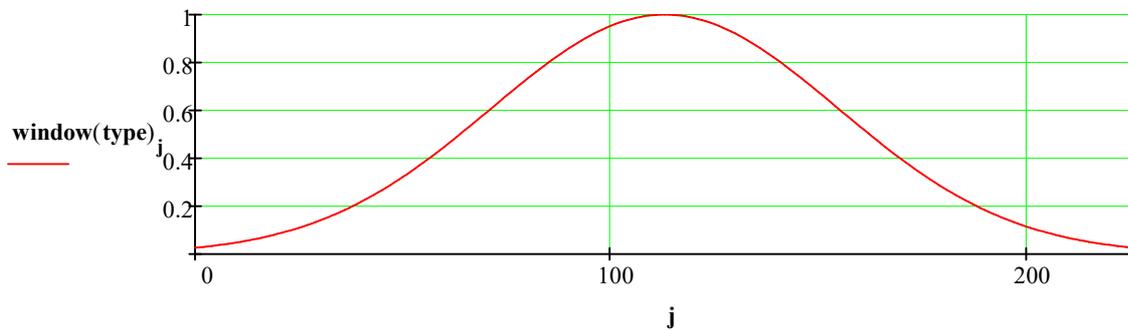
Выбор весовой функции окна, позволяющей получить слаженные спектральные оценки

```

window(type) :=
    w ← costaper(nseg, a0costaper) if type = 0
    w ← taprect(nseg) if type = 1
    w ← triangular(nseg) if type = 2
    w ← hamming(nseg) if type = 3
    w ← hanning(nseg) if type = 4
    w ← nuttall(nseg) if type = 5
    w ← blackman(nseg) if type = 6
    w ← gaussian(nseg, a7gaussian) if type = 7
    w ← kaiser(nseg, b8kaiser) if type = 8
    w ← cheby(nseg, b9cheby) if type = 9
    return w
    
```

```

j := 0 .. nseg - 1
    
```



- вектор частот и спектральная плотность мощности

$S_{xy} := \text{welch}(y, x, \text{window}(\text{type}), n, \text{nseg}, \text{nshift}, \Delta t)$ - входного и выходного сигнала

$S_{xx} := \text{welch}(x, x, \text{window}(\text{type}), n, \text{nseg}, \text{nshift}, \Delta t)$ - входного и входного сигнала

$\Omega := S_{xx}^{(0)}$ Вектор частот

$W_{xy} := \frac{S_{xy}^{(1)}}{S_{xx}^{(1)}}$ Комплексный коэффициент передачи

$m := \text{длина}(W_{xy}) \quad j := 0 .. m - 1$

$\Omega_1 := \frac{\Omega_{\max}}{2 \cdot (m - 1)} = 0.977$ Частота 1-ой гармоники

$A_j := |W_{xy_j}|$ Амплитудная частотная характеристика

$\varphi_j := \arg(W_{xy_j}) \quad \psi := \text{phasecor}(\varphi)$ Фазовая частотная характеристика

$P_j := A_j \cdot \cos(\varphi_j)$ Вещественная частотная характеристика

$Q_j := A_j \cdot \sin(\varphi_j)$ Мнимая частотная характеристика

Функция линейной интерполяции данных

$$\text{InterpY}(x1, x2, y1, y2, x) := y1 + \frac{y2 - y1}{x2 - x1} \cdot (x - x1)$$

$$\text{InterpX}(x1, x2, y1, y2, y) := x1 + \frac{x2 - x1}{y2 - y1} \cdot (y - y1)$$

$$\text{InterpH}(h1, h2, y) := \text{Re}(h1) + \frac{\text{Re}(h2) - \text{Re}(h1)}{\text{Im}(h2) - \text{Im}(h1)} \cdot (y - \text{Im}(h1))$$

Функция вычисления частотных оценок качества

```

frq(mode) :=
   $Wz \leftarrow \frac{W_{xy}}{1 + W_{xy}}$  if mode = 1
   $Wz \leftarrow W_{xy}$  otherwise
   $A_{\max} \leftarrow 0$ 
  for k ∈ 0 .. m - 1
     $A_k \leftarrow |Wz_k|$ 
    "7. Резонансная частота  $\omega(p)$ , Гц"
    if  $A_{\max} < A_k$ 
       $A_{\max} \leftarrow A_k$ 
       $x7 \leftarrow \Omega_k$ 
       $y7 \leftarrow Wz_k$ 
  "4. Частотный показатель колебательности M"
   $m4 \leftarrow A_0$ 
  for k ∈ 1 .. m - 2
    if  $A_{k-1} < A_k \wedge A_k > A_{k+1} \wedge A_k \geq A_0$ 
       $n4 \leftarrow k$ 
       $m4 \leftarrow A_k$ 
       $x4 \leftarrow \Omega_k$ 
       $y4 \leftarrow Wz_k$ 
      break
  "5. Частота по условию  $A(\omega)=A(0)$ , Гц"
  for k ∈ n4 + 1 .. m - 2
    if  $A_{k-1} \geq A_0 \wedge A_k \leq A_0$ 
       $n5 \leftarrow k$ 
       $x5 \leftarrow \text{InterpX}(\Omega_{k-1}, \Omega_k, A_{k-1}, A_k, A_0)$ 
       $y5 \leftarrow \text{InterpY}(\Omega_{k-1}, \Omega_k, A_{k-1}, A_k, x5)$ 
      break
  "6. Частота полосы пропускания  $A(\omega)=0.707A(0)$ , Гц"
  for k ∈ n5 + 1 .. m - 2
    if  $A_{k-1} \geq A_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge A_k \leq A_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ 
       $n6 \leftarrow k$ 
       $x6 \leftarrow \text{InterpX}\left(\Omega_{k-1}, \Omega_k, A_{k-1}, A_k, A_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 
       $y6 \leftarrow \text{InterpY}\left(\Omega_{k-1}, \Omega_k, A_{k-1}, A_k, x6\right) \cdot e^{i \cdot \text{InterpY}(\Omega_{k-1}, \Omega_k, \arg(Wz_{k-1}), \arg(Wz_k), x6)}$ 
      break
  return  $\left( \frac{m4}{A_0} \quad x4 \quad y4 \quad x5 \quad y5 \quad x6 \quad y6 \quad x7 \quad y7 \quad \text{if}\left(x5 \neq 0, \frac{1}{x5}, 0\right) \quad \text{if}\left(x5 \neq 0, \frac{0.5}{x5}, 0\right) \right)^T$ 

```

Функция вычисления интеграла методом трапеций и Симпсона

```

trapz(x) := | n ← длина(x)
            | s ← 0.5·x0 if n = 1
            | otherwise
            |   s ← 0
            |   for k ∈ 1..n-1
            |     s ← s + (xk + xk-1) / 2
            | return s

simp(x) := | s1 ← 0
           | s2 ← 0
           | n ← длина(x)
           | for i ∈ 1..n-1
           |   | s1 ← s1 + xi if mod(i, 2) ≠ 0
           |   | s2 ← s2 + xi otherwise
           | return (2/3) · ( (x0 - xn-1) / 2 + 2·s1 + s2 )
    
```

1. Установившееся значение коэффициента трения (в стационарно-устойчивом состоянии)

$$f_0 := A_0$$

2. Частота среза для оценки запаса устойчивости по амплитуде; запас устойчивости по амплитуде и комплексная амплитуда

```

kua := | S ← cspline(Ω, A)
       | A1(ω) ← interp(S, Ω, A, ω)
       | R ← cspline(Ω, φ)
       | φ1(ω) ← interp(R, Ω, φ, ω)
       | ωmax ← floor(Ωlast(Ω))
       | i ← -1
       | for k ∈ 1..ωmax
       |   | z ← k
       |   | a ← ∞ on error root(π + φ1(z), z)
       |   | if a > 0 ∧ a ≤ Ωlast(Ω)
       |   |   | i ← i + 1
       |   |   | bi ← a
       |   | if i > -1
       |   |   | b ← csort(b, 0)
       |   |   | n ← длина(b)
       |   |   | i ← -1
       |   |   | for k ∈ 0..n-2
       |   |   |   | if |bk - bk+1| > 0.1
       |   |   |     | i ← i + 1
       |   |   |     | ci ← bk
       |   |   | ci+1 ← bn-1
       |   |   | n ← длина(c)
       |   |   | m ← 0
       |   |   | s ← 0
       |   |   | for i ∈ 0..n-1
       |   |   |   | di ← 200 on error 20·log(1/A1(ci))
       |   |   |   | ωc2 := [ (kua<0>)0 ]
       |   |   |   | L := [ (kua<0>)0,1 ]
       |   |   |   | AL := [ (kua<0>)0,2 ]
       |   |   |   | Lr := Re(AL)
       |   |   |   | csort[ (kua<1>)0,1 ] = [
       |   |   |     [ 249.047  15.857  -0.161 + 0i ]
       |   |   |     [ 250      15.891  -0.16 - 0i ]
       |   |   |     [ 494.143  59.007  -0.001 ]
       |   |   |     [ 495.109  60.379  -0.001 - 0i ]
       |   |   |   ]
    
```

```

    e_i ← A1(c_i) · exp(i · φ1(c_i))
    if m > Re(e_i)
        m ← Re(e_i)
        s ← i
    otherwise
        c_0 ← 0
        d_0 ← 200
        e_0 ← 0
    return [(c_s d_s e_s)^T augment(c, d, e)]

```

3. Частота среза для оценки запаса устойчивости по фазе; запас устойчивости по фазе и комплексная амплитуда

```

kuf := S ← cspline(Ω, A)
A1(ω) ← interp(S, Ω, A, ω)
R ← cspline(Ω, φ)
φ1(ω) ← interp(R, Ω, φ, ω)
ω_max ← floor(Ω_last(Ω))
i ← -1
for k ∈ 1 .. ω_max
    x ← k
    a ← ∞ on error root(A1(x) - 1, x)
    if a > 0 ∧ a ≤ Ω_last(Ω)
        i ← i + 1
        b_i ← a
if i > -1
    b ← csort(b, 0)
    n ← длина(b)
    j ← -1
    for k ∈ 0 .. n - 2
        if |b_k - b_{k+1}| > 0.1
            j ← j + 1
            c_j ← b_k
    c_{j+1} ← b_{n-1}
    n ← длина(c)
    m ← 0
    s ← 0
    for i ∈ 0 .. n - 1
        d_i ← (φ1(c_i) + π) / deg if φ1(c_i) ≤ 0
            φ1(c_i) - π
ω_c1 := [(kuf^{(0)})_0]_0
Ψ := [(kuf^{(0)})_0]_1
A_Ψ := [(kuf^{(0)})_0]_2
ψ_Re := Re(A_Ψ)
ψ_Im := Im(A_Ψ)
csort([(kuf^{(1)})_0, 2] = (0 0 0)

```

```

| | | a_i ←  $\frac{\text{deg}}{\text{deg}}$  otherwise
| | | e_i ← A1(c_i) · exp(i · φ1(c_i))
| | | if m > Re(e_i)
| | | | m ← Re(e_i)
| | | | s ← i
| | | otherwise
| | | | c_0 ← 0
| | | | d_0 ← 0
| | | | e_0 ← 0
| | | return [(c_s d_s e_s)ᵀ augment(c, d, e)]

```

4. Показатель колебательности, центральная частота и комплексная амплитуда (для разомкнутой и замкнутой систем):

$$\begin{aligned}
 M_1 &:= \text{frq}(0)_0 = 1.001 & M_2 &:= \text{frq}(1)_0 = 1.001 \\
 \omega_{M1} &:= \text{frq}(0)_1 = 3.906 & \omega_{M2} &:= \text{frq}(1)_1 = 3.906 \\
 A_{M1} &:= \text{frq}(0)_2 = 0.054 + 1.998i \times 10^{-4} & A_{M2} &:= \text{frq}(1)_2 = 0.051 + 1.799i \times 10^{-4}
 \end{aligned}$$

5. Частота среза по условию $A(\omega) = A(0)$, характеризующая длительность переходного процесса (для разомкнутой и замкнутой систем):

$$\begin{aligned}
 \omega_{c31} &:= \text{frq}(0)_3 = 6.218 & \omega_{c32} &:= \text{frq}(1)_3 = 6.218 \\
 A_{c31} &:= \text{frq}(0)_4 = 0.054 & A_{c32} &:= \text{frq}(1)_4 = 0.051
 \end{aligned}$$

6. Частота среза по условию $A(\omega) = 0,707A(0)$, характеризующая способность системы воспроизводить высокочастотные помехи (для разомкнутой и замкнутой систем):

$$\begin{aligned}
 \omega_{01} &:= \text{frq}(0)_5 = 322.894 & \omega_{02} &:= \text{frq}(1)_5 = 326.2 \\
 A_{01} &:= \text{frq}(0)_6 = -0.011 + 0.036i & A_{02} &:= \text{frq}(1)_6 = -7.998 \times 10^{-3} + 0.035i
 \end{aligned}$$

7. Резонансная частота (для разомкнутой и замкнутой систем):

$$\begin{aligned}
 \omega_{p1} &:= \text{frq}(0)_7 = 158.203 & \omega_{p2} &:= \text{frq}(1)_7 = 166.016 \\
 A_{p1} &:= \text{frq}(0)_8 = 0.228 - 0.481i & A_{p2} &:= \text{frq}(1)_8 = 0.166 - 0.416i
 \end{aligned}$$

8. Ориентировочное время переходного процесса (для разомкнутой и замкнутой систем):

$$t_{n1} := \text{frq}(0)_9 = 0.161 \qquad t_{n2} := \text{frq}(1)_9 = 0.161$$

9. Ориентировочное время достижения первого максимума (для разомкнутой и замкнутой систем):

$$t_{m1} := \text{frq}(0)_{10} = 0.08 \qquad t_{m2} := \text{frq}(1)_{10} = 0.08$$

10 Квадратичный интегральный критерий качества, характеризующий динамическую ошибку, возникающую при отклике системы на входное воздействие типа функции Хэвисайда

$$I := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \text{длина}(Wxy) \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow \frac{Wxy_i}{1+Wxy_i} \\ y_i \leftarrow \text{if } \left[\Omega_i = 0, 0, \frac{(|x_0 - x_i|)^2}{(\Omega_i)^2} \right] \end{array} \right. \\ \text{return } \frac{\text{simp}(y)}{\pi} \end{array} \right.$$

11 Квадратичный интегральный критерий качества, характеризующий динамическую ошибку, возникающую при отклике системы на входное задающее воздействие типа функции Дирака

$$I' := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \text{длина}(Wxy) \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad x_i \leftarrow \left(\left| \frac{Wxy_i}{1+Wxy_i} \right| \right)^2 \\ \text{return } \frac{\text{simp}(x)}{\pi} \end{array} \right.$$

12 Интегральная оценка, характеризующая упруго-инерционные свойства системы, способствующие увеличению сближения поверхностей трения и возрастанию потенциальной энергии

$$I_C := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \text{длина}(P) \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow P_i \text{ if } P_i \geq 0 \\ x_i \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \text{return } \frac{\Omega_1}{n} \cdot \text{simp}(x) \end{array} \right.$$

13 Интегральная оценка инерционных свойств системы, способствующие возрастанию кинетической энергии, а также снижению устойчивости системы

$$I_m := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \text{длина}(P) \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow -P_i \text{ if } P_i < 0 \\ x_i \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \text{return } \frac{\Omega_1}{n} \cdot \text{simp}(x) \end{array} \right.$$

14 Интегральная оценка сил сопротивления перемещениям, характеризующая диссипативные свойства системы, способствующие возрастанию сил сопротивления относительным смещениям

$$I_{Qc} := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \text{длина}(Q) \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow -Q_i \text{ if } Q_i < 0 \\ x_i \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \text{return } \frac{\Omega_1}{n} \cdot \text{simp}(x) \end{array} \right.$$

15 Интегральная оценка сил, вызванных фрикционными автоколебаниями, характеризует диссипативные свойства системы, когда вектор сил сопротивления движению сонаправлен с вектором скорости относительного скольжения. Её возрастание способствует снижению устойчивости, разрыву фрикционных связей.

$$I_{Q\phi} := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \text{длина}(Q) \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow Q_i \text{ if } Q_i \geq 0 \\ x_i \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \text{return } \frac{\Omega_1}{n} \cdot \text{simp}(x) \end{array} \right.$$

16 Интегральная оценка коэффициента демпфирования, характеризующая отношение диссипативной к консервативной энергии фрикционно-механической системы

$$I_{\xi} := \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{I_{Qc} + I_{Q\phi}}{I_c + I_m}\right)^2}}}$$

tab11 :=	"Коэффициент демпфирования	"	ξ
	"Макс. нормальная сила, Н	"	N_{max}
	"Макс. тангенциальная сила, Н	"	T_{max}
	"1. Установившееся знач. коэф. трения	"	f_0
	"2. Запас устойчивости по амплитуде L, дБ	"	L
	"Частота среза, Гц	"	ω_{c2}
	"Комплексная амплитуда на частоте среза	"	A_L
	"3. Запас устойчивости по фазе ψ , градус	"	Ψ
	"Частота среза, Гц	"	ω_{c1}
	"Комплексная амплитуда на частоте среза	"	A_Ψ
	"4. Частотный показатель колебательности M	"	M_2
	"Центральная частота, Гц	"	ω_{M2}
	"Комплексная амплитуда для центральной частоты	"	A_{M2}
	"5. Частота по условию $A(\omega)=A(0)$, Гц	"	ω_{c32}
	"Комплексная амплитуда	"	A_{c32}
	"6. Частота полосы пропускания $A(\omega)=0.707A(0)$, Гц	"	ω_{02}
"Комплексная амплитуда	"	A_{02}	
"7. Резонансная частота $\omega(p)$, Гц	"	ω_{p2}	
"Комплексная амплитуда на частоте $\omega(p)$	"	A_{p2}	
"8. Ориентировочное время переходного процесса $t(p)$, с	"	t_{n2}	
"9. Ориентировочное время 1-го максимума $t(m)$, с	"	t_{m2}	
"10. Квадратичный интегральный критерий качества I	"	I	
"11. Квадратичный интегральный критерий качества I'	"	I'	
"12. Оценка упруго-инерционных сил I(c)	"	I_C	
"13. Оценка инерционных сил, спос. потере устойчивости I(m)"	"	I_m	
"14. Оценка сил трения I(тр.)	"	I_{Qc}	
"15. Оценка сил фрикционных автоколебаний I(фр.к.)	"	$I_{Qф}$	
"16. Оценка динамического коэф. демпфирования I(γ)	"	I_ξ	

Частотные характеристики методом усреднённых по времени периодограмм

Долеоктавный анализ

Функция для вычисления диапазона частот при октавном или долеоктавном спектральном анализе.

Входные параметры:

b - число диапазонов, приходящихся на октаву (1, 3, 12 или 24)

nf - число частотных гармоник

t - период дискретизации данных

```

octave(b, nf, t) :=
  g ← 100.3
  fn ←  $\frac{0.5}{t}$ 
  fl ←  $\frac{fn}{nf - 1}$ 
  j ← -1
  if b = 1
    imax ← -16
    while gimax · 1000 < fn
      imax ← imax + 1
      for i ∈ imax - 15 .. imax
        temp ← gi · 1000
        if fl < g0.5 · temp
          j ← j + 1
          fbj ← temp
      end for
    end while
  if b = 3
    imax ← -51
    while g $\frac{imax}{b}$  · 1000 < fn
      imax ← imax + 1
      for i ∈ imax - 50 .. imax
        temp ← g $\frac{i}{b}$  · 1000
        if fl < g $\frac{1}{2 \cdot b}$  · temp
          j ← j + 1
          fbj ← temp
        end if
      end for
    end while
  if b = 12
    imax ← -202
    while g $\frac{2 \cdot imax}{2 \cdot b}$  · 1000 < fn
      imax ← imax + 1
      for i ∈ imax - 201 .. imax
        temp ← g $\frac{2 \cdot i}{2 \cdot b}$  · 1000
        if fl < g $\frac{1}{2 \cdot b}$  · temp
          j ← j + 1
          fbj ← temp
        end if
      end for
    end while
  if b = 24
    imax ← -404
    while g $\frac{4 \cdot imax}{4 \cdot b}$  · 1000 < fn
      imax ← imax + 1
      for i ∈ imax - 403 .. imax
        temp ← g $\frac{4 \cdot i}{4 \cdot b}$  · 1000
        if fl < g $\frac{1}{4 \cdot b}$  · temp
          j ← j + 1
          fbj ← temp
        end if
      end for
    end while
  end if
end if

```

```

imax ← -404
       $\frac{2 \cdot \text{imax}}{2 \cdot b}$ 
while  $g^{2 \cdot b} \cdot 1000 < \text{fn}$ 
  imax ← imax + 1
  for i ∈ imax - 403 .. imax
     $\frac{2 \cdot i}{2 \cdot b}$ 
    temp ←  $g^{2 \cdot b} \cdot 1000$ 
     $\frac{1}{2 \cdot b}$ 
    if  $\text{f1} < g^{2 \cdot b} \cdot \text{temp}$ 
      j ← j + 1
      fbj ← temp
  for i ∈ 0 .. j
     $\frac{1}{2 \cdot b}$ 
    xi ←  $g^{2 \cdot b} \cdot \text{fb}_i$ 
    yi ← fbi
     $\frac{1}{2 \cdot b}$ 
    zi ←  $g^{2 \cdot b} \cdot \text{fb}_i$ 
    if xi > fn
      x ← submatrix(x, 0, i - 1, 0, 0)
      y ← submatrix(y, 0, i - 1, 0, 0)
      z ← submatrix(z, 0, i - 1, 0, 0)
      break
return augment(x, y, z)

```

Функция для вычисления октавного или долеоктавного спектра

Входные параметры:

- hxy - спектральная функция сигнала, взаимного спектра или передаточной функции;
- fx - вектор частот;
- b - число диапазонов на октаву (1; 3; 12 или 24);
- t - период дискретизации данных, с;
- a - максимальная амплитуда шумовой компоненты (0 - фильтрации октавного спектра нет);
- type - тип расчёта октавного спектра
 - = 1 - средних квадратичных отклонений;
 - = 2 - упругих нагрузок;
 - = 3 - инерционных нагрузок;
 - = 4 - сил сопротивления колебаниям;
 - = 5 - сил трения, обусловленных фрикционными автоколебаниями.

Выходные параметры:

- 0 колонка - нижняя граница октавной полосы частот;
- 1 колонка - амплитудное значение;
- 2 колонка - амплитудные значения в дБ.

```

roctave(hxy, fx, b, t,  $\alpha$ , type) :=
  n  $\leftarrow$  длина(hxy)
  hmax  $\leftarrow$  |max(hxy)|  $\cdot$   $\alpha$ 
  fn  $\leftarrow$   $\frac{0.5}{t}$ 
  h  $\leftarrow$  fx1
  g  $\leftarrow$  100.3
  fb  $\leftarrow$  octave(b, n, t)
  i  $\leftarrow$  0
  j  $\leftarrow$  1
  l  $\leftarrow$  -1
  m  $\leftarrow$  длина(fb(0))
  s  $\leftarrow$  0
  while i < m
    low  $\leftarrow$  fbi,0
    high  $\leftarrow$  fbi,2
    if fn  $\geq$  low
      s  $\leftarrow$  0
      k  $\leftarrow$  -1
      isfirst  $\leftarrow$  0
      while j < n
        break if fxj  $\geq$  high
        otherwise
          isfirst  $\leftarrow$  1
          pj  $\leftarrow$  |hxyj|  $\cdot$  cos(arg(hxyj))
          qj  $\leftarrow$  |hxyj|  $\cdot$  sin(arg(hxyj))
          if type = 1
            k  $\leftarrow$  k + 1
            s  $\leftarrow$  s + (|hxyj|  $\cdot$   $\Phi$ (|hxyj| - hmax))2 if  $\alpha > 0$ 
            s  $\leftarrow$  s + (|hxyj|)2 otherwise
          if type = 2  $\wedge$  pj  $\geq$  0
            k  $\leftarrow$  k + 1
            vk  $\leftarrow$  pj
          if type = 3  $\wedge$  pj < 0
            k  $\leftarrow$  k + 1
            vk  $\leftarrow$  |pj|
          if type = 4  $\wedge$  qj < 0
            k  $\leftarrow$  k + 1
            vk  $\leftarrow$  |qj|
          if type = 5  $\wedge$  qj > 0

```

```

n ← type = 1 ∧ q_j ≤ v
    | k ← k + 1
    | v_k ← q_j
    | j ← j + 1
if isfirst = 1
    | l ← l + 1
    | c_l ← low
    | if k > -1
        | d_l ← √(s/2) if type = 1
        | d_l ← trapz(v) otherwise
    | d_l ← 0 otherwise
i ← i + 1
for j ∈ 0..l
    | x_j ← c_j
    | y_j ← d_j if type = 1
    | y_j ← Ω_1 · d_j otherwise
    | z_j ← 0 if y_j = 0
    | z_j ← 20 · log(y_j) otherwise
x_{l+1} ← high
y_{l+1} ← y_l
z_{l+1} ← z_l
return augment(x, y, z)

```

РАСЧЁТЫ

Функция для вычисления среднего квадратичного отклонения по значениям БПФ
 Входной параметр:

Sx - комплексные амплитуды до частоты Найквиста

```

σ(Sx) := | n ← длина(Sx)
        | for k ∈ 0..n-1
            | y_k ← (|Sx_k| / (n-1))^2
        | return Ω_max · √(simp(y) · (2·n+1) / (2·n))

```

Функция для вычисления среднего квадратичного отклонения по значениям октавного спектра

$$\Sigma(\mathbf{O}) := \begin{cases} \mathbf{n} \leftarrow \text{длина}(\mathbf{O}) \\ \mathbf{s} \leftarrow 0 \\ \text{for } \mathbf{k} \in 0 \dots \mathbf{n} - 2 \\ \quad \mathbf{s} \leftarrow \mathbf{s} + 2 \cdot (\mathbf{O}_{\mathbf{k}})^2 \\ \text{return } \sqrt{\frac{\mathbf{s}}{2}} \end{cases}$$

Расчёт частотных характеристик методом Быстрого преобразования Фурье без использования весовых окон

$$\mathbf{n} := \text{длина}(\mathbf{N})$$

Размерность вектора данных

$$N_W := \frac{\mathbf{n} - 1}{2} + 1$$

Размерность вектора передаточной функции

$$\mathbf{j} := 0 \dots N_W - 1$$

$$\Omega'_1 := \frac{1}{\Delta t \cdot (\mathbf{n} - 1)} = 1$$

Частота 1 гармоники

$$\Omega'_j := \mathbf{j} \cdot \Omega'_1$$

Вектор частот

$$S_N := \text{submatrix}[\text{CFFT}(\mathbf{N}), 0, 0.5 \cdot (\mathbf{n} - 1), 0, 0]$$

Спектральная функция нагрузки на объект

$$\mathbf{O}_N := \text{p octave}(2 \cdot S_N, \Omega', \mathbf{B}, \Delta t, 0.02, 1)$$

Октавный спектр нагрузки на объект

$$\sigma_N := \sqrt{\frac{1}{\mathbf{n} - 1} \cdot \sum_{\mathbf{k} = 0}^{\mathbf{n} - 1} (\mathbf{N}_{\mathbf{k}})^2} = 2466.7$$

Среднеквадратичное отклонение нагрузки на объект

$$\sigma(S_N) = 2015.6$$

$$\sigma_{NO} := \Sigma(\mathbf{O}_N^{(1)}) = 2462.5$$

Среднеквадратичное отклонение нагрузки на объект, вычисленное по значениям октавного спектра

$$S_\tau := \text{submatrix}[\text{CFFT}(\boldsymbol{\tau}), 0, 0.5 \cdot (\mathbf{n} - 1), 0, 0]$$

Спектральная функция силы тангенциального смещения объекта

$$\mathbf{O}_\tau := \text{p octave}(S_\tau \cdot 2, \Omega', \mathbf{B}, \Delta t, 0.05, 1)$$

Октавный спектр силы тангенциального смещения объекта

$$\sigma_\tau := \sqrt{\frac{1}{\mathbf{n} - 1} \cdot \sum_{\mathbf{k} = 0}^{\mathbf{n} - 1} (\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{k}})^2}$$

Среднеквадратичное отклонение тангенциального смещения объекта

$$\sigma_{\tau O} := \Sigma(\mathbf{O}_\tau^{(1)})$$

Среднеквадратичное отклонение тангенциального смещения объекта, вычисленное по значениям октавного спектра

$$\mathbf{O}_C := \text{p octave}(W_{xy}, \Omega, \mathbf{B}, \Delta t, 0, 2)$$

Октавный спектр упругих нагрузок на объект

$$\sigma_C := \sum_{\mathbf{k} = 0}^{\text{last}(\mathbf{O}_C^{(1)}) - 1} (\mathbf{O}_C^{(1)})_{\mathbf{k}}$$

Среднее квадратичное отклонение упругих нагрузок на объект

$$\mathbf{O}_m := \text{p octave}(W_{xy}, \Omega, \mathbf{B}, \Delta t, 0, 3)$$

Октавный спектр сил инерционных нагрузок на объект

$$\sigma_m := \sum_{\mathbf{k} = 0}^{\text{last}(\mathbf{O}_m^{(1)}) - 1} (\mathbf{O}_m^{(1)})_{\mathbf{k}}$$

Среднее квадратичное отклонение инерционных нагрузок на объект

$$\mathbf{O}_{Qc} := \text{p octave}(W_{xy}, \Omega, \mathbf{B}, \Delta t, 0, 4)$$

Октавный спектр сил сопротивления колебаниям объекта

$$\sigma_{Qc} := \sum_{k=0}^{\text{last}(O_{Qc}^{(1)})-1} (O_{Qc}^{(1)})_k$$

Среднее квадратичное отклонение сил сопротивления колебаниям объекта

$$O_{Q\phi} := \text{roctave}(Wxy, \Omega, B, \Delta t, 0, 5)$$

Октавный спектр сил трения объекта, обусловленных фрикционными автоколебаниями

$$\sigma_{Q\phi} := \sum_{k=0}^{\text{last}(O_{Q\phi}^{(1)})-1} (O_{Q\phi}^{(1)})_k$$

Среднее квадратичное отклонение сил трения объекта, обусловленных фрикционными автоколебаниями

$$tO := \left(\begin{array}{lll} \text{"ПАРАМЕТР"} & \text{"факт"} & \text{"по спектру"} \\ \text{"СКЗ нагрузки"} & \sigma_N & \sigma_{NO} \\ \text{"СКЗ силы тангенц. смещения"} & \sigma_\tau & \sigma_{\tau O} \\ \text{"СКЗ упругих сил"} & I_C & \sigma_C \\ \text{"СКЗ сил инерции"} & I_m & \sigma_m \\ \text{"СКЗ сил сопротивления"} & I_{Qc} & \sigma_{Qc} \\ \text{"СКЗ сил тр., обусл. фрик. авт."} & I_{Q\phi} & \sigma_{Q\phi} \end{array} \right)$$

Долеоктавный анализ

Временные характеристики

Функция для вычисления нормы вектора

$$\text{norm}(x) := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \text{длина}(x) \\ s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad s \leftarrow s + (x_i)^2 \\ \text{return } \sqrt{s} \end{array} \right.$$

Оценка максимальной частоты для определения временных характеристик

$$\omega_{\max} := \left| \begin{array}{lll} n \leftarrow \text{длина}(P) & \omega_{\max} = 383.8 & \Omega_{\text{last}(\Omega)} = 500 \\ k \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} j \leftarrow n-1-i \\ \text{if } |P_j| > 0.05 \cdot |P_0| \\ \quad \left| \begin{array}{l} k \leftarrow j \\ \text{break} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \Omega_k \end{array} \right.$$

$$t_i := i \cdot \Delta t$$

Вектор дискретных моментов времени

Переходная функция Хэвисайда

```

hd0 := | n ← длина(P)
         | for k ∈ 1..n-1
           |   Pk
           |   Ωk
           |   xk ←  $\frac{P_k}{\Omega_k} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \Omega_k \cdot t)$ 
           |
           | y ← detrend( $\frac{2}{\pi} \cdot \Omega_1 \cdot \text{trapz}(x)$ )
           |
           | return y - ylast(y) - y0
    
```

```

h0 := on error | n ← длина(t)
                 | cs ← cspline(Ω, P)
                 | P1(ω) ← interp(cs, Ω, P, ω)
                 | for k ∈ 0..n-1
                   |    $x_k \leftarrow \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\omega_{\max}} \frac{P1(\omega)}{\omega} \cdot \sin(2\pi \cdot \omega \cdot t_k) d\omega$ 
                 |
                 | return x
    
```

```

         | n ← длина(P)
         | for k ∈ 1..n-1
           |   Pk
           |   Ωk
           |   xk ←  $\frac{P_k}{\Omega_k} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \Omega_k \cdot t)$ 
           |
           | y ← detrend( $\frac{2}{\pi} \cdot \Omega_1 \cdot \text{trapz}(x)$ )
           |
           | return y - ylast(y) - y0
    
```

Импульсная функция Дирака

```

wn0 := | n ← длина(t)
         | cs ← cspline(Ω, P)
         | P1(ω) ← interp(cs, Ω, P, ω)
         | for k ∈ 0..n-1
           |    $x_k \leftarrow \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\omega_{\max}} P1(\omega) \cdot \sin(2\pi \cdot \omega \cdot t_k) d\omega$ 
         |
         | return x
    
```

```

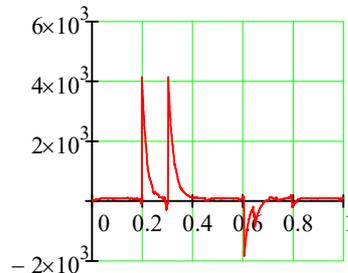
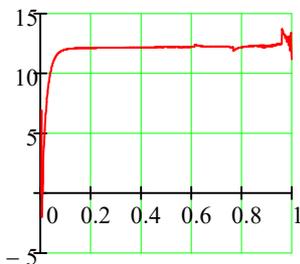
w0 := | n ← длина(h0)
         | z0 ← h00
         | for k ∈ 1..n-1
           |    $z_k \leftarrow \frac{h0_k - h0_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}$ 
         |
         | return z
    
```

$k_w := \frac{\max(w0)}{\max(wn0)} = 4.501$ - корректировка непрерывной импульсной функции

$h\epsilon_i := 0$ on error $\frac{h0_i - hd0_i}{h0_i} \cdot 100$ $w\epsilon_i := 0$ on error $\frac{w0_i - wn0_i}{w0_i} \cdot 100$

$h\epsilon := \text{expsmooth}(h\epsilon, 0.05)$

$w\epsilon := \text{expsmooth}(w\epsilon, 0.05)$



$\text{norm}(h\epsilon) = 380$
 $\text{norm}(w\epsilon) = 20122.5$

Синтезированная по частотным и временным характеристикам системы и нормальной нагрузке функция силы трения, вычисленная с помощью интеграла Дюамеля:

$$x_i := \Delta t \cdot \left[N_0 \cdot h0_i + \sum_{k=0}^i (N_{i-k} \cdot w0_k) \right]$$

$$x_i := \Delta t \cdot \left[h0_0 \cdot N_i + \sum_{k=0}^i (w0_{i-k} \cdot N_k) \right]$$

$x := \text{submatrix}(x, 0, n - 1, 0, 0)$

Восстановление длины вектора

$x := \text{medfilt1d}(x, 3)$

Применение медианного фильтра

$$\sigma := \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (\tau_j - x_j)^2} = 28$$

Ошибка модели

Для более детального построения переходного процесса изменим масштаб времени

```

Δt1 := | x ← medfilt1d(h0, 5)
      | n ← длина(x)
      | for i ∈ 0..n-1
      |   y_i ← if(if(|x_i - x_{n-1}| ≤ 0.05 · |x_{n-1}|, 1, 0), 0, i)
      | return 2 · Δt · t_max(y)
    
```

$$\Delta t = 1 \times 10^{-3}$$

$$\Delta t1 = 5.8 \times 10^{-5}$$

$t1_i := i \cdot \Delta t1$

Повторно вычислим переходную и импульсную функции для оценки временных характеристик

```

h := on error | n ← длина(t)
              | cs ← cspline(Ω, P)
              | P1(ω) ← interp(cs, Ω, P, ω)
              | for k ∈ 0..n-1
              |   x_k ← \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_{max}} \frac{P1(\omega)}{\omega} \cdot \sin(2\pi \cdot \omega \cdot t1_k) d\omega
              | return x
    
```

```

w := | n ← длина(h)
     | z_0 ← h_0
     | for k ∈ 1..n-1
     |   z_k ← \Delta t \cdot \frac{h_k - h_{k-1}}{t1_k - t1_{k-1}}
     | return medfilt1d(z, 10)
    
```

```

| n ← длина(P)
| for k ∈ 1..n-1
|   x_k ← \frac{P_k}{\Omega_k} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \Omega_k \cdot t1)
| y ← detrend(\frac{2}{\pi} \cdot \Omega_1 \cdot \text{trapz}(x))
| return y - y_last(y) - y_0
    
```

```

t0 := | n ← длина(h)
      | for i ∈ 1..n-2
      |   if h_{i-1} ≤ 0 ∧ h_i ≥ 0
      |     | τ ← InterpX(t1_{i-1}, t1_i, h_{i-1}, h_i, 0)
      |     | break
      | return τ
    
```

Время, соответствующее h = 0, с

Функции для поиска максимума и минимума функции в интервале индексов

$\text{maxf}(f, a, b) :=$ <pre> k ← 0 i ← a s ← f_i while i < b i ← i + 1 if s ≤ f_i s ← f_i k ← i return k </pre>	$\text{minf}(f, a, b) :=$ <pre> k ← 0 i ← a s ← f_i while i < b i ← i + 1 if s ≥ f_i s ← f_i k ← i return k </pre>
---	---

Определение максимумов функции:

```

id :=
  m ← длина(h)
  a ← (0 0 0 0)T
  for i ∈ 1 .. m - 3
    if a0 = 0
      x0 ← i + 1 if hi-1 < hi ∧ hi < hi+1 ∧ hi+1 ≥ hi+2
      y0 ← i if hi-1 < hi ∧ hi ≥ hi+1 ∧ hi+1 > hi+2
      trace("{0}-{1}", x0, y0) if x0 > 0 ∨ y0 > 0
      a0 ← min(x0, y0)
    if a1 = 0 ∧ i > a0 · 2.8 · if(ξ > 0.707, 1.786, 1)
      x1 ← i + 1 if hi-1 < hi ∧ hi < hi+1 ∧ hi+1 ≥ hi+2
      y1 ← i if hi-1 < hi ∧ hi ≥ hi+1 ∧ hi+1 > hi+2
      trace("{0}-{1}", x1, y1) if x1 > 0 ∨ y1 > 0
      a1 ← max(x1, y1) if x1 > 0 ∧ y1 > 0
    if a2 = 0 ∧ a1 > 0 ∧ i > a1 · 1.5
      x2 ← i + 1 if hi-1 < hi ∧ hi < hi+1 ∧ hi+1 ≥ hi+2
      y2 ← i if hi-1 < hi ∧ hi ≥ hi+1 ∧ hi+1 > hi+2
      trace("{0}-{1}", x2, y2) if x2 > 0 ∨ y2 > 0
      a2 ← max(x2, y2) if x2 > 0 ∧ y2 > 0
    if a3 = 0 ∧ a2 > 0 ∧ a1 > 0 ∧ i > a2
      x3 ← i + 1 if hi-1 < hi ∧ hi < hi+1 ∧ hi+1 ≥ hi+2
      y3 ← i if hi-1 < hi ∧ hi ≥ hi+1 ∧ hi+1 > hi+2
      trace("{0}-{1}", x3, y3) if x3 > 0 ∨ y3 > 0
      a3 ← max(x3, y3) if x3 > 0 ∧ y3 > 0
  return a

```

$$\tau_1 := t1_{id_0} = 0.0029$$

$$h_{\max 1} := \max(h_{id_0}, h_{id_1}, h_{id_2}, h_{id_3}) = 0.13447$$

```

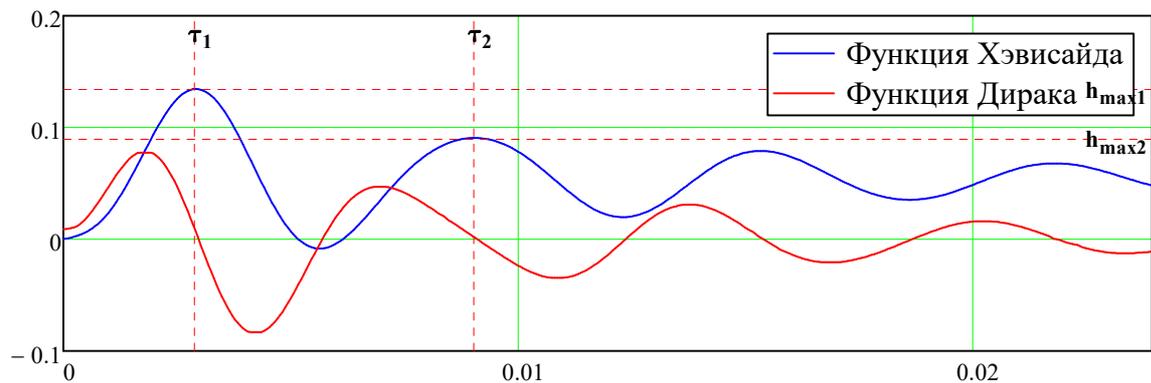
 $\tau_2 := \left\{ \begin{array}{l} x \leftarrow t1 \\ \text{if}(\min(id_1, id_2) > 0, \min(id_1, id_2), id_1) \\ \text{return if}(x > 0, x, -1) \end{array} \right.$ 
 $\tau_2 = 0.00905$ 

```

```

 $h_{max2} := \left\{ \begin{array}{l} n \leftarrow \text{длина}(id) = 0.09067 \\ \text{for } i \in 0 .. n - 1 \\ \quad \text{if } h(id_i) = h_{max1} \\ \quad \quad x \leftarrow i \\ \quad \quad \text{break} \\ \text{for } i \in x .. n - 1 \\ \quad \text{if } h(id_i) < h_{max1} \\ \quad \quad y \leftarrow h(id_i) \\ \quad \quad \text{break} \\ \text{return } y \end{array} \right.$ 

```



ОСНОВНЫЕ ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:

$T_0 := \frac{1}{\omega}$

- период вынужденных колебаний, с

$T := \text{if}(\tau_2 > \tau_1, \tau_2 - \tau_1, \infty) = 6.148 \times 10^{-3}$

- период затухающих колебаний, с

$h_y := h_{n-1}$

1) Установившаяся амплитуда

```

 $t_{n\_min} := \left\{ \begin{array}{l} n \leftarrow \text{длина}(h) \\ \text{for } i \in 1 .. n - 1 \\ \quad \text{if } t1_i > t_0 \wedge h_{i-1} < h_y \wedge h_i \geq h_y \\ \quad \quad \tau \leftarrow \text{InterpX}(t1_{i-1}, t1_i, h_{i-1}, h_i, h_y) \\ \quad \quad \text{break} \\ \text{return } \tau \end{array} \right.$ 

```

18) Минимальное время нарастания, с

```

 $t_s := \left\{ \begin{array}{l} n \leftarrow \text{длина}(h) \\ \text{for } i \in 1 .. n - 2 \\ \quad j \leftarrow n - 1 - i \\ \quad \text{if } t1_{j-1} \leq t_{n\_min} \wedge h_{j-1} < 0.5 \cdot h_y \wedge h_j \geq 0.5 \cdot h_y \\ \quad \quad \tau \leftarrow \text{InterpX}(t1_{j-1}, t1_j, h_{j-1}, h_j, 0.5 \cdot h_y) \\ \quad \quad \text{break} \\ \text{return } \tau \end{array} \right.$ 

```

17) Время запаздывания, с

```

tn_max :=  $\left\{ \begin{array}{l} n \leftarrow \text{длина}(h) \\ \text{for } i \in 1 \dots n - 1 \\ \quad \text{if } t1_{i-1} \geq \tau_1 \wedge h_{i-1} \geq h_y \wedge h_i < h_y \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} \tau \leftarrow \text{InterpX}(t1_{i-1}, t1_i, h_{i-1}, h_i, h_y) \\ \text{break} \end{array} \right. \\ \text{return } \tau \end{array} \right.$ 

```

19) Максимальное время нарастания, с

Для оценки длительности переходного процесса вычислим вспомогательную функцию максимального индекса переходной функции

```

tn :=  $\left\{ \begin{array}{l} x \leftarrow \text{medfilt1d}(h, 5) \\ n \leftarrow \text{длина}(x) \\ \text{for } i \in 0 \dots n - 1 \\ \quad y_i \leftarrow \text{if}(\text{if}(|x_i - x_{n-1}| \leq 0.05 \cdot |x_{n-1}|, 1, 0), 0, i) \\ \text{return } t1_{\text{max}}(y) \end{array} \right.$ 

```

- длительность переходного процесса, с

$$\Delta := \frac{0.05 \cdot |h_{n-1}| \cdot 5}{h_{t_n} - h_y} \quad \text{- фактическая ошибка регулирования, \%}$$

$$\sigma := \frac{h_{\text{max1}} - h_y}{h_y} \cdot 100 \quad \text{22) перерегулирование, \% = [10 ... 30]}$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

$$\chi := \text{if} \left(h_{\text{max2}} = 0, 0, \frac{h_{\text{max1}} - h_y}{h_{\text{max2}} - h_y} \right) \quad \text{Отношение двух соседних амплитуд}$$

$$\psi := \text{if} \left(\chi > 0, 1 - \frac{1}{\chi}, 0 \right) \quad \text{24) Степень затухания колебаний}$$

$$\delta := \text{if}(\chi > 0, \ln(\chi), 0) \quad \text{Логарифмический декремент затухания}$$

$$Q := \text{if} \left(\chi > 0, \frac{2\pi}{\psi}, 0 \right) \quad \text{23) добротность колебательной системы}$$

$$\omega := \frac{2\pi}{T} \quad \text{- круговая частота затухающих колебаний, с⁻¹;$$

$$\nu := \text{if} \left(\chi > 0, \frac{\delta}{T}, 0 \right) \quad \text{- коэффициент затухания, с⁻¹}$$

$$\omega_0 := \text{if} \left(\chi > 0, \sqrt{\nu^2 + \omega^2}, 0 \right) \quad \text{- круговая частота собственных колебаний, с⁻¹;$$

$$m := \text{if} \left(\chi > 0, \frac{\nu}{\omega}, 0 \right) \quad \text{- корневой показатель колебательности}$$

$$\xi := \text{if} \left(\chi > 0, \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}, 0 \right) \quad \text{- коэффициент демпфирования фрикционных связей << [1]}$$

$$M := \text{if} \left(\chi > 0, \frac{m^2 + 1}{2m}, 0 \right) \quad \text{4) частотный показатель колебательности}$$

$$\mu := \text{if} \left(\chi > 0, \frac{1}{m}, 0 \right) \quad \text{- колебательность}$$

$$N := \frac{t_n - t_0}{T}$$

25) Полное число колебаний регулируемой величины

$$\tau := \text{if} \left(\chi > 0, \frac{T}{\delta}, 0 \right)$$

- время релаксации фрикционных связей, с

$$N_e := \text{if} \left(\chi > 0, \frac{1}{\delta}, 0 \right)$$

- число колебаний выходной координаты за время релаксации

$$I_1 := \begin{cases} n \leftarrow \text{длина}(h) \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad x_i \leftarrow h_i - h_y \\ \text{return } \Delta t_1 \cdot \text{simp}(x) \end{cases}$$

26) Линейный интегральный критерий качества;

$$I_2 := \begin{cases} n \leftarrow \text{длина}(h) \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad x_i \leftarrow |h_i - h_y| \\ \text{return } \Delta t_1 \cdot \text{simp}(x) \end{cases}$$

27) Линейный интегральный критерий качества по модулю;

$$I := \begin{cases} n \leftarrow \text{длина}(h) \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad x_i \leftarrow (h_i - h_y)^2 \\ \text{return } \Delta t_1 \cdot \text{simp}(x) \end{cases}$$

10) Квадратичный интегральный критерий качества.

Интерполяция полиномом:

$$\text{polyfit}(x, y) := \begin{cases} n \leftarrow \text{длина}(x) \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad A_{i,0} \leftarrow 1 \\ \quad A_{i,1} \leftarrow x_i \\ \quad \text{for } j \in 2..n-1 \\ \quad \quad A_{i,j} \leftarrow A_{i,j-1} \cdot x_i \\ c \leftarrow A^{-1} \cdot y \\ \text{return } c \end{cases}$$

$$\text{polyval}(c, x) := \begin{cases} m \leftarrow \text{длина}(x) \\ \text{for } j \in 0..m-1 \\ \quad n \leftarrow \text{длина}(c) \\ \quad p_j \leftarrow c_0 \\ \quad x1 \leftarrow x_j \\ \quad \text{for } i \in 1..n-1 \\ \quad \quad p_j \leftarrow p_j + c_i \cdot x1 \\ \quad \quad x1 \leftarrow x1 \cdot x_j \\ \text{return } p \end{cases}$$

$$J_1 := \left[\frac{f_0 + h_y}{2 \cdot J_{кр0,1}} \text{polyval} \left[\text{polyfit} \left[\begin{pmatrix} 200 \\ J_{кр1,1} \\ -200 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, (L)_0 \right] \text{if } \Psi = 0, 1, \text{polyval} \left[\text{polyfit} \left[\begin{pmatrix} -180 \\ J_{кр2,1} \\ 180 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}, (\Psi)_0 \right] \right] \right] \frac{M}{2},$$

$$J_2 := \left(\frac{\omega_{02}}{J_{кр5,1}} \quad \frac{\omega_{p2}}{J_{кр6,1}} \quad \frac{I+I}{2 \cdot J_{кр7,1}} \quad \frac{\Gamma}{J_{кр8,1}} \quad \frac{I_C}{J_{кр9,1}} \quad \frac{I_m}{J_{кр10,1}} \quad \frac{I_{Qc}}{J_{кр11,1}} \quad \frac{I_{Q\phi}}{J_{кр12,1}} \quad \frac{I_{\xi}}{J_{кр13,1}} \quad \frac{t_3}{J_{кр14,1}} \right)^T$$

$$J_3 := \left(\frac{t_{n_min}}{J_{кр15,1}} \quad \frac{t_{n_max}}{J_{кр16,1}} \quad \frac{t_n - t_0}{J_{кр17,1}} \quad \frac{t_{1n-1}}{J_{кр18,1}} \quad \frac{\sigma}{J_{кр19,1}} \quad \frac{Q}{J_{кр20,1}} \quad \frac{\xi}{J_{кр21,1}} \quad \frac{N}{J_{кр22,1}} \quad \frac{|I_1|}{J_{кр23,1}} \quad \frac{I_2}{J_{кр24,1}} \right)^T$$

$$\mathbf{J} := \text{stack}(\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3) \quad \text{tabl3} := \text{augment}(\mathbf{J}_{\text{кр}}^{(0)}, \mathbf{J})$$

$$\mathbf{J}_d := \text{mean}(\mathbf{J})$$

- ДИАМИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ КАЧЕСТВА

tabl2 :=	"17. Время запаздывания, с	"	t_3
	"18. Мин. время нарастания амплитуды $t(n.min)$, с	"	$t_{n_min} - t_0$
	"9. Время реализации 1-го максимума $t(m)$, с	"	τ_1
	"19. Макс. время нарастания амплитуды $t(n.max)$, с	"	$t_{n_max} - t_3$
	"20. Время регулирования $t(p)$, с	"	$t_n - t_0$
	"21. Время, соотв. установившемуся значению $h[t(max)]$, с	"	$\min(1.5 \cdot t_n, t_{n-1})$
	"Фактическая ошибка регулирования Δ , %	"	Δ
	"22. Перерегулирование σ , %	"	σ
	"1. Установившееся знач. коэф. трения	"	h_y
	"Логарифмический декремент затуханий δ	"	δ
	"23. Добротность Q колебательной системы	"	Q
	"24. Степень затухания ψ	"	ψ
	"Корневой показатель колебательности m	"	m
	"4. Частотный показатель колебательности M	"	M
	"Степень колебательности μ	"	μ
	"Частота затухающих колебаний ω , Гц	"	$\frac{\omega}{2\pi}$
	"Коэффициент затухания n , Гц	"	$\frac{\nu}{2\pi}$
	"Частота свободных колебаний ω_0 , Гц	"	$\frac{\omega_0}{2\pi}$
	"Коэффициент демпфирования ξ	"	ξ
	"Период релаксации фрикционных связей τ , с	"	τ
	"Число колебаний за время релаксации N_e	"	N_e
	"25. Число колебаний регулируемой величины N	"	N
	"26. Линейный интегральный критерий качества I_1	"	I_1
	"27. Линейный интегральный критерий качества по модулю I_2 "	"	I_2
	"10. Квадратичный интегральный критерий качества I	"	I
	"ДИНАМИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ КАЧЕСТВА $I(d)$	"	J_d

Диаграмма качества переходного процесса:

$$\text{tp} := \left(\begin{array}{l} \text{if}(t_0 \geq 0, \text{InterpX}(t_3, t_{n_min}, 0.5 \cdot h_y, h_y, 0), 0) \quad \text{if}(t_0 \geq 0, 0, \text{InterpY}(t_3, t_{n_min}, 0.5 \cdot h_y, h_y, 0)) \\ \text{InterpX}(t_3, t_{n_min}, 0.5 \cdot h_y, h_y, h_{max1}) \quad h_{max1} \\ t_n \quad h_{max1} \\ t_n \quad h_y + \left| \frac{h_y - h_{max1}}{\Delta t1} \right| \\ t_{n-1} \quad h_y + \left| \frac{h_y - h_{max1}}{\Delta t1} \right| \\ t_{n-1} \quad h_y - \left| \frac{h_y - h_{max1}}{\Delta t1} \right| \\ t_n \quad h_y - \left| \frac{h_y - h_{max1}}{\Delta t1} \right| \\ t_n \quad h_y - \left| \frac{h_y - h_{max1}}{\Delta t1} \right| \\ \text{InterpX}\left(t_3, t_{n_max}, 0, h_y, h_y - \left| \frac{h_y - h_{max1}}{\Delta t1} \right|\right) \\ t_3 \quad 0 \end{array} \right)$$

Адекватность математической модели по критерию Фишера.

Коэффициент детерминации R^2 - это доля дисперсии зависимой переменной, объясняемая рассматриваемой моделью зависимости, то есть объясняющими переменными. Более точно - это единица минус доля необъяснённой дисперсии случайной ошибки модели в дисперсии зависимой переменной. Его рассматривают как универсальную меру зависимости одной случайной величины от множества других. В частном случае линейной зависимости R^2 является квадратом так называемого коэффициента множественной корреляции между зависимой переменной и объясняющими переменными.

Коэффициент детерминации R^2 принимает значения от 0 до 1. Чем ближе значение коэффициента R к 1, тем сильнее зависимость. Это можно интерпретировать как соответствие модели опытным данным. Для приемлемых моделей предполагается, что коэффициент детерминации должен быть хотя бы не меньше 0,5 (коэффициент множественной корреляции превышает по модулю 0,7). Модели с коэффициентом детерминации выше 0,8 можно признать достаточно хорошими (коэффициент корреляции превышает 0,9). Значение коэффициента детерминации, равное 1, означает функциональную зависимость между переменными. Следует здесь отметить, что высокие значения коэффициента детерминации не свидетельствуют о наличии причинно-следственной зависимости между переменными. Если же коэффициент детерминации отрицателен, то это свидетельствует о крайней неадекватности модели.

Коэффициент множественной корреляции R характеризует меру тесноты связи между откликами, выражает точность прогноза зависимой переменной и показывает, на сколько процентов найденная функция регрессии описывает связь между исходными X и расчётными значениями параметров.

$$\mathbf{r}^{(0)} := \mathbf{t} \quad \mathbf{r}^{(1)} := \boldsymbol{\tau} \quad \mathbf{r}^{(2)} := \mathbf{x} \quad \mathbf{r}^{(3)} := \boldsymbol{\tau} - \mathbf{x}$$

	0	1	2	3	4
$\mathbf{r}^T =$	0	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$
	-1.729	-0.045	7.844	22.43	35.256
	$-1.505 \cdot 10^{-8}$	0	2.913	14.388	30.497
	-1.729	-0.045	4.93	8.042	...

Создадим функцию для вычисления коэффициента детерминации R^2 :

$$kd(x, y) := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \text{длина}(x) \\ \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - y_i)^2 \\ \text{return } 1 - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - \text{mean}(x))^2}{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - y_i)^2} \end{array} \right.$$

и вычислим коэффициент детерминации:

$$R2 := kd(r^{(1)}, r^{(2)})$$

Теперь вычислим коэффициент множественной корреляции:

$$R := \sqrt{R2}$$

Поскольку коэффициент детерминации имеет высокое значение, то можно говорить об адекватности математической модели в пределах диапазона исходных данных.

В случае линейной регрессии с независимыми одинаково распределёнными нормальными случайными ошибками статистика коэффициента детерминации имеет точное (для выборок любого объёма) распределение Фишера.

Определим принадлежность ошибок в определении переходной характеристики нормальному распределению. Для этого необходимо определить такие статистические характеристики, как асимметрия и эксцесс. коэффициент асимметрии позволяет оценить меру отклонения функции данного распределения от математического ожидания. Даже если асимметрия распределений одинакова, их кривые могут значительно различаться: одни будут иметь более высокие и острые пики, другие, наоборот, будут изменяться очень плавно. Показателем остроты пика является коэффициент эксцесса. Для нормального распределения эти характеристики равны нулю.

$$\mu := \text{mean}(r^{(3)})$$

- математическое ожидание ошибок эксперимента:

$$\sigma = 28.037$$

- среднеквадратичное (стандартное) отклонение:

$$A := \text{skew}(r^{(3)})$$

- коэффициент асимметрии:

$$E := \text{kurt}(r^{(3)})$$

- коэффициент эксцесса:

Асимметрия положительна, если вытянут правый участок кривой распределения, и отрицательна, если левый. Если эксцесс меньше (больше) нуля, то распределение имеет более тупую (острую) вершину, чем нормальное.

Для проверки нормальности распределения используется правило трёх стандартных отклонений. Если асимметрия и (или) эксцесс превышают три соответствующих среднеквадратичных отклонения, то гипотезу нормальности распределения отвергают.

Для этого применим формулы Е.И. Пустыльника:

$$G := \text{if} \left[\left| A \right| \leq 3 \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot (n-1)}{(n+1) \cdot (n+3)}} \quad , \text{"нормальное"}, \text{"другое"} \right. \\ \left. \left| E \right| \leq 3 \cdot \sqrt{\frac{24 \cdot n \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{(n+1)^2 \cdot (n+3) \cdot (n+5)}} \right]$$

G = "другое"

Проверим ещё по формулам Н.А. Плохинского:

$$G := \text{if} \left[\begin{array}{l} |A| \leq 3 \cdot \sqrt{\frac{6}{n}} \\ |E| \leq 3 \cdot \left(2 \cdot \sqrt{\frac{6}{n}} \right) \end{array} \right], \text{"нормальное"}, \text{"другое"}$$

где $\sqrt{\frac{6}{n}}$ - ошибка репрезентативности.

G = "другое"

- Результат проверки гипотезы нормальности распределения ошибок модели;

Получили, что мы имеем **G = "другое"** распределение случайных величин ошибок математических моделей. Убедимся в верности нашего утверждения, построив гистограмму распределения.

Гистограмма - это график, позволяющий визуализировать частоту попадания данных экспериментальных выборок в определённый интервал. При её построении область, определяемая по размаху значений данных в выборке, разбивается на некоторое количество промежутков (как правило, равных), и затем подсчитывается количество или процент элементов, оказавшихся на каждом из них.

Вычислим левую границу экспериментальных ошибок модели:

$$\text{lower} := 1.1 \cdot \min(r^{(3)})$$

- правая граница экспериментальных ошибок моделей:

$$\text{upper} := 1.1 \cdot \max(r^{(3)})$$

$$\text{bin} := \text{floor}(\sqrt{n})$$

- количество интервалов;

$$h_\epsilon := \frac{\text{upper} - \text{lower}}{\text{bin}}$$

- шаг изменения аргумента:

$$k := 0 .. \text{bin}$$

- индексы интервалов;

$$\text{int}_k := \text{lower} + h_\epsilon \cdot k$$

- середины границ интервалов:

$$g := \text{hist}(\text{int}, r^{(3)})$$

- гистограмма;

$$k := 0 .. \text{bin} - 1$$

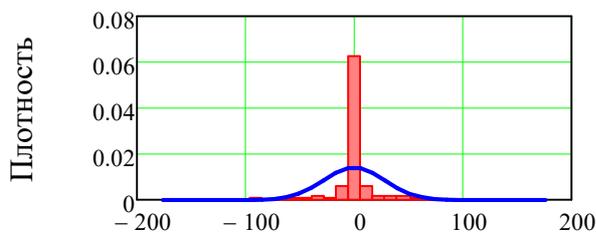
$$\text{ok} := \text{if} \left(\sum_k g_k < n, \text{"диапазон данных мал"}, \text{"все данные"} \right)$$

ok = "все данные"

- результат проверки попадания в интервал всех данных:

Сформируем матрицу из частот попадания данных в интервалы гистограммы, а также теоретического нормального распределения:

$$F_G := \left(\frac{g}{n \cdot h_\epsilon} \quad \text{dnorm}(\text{int}, \mu, \sigma) \right)$$



Экспериментальные ошибки

Рис. - Экспериментальная и теоретическая лотность вероятности ошибок математических моделей

В данном случае в первом приближении **гипотезу нормальности примем** для центральной части распределения.

Применим оценку адекватности по линейной регрессии с независимыми одинаково распределёнными нормальными случайными ошибками

$p := 2$

- количество независимых переменных (реальный и синтезированный сигналы силы тангенциального смещения);

$$F_p := \frac{R2}{1 - R2} \cdot \frac{n - p - 1}{p}$$

- расчётное значение критерия Фишера;

где n - число наблюдений, $n = 1001$;

p - количество независимых переменных, $p = 2$.

$\alpha := 0.05$

- уровень значимости критерия;

$$F_T := qF(1 - \alpha, p - 1, n - p)$$

- табличное значение критерия Фишера;

$$G_0 := \text{if}(F_p \geq F_T, \text{"адекватна"}, \text{"не соответствует"})$$

$G_0 = \text{"адекватна"}$

Так как математическая модель $G_0 = \text{"адекватна"}$, то коэффициент множественной корреляции соответствует анализируемым данным.

Адекватность математической модели по критерию Стьюдента.

Линейный коэффициент корреляции Пирсона r_{xy} - это показатель характера взаимного стохастического влияния изменения двух случайных величин.

Корреляция - статистическая взаимосвязь двух или нескольких случайных величин. При этом изменения одной или нескольких из этих величин приводит к систематическому изменению другой или других величин. Математической мерой корреляции случайных величин служит линейный коэффициент корреляции Пирсона. Создадим функцию, вычисляющую коэффициент корреляции Пирсона:

$$r_{xy}(x, y) := \begin{cases} n \leftarrow \text{длина}(x) \\ \sum_{i=0}^{n-1} [(x_i - \text{mean}(x)) \cdot (y_i - \text{mean}(y))] \\ \text{return } \frac{\sum_{i=0}^{n-1} [(x_i - \text{mean}(x)) \cdot (y_i - \text{mean}(y))]}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - \text{mean}(x))^2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - \text{mean}(y))^2}} \end{cases}$$

Вычислим значения коэффициента корреляции Пирсона для экспериментальных и расчётных значений:

$$r_{xy} := r_{xy}(r^{(1)}, r^{(2)})$$

Если $r_{xy} = 0$, то связь между величинами отсутствует, а изменение $r^{(1)}$ не влияет на изменения $r^{(2)}$. Если $0 < r_{xy} < 1$, то наблюдается прямая функциональная связь, с увеличением $r^{(1)}$ возрастает $r^{(2)}$. Если $-1 < r_{xy} < 0$, то наблюдается обратная функциональная связь, с увеличением $r^{(1)}$ уменьшается $r^{(2)}$. Если $r_{xy} = 1$, то имеем функциональная связь, каждому значению $r^{(1)}$ строго соответствует одно значение $r^{(2)}$, то есть изменения двух величин можно описать математической функцией.

Значимость линейного коэффициента корреляции проверяется на основе t-критерия Стьюдента. Вычислим фактическое значение критерия Стьюдента:

$$t_p := \frac{r_{xy}}{\sqrt{1 - (r_{xy})^2}} \cdot \sqrt{n - 2}$$

$$t_r := qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n - 1\right) \quad \text{- табличное значение критерия Стьюдента;}$$

$$G_1 := \text{if}(t_p \geq t_r, \text{"адекватна"}, \text{"не соответствует"})$$

$G_1 = \text{"адекватна"}$

В нашем случае рассчитанные критерии Фишера и Стьюдента выше, чем табличные, то объяснённая дисперсия существенно больше, чем необъяснённая, и модели можно считать статистически значимыми.

Временные характеристики

ФОРМИРОВАНИЕ РАСЧЁТНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ СОХРАНЕНИЯ В ФАЙЛ

Name := "ПРИМЕР"

FileName := concat(Name, "-", substr(num2str(ξ), 0, 4), "-", substr(num2str(1000y₀), 0, 4), "-", substr(num2str(100

tabl^{<0>} := T tabl^{<1>} := φ_{кп} tabl^{<2>} := φ₂ tabl^{<3>} := φ₃ tabl^{<4>} := φ₄ tabl^{<5>} := φ₅ tabl^{<6>} := φ₆
 tabl^{<7>} := dφ_{кп} tabl^{<8>} := dφ₂ tabl^{<9>} := dφ₃ tabl^{<10>} := dφ₄ tabl^{<11>} := dφ₅ tabl^{<12>} := dφ₆
 tabl^{<13>} := N tabl^{<14>} := τ tabl^{<15>} := x tabl^{<16>} := s_B tabl^{<17>} := F_A tabl^{<18>} := F_B
 tabl^{<19>} := F_C tabl^{<20>} := f1_A tabl^{<21>} := f1_B tabl^{<22>} := f1_C

	0	1	2	3	4
0	59	-5.4·10 ⁻⁸	-4.73·10 ⁻⁵	-2.047·10 ⁻⁶	-7.78·10 ⁻⁵
1	59.001	-1.016·10 ⁻⁸	-4.726·10 ⁻⁵	-2.003·10 ⁻⁶	-5.01·10 ⁻⁵
2	59.002	1.559·10 ⁻⁷	-4.721·10 ⁻⁵	-1.836·10 ⁻⁶	1.615·10 ⁻⁴
3	59.003	4.26·10 ⁻⁷	-4.71·10 ⁻⁵	-1.56·10 ⁻⁶	...

tbl^{<0>} := t1 tbl^{<1>} := h tbl^{<2>} := w

	0	1	2
0	0	0	8.715·10 ⁻³
1	5.8·10 ⁻⁵	4.834·10 ⁻⁴	9.086·10 ⁻³
2	1.16·10 ⁻⁴	9.889·10 ⁻⁴	9.456·10 ⁻³
3	1.74·10 ⁻⁴	1.537·10 ⁻³	0.01
4	2.32·10 ⁻⁴	2.15·10 ⁻³	...

In := (m_{кп} m₂ m₃ m₄ m₅ m₆ C_{кп} C₂ C₃ C₄ C_{4к} C₅ C₆ C_п Δ_B r_k r_A r_B r_C b Q₀ f ξ N_{max} τ

FileName0 := concat(FileName, ".dat")

Исходные данные для расчётов и результаты вычислений

WRITEPRN(FileName0) := In

FileName1 := concat(FileName, "_Данные.dat")

Результаты вычислений

WRITEPRN(FileName1) := tabl

FileName2 := concat(FileName, "_ВрХар.dat")

Временные характеристики

WRITEPRN(FileName2) := tbl

FileName3 := concat(FileName, "_РамкаКачВрХар.dat")

Временные характеристики

WRITEPRN(FileName3) := tp

```

SP(0) := Ω      SP(1) := Wxy
FileName4 := concat(FileName, "_СпХар.dat")
WRITEPRN(FileName4) := SP
FileName5 := concat(FileName, "_ОктСпN.dat")
WRITEPRN(FileName5) := ON
FileName6 := concat(FileName, "_ОктСпT.dat")
WRITEPRN(FileName6) := OT
FileName7 := concat(FileName, "_ОктСпC.dat")
WRITEPRN(FileName7) := OC
FileName8 := concat(FileName, "_ОктСпM.dat")
WRITEPRN(FileName8) := Om
FileName9 := concat(FileName, "_ОктСпQc.dat")
WRITEPRN(FileName9) := OQc
FileName10 := concat(FileName, "_ОктСпQф.dat")
WRITEPRN(FileName10) := OQф

```

Передающая функция периодogramмным методом Уэлча

Октавный спектр нагрузки на объект

Октавный спектр силы тангенциального смещения объекта

Октавный спектр упругих нагрузок на объект

Октавный спектр сил инерционных нагрузок на объект

Октавный спектр сил сопротивления колебаниям объекта

Октавный спектр сил трения объекта, обусловленных фрикционными автоколебаниями

▲ ФОРМИРОВАНИЕ РАСЧЁТНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ СОХРАНЕНИЯ В ФАЙЛ

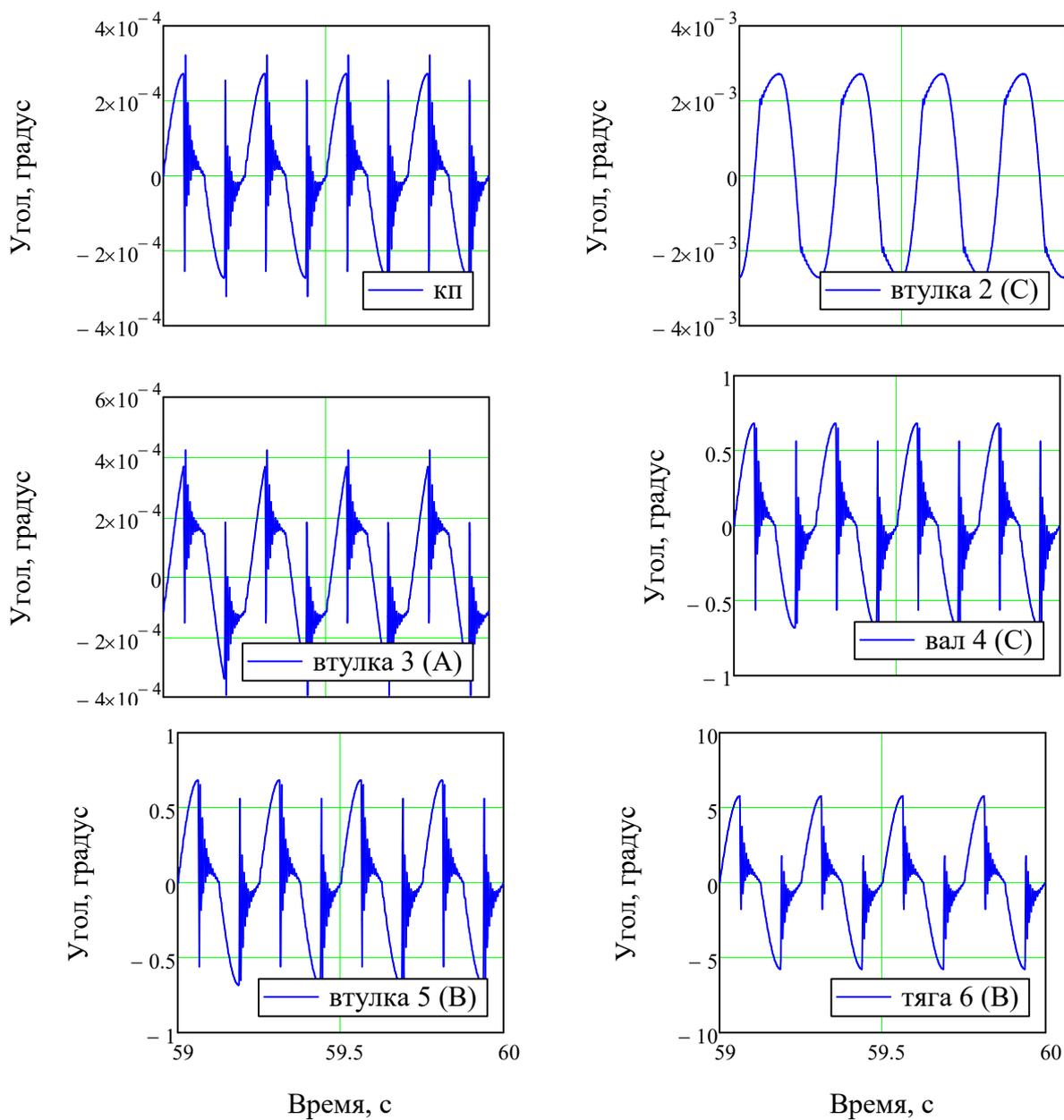


Рис. 1 - Функции угловых смещений модели объекта во времени при амплитуде внешнего воздействия $y_0 \cdot 1000 = 0.5$ мм, частоте колебаний $\omega = 4$ Гц и коэффициенте демпфирования колец 2, 3, 5 $\xi = 0.1$:
а - полукольцевой пружины 1; **б** - кольцевой втулки 2 с осью С; **в** - кольцевой втулки 3 с осью А; **г** - вала-эксцентрика 4 с осью С; **д** - кольцевой втулки 5 с осью В; **е** - вертикальной тяги 6 с осью В

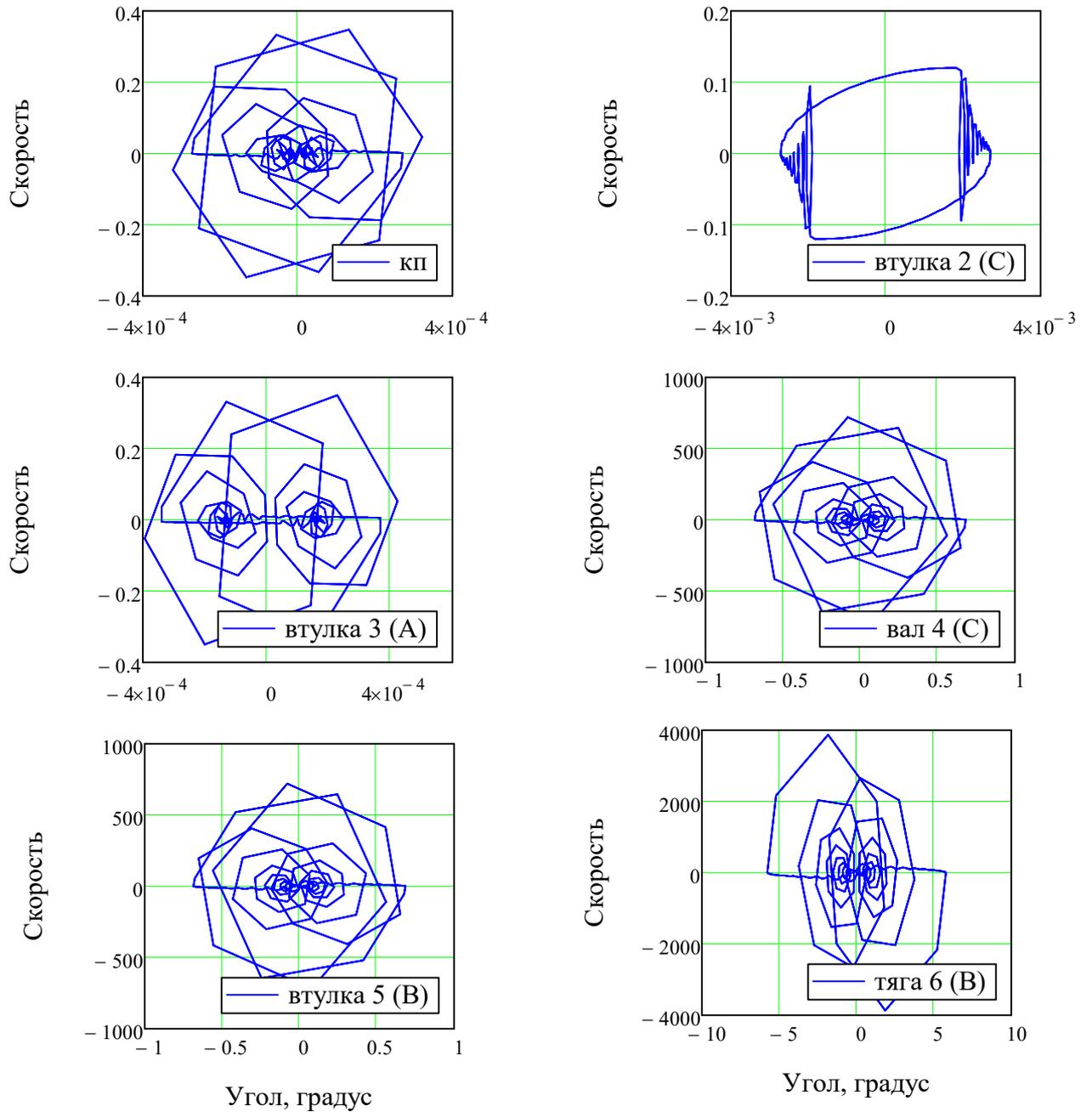


Рис. 2 - Фазовые траектории движения масс модели объекта при амплитуде внешнего воздействия $y_0 \cdot 1000 = 0.5$ мм, частоте колебаний $\omega = 4$ Гц и коэффициенте демпфирования колец 2, 3, 5 $\xi = 0.1$:
а - полукольцевой пружины 1; **б** - кольцевой втулки 2 с осью С; **в** - кольцевой втулки 3 с осью А;
г - вал-эксцентрика 4 с осью С; **д** - кольцевой втулки 5 с осью В; **е** - вертикальной тяги 6 с осью В

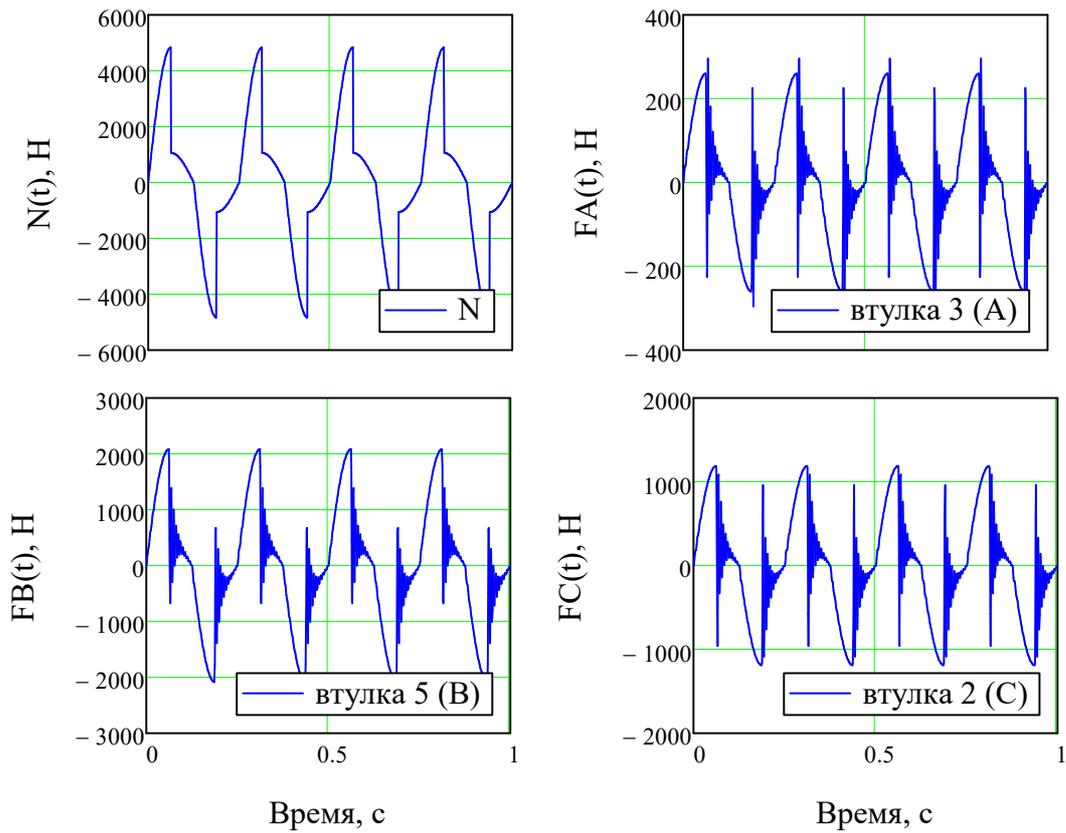


Рис. 3 - Временные характеристики нагрузки внешнего воздействия (а) и упруго-диссипативных связей при амплитуде внешнего воздействия $y_0 \cdot 1000 = 0.5$ мм, частоте колебаний $\omega = 4$ Гц и коэффициенте демпфирования колец 2, 3, 5 $\xi = 0.1$: б - кольцевой втулки 3 (ось А); в - точки крепления вертикальной тяги 6 (ось В); г - кольцевой втулки 2 (ось С)

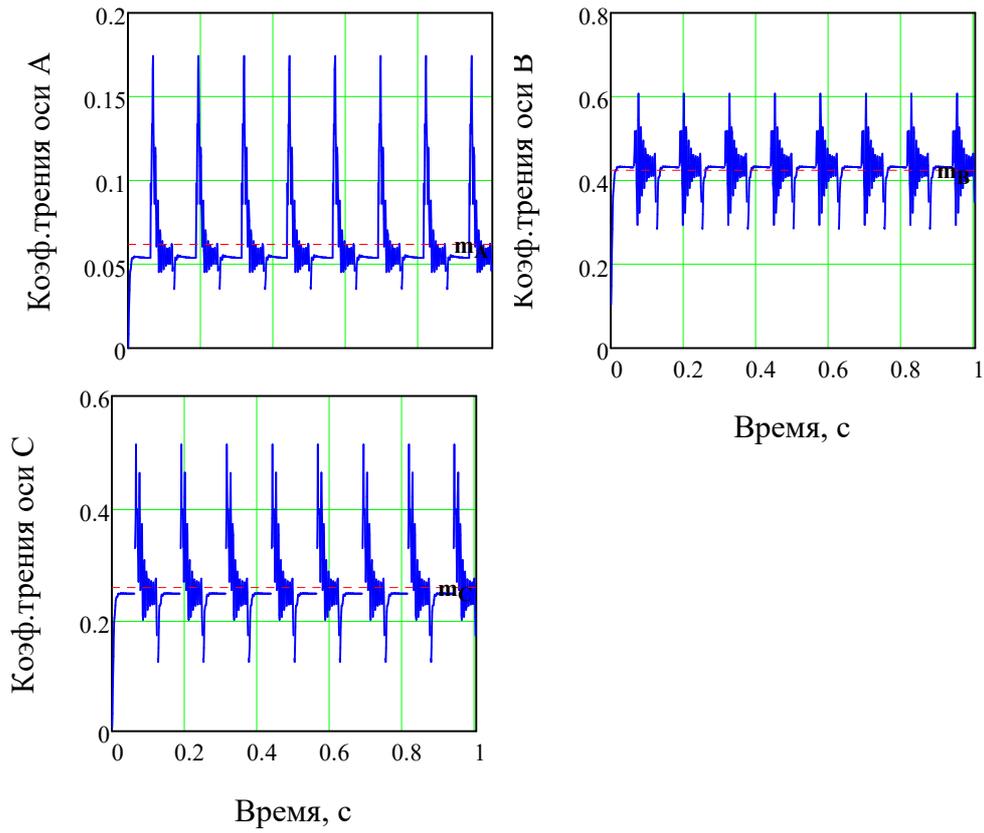


Рис. 4 - Временные характеристики коэффициента трения при амплитуде внешнего воздействия $y_0 \cdot 1000 = 0.5$ мм, частоте колебаний $\omega = 4$ Гц и коэффициенте демпфирования колес 2, 3, 5 $\xi = 0.1$: **а** - кольцевой втулки 3 (ось А); **б** - точки крепления вертикальной тяги 6 (ось В); **в** - кольцевой втулки 2 (ось С)

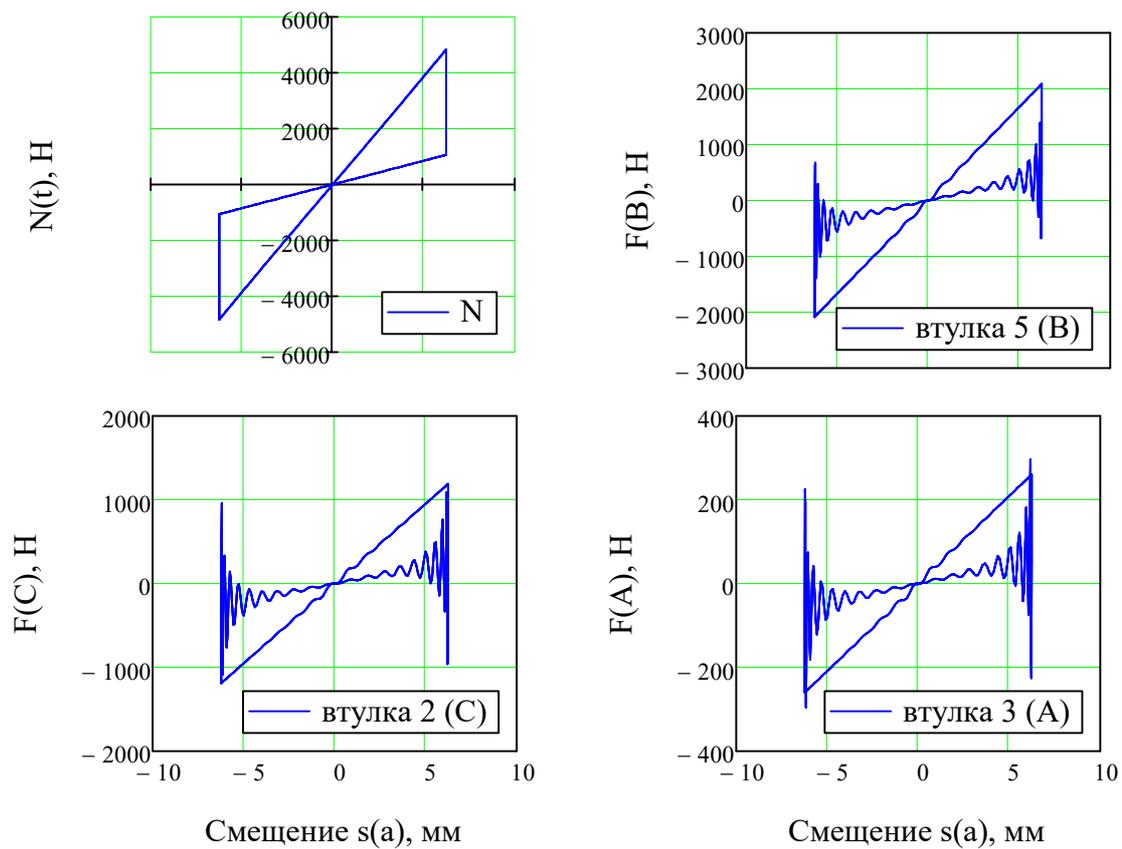


Рис. 5 - Петля гистерезисных потерь энергии объекта при амплитуде внешнего воздействия $y_0 \cdot 1000 = 0.5$ мм, частоте колебаний $\omega = 4$ Гц и коэффициенте демпфирования колец 2, 3, 5 $\xi = 0.1$:
а - нагрузки, воздействующей на объект; **б** - точки крепления вертикальной тяги 6 (ось В); **в** - кольцевой втулки 5 (ось В); **г** - кольцевой втулки 2 (ось С); **д** - кольцевой втулки 3 (ось А);
е - выходного тангенциального смещения полукольцевой пружины 1

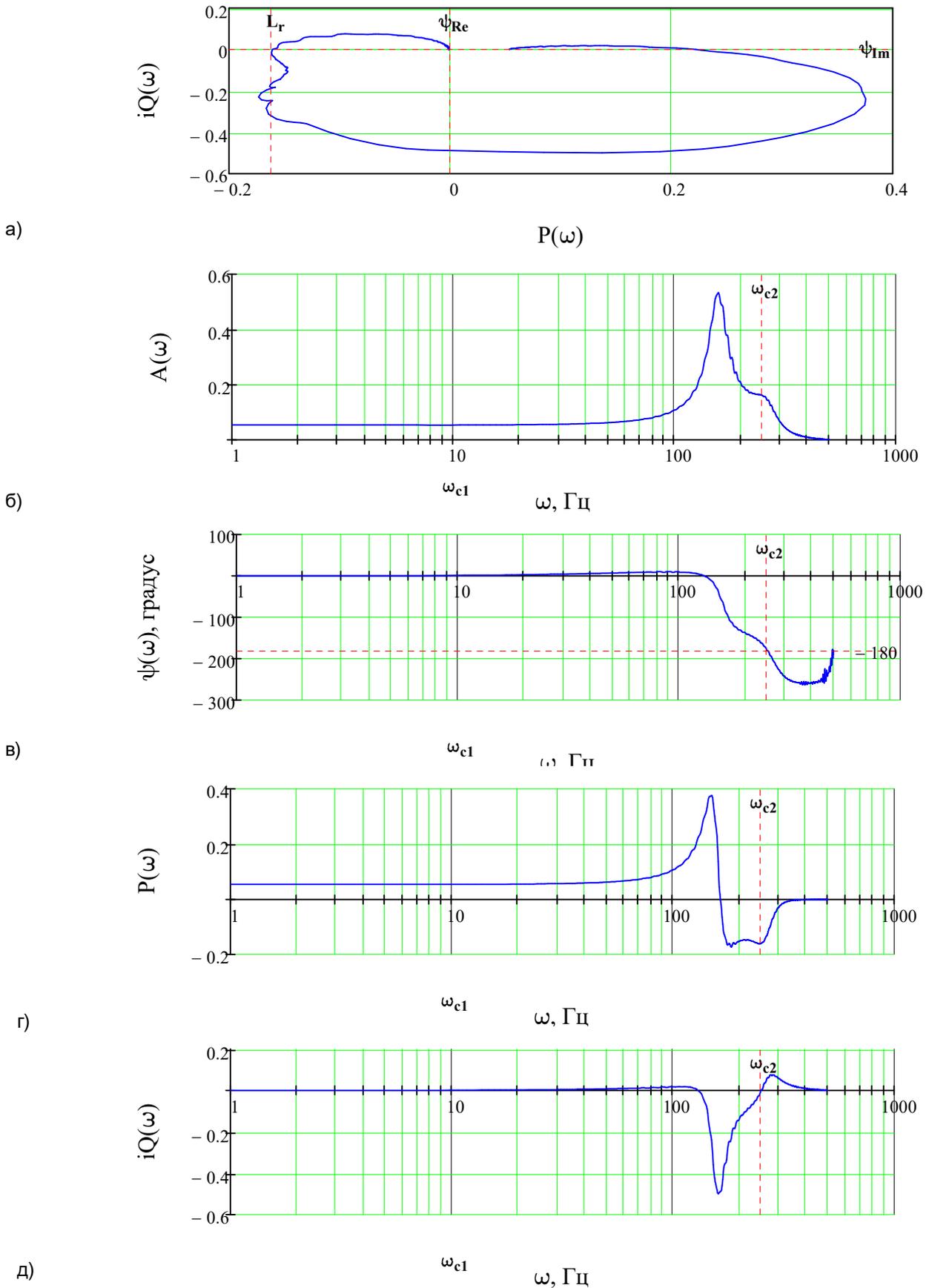
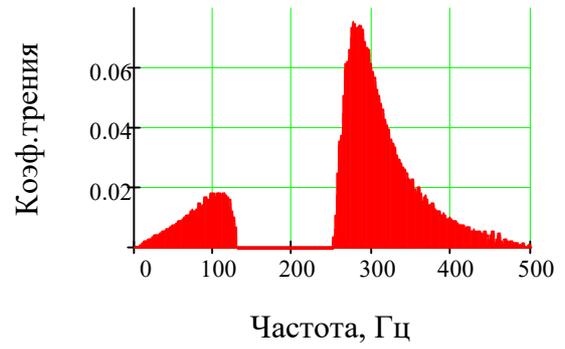
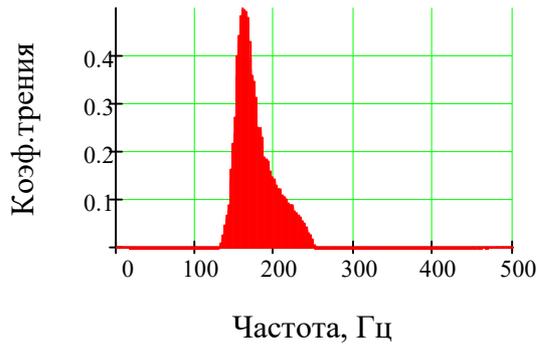
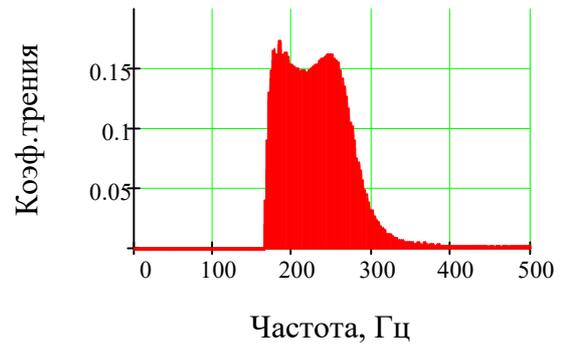
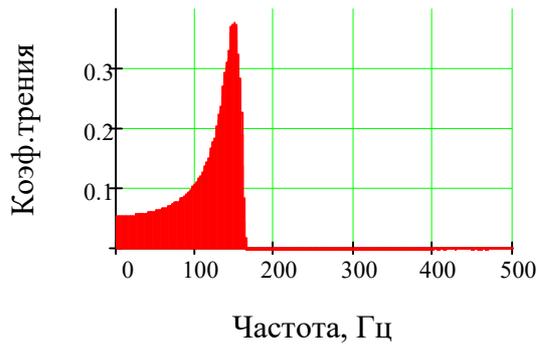


Рис. 6 - Частотные характеристики периодограммным методом Уэлча с использованием весового окна Гаусса при амплитуде внешнего воздействия $y_0 \cdot 1000 = 0.5$ мм, частоте колебаний $\omega = 4$ Гц и коэффициенте демпфирования колец 2, 3, 5 $\xi = 0.1$



а - упругие характеристики; б - инерционные характеристики;
 в - силы сопротивления относительным смещениям;
 г - силы сопротивления, обуславливающие фрикционные автоколебания

Рисунок 7 - Характеристики динамического коэффициента трения

Частотные характеристики объекта:

tabl1 =	"Коэффициент демпфирования	"	0.1
	"Макс. нормальная сила, Н	"	$4.829 \cdot 10^3$
	"Макс. тангенциальная сила, Н	"	295.433
	"1. Установившееся знач. коэф. трения	"	0.054
	"2. Запас устойчивости по амплитуде L, дБ	"	15.857
	"Частота среза, Гц	"	249.047
	"Комплексная амплитуда на частоте среза	"	$-0.161 + 2.362i \cdot 10^{-7}$
	"3. Запас устойчивости по фазе ψ , градус	"	0
	"Частота среза, Гц	"	0
	"Комплексная амплитуда на частоте среза	"	0
	"4. Частотный показатель колебательности M	"	1.001
	"Центральная частота, Гц	"	3.906
	"Комплексная амплитуда для центральной частоты	"	$0.051 + 1.799i \cdot 10^{-4}$
	"5. Частота по условию $A(\omega) = A(0)$, Гц	"	6.218
	"Комплексная амплитуда	"	0.051
	"6. Частота полосы пропускания $A(\omega) = 0.707A(0)$, Гц	"	326.2
"Комплексная амплитуда	"	$-7.998 \cdot 10^{-3} + 0.035i$	
"7. Резонансная частота $\omega(p)$, Гц	"	166.016	
"Комплексная амплитуда на частоте $\omega(p)$	"	$0.166 - 0.416i$	
"8. Ориентировочное время переходного процесса $t(p)$, с	"	0.161	
"9. Ориентировочное время 1-го максимума $t(m)$, с	"	0.08	
"10. Квадратичный интегральный критерий качества I	"	$1.201 \cdot 10^{-4}$	
"11. Квадратичный интегральный критерий качества I'	"	3.838	
"12. Оценка упруго-инерционных сил I(c)	"	0.04	
"13. Оценка инерционных сил, спос. потере устойчивости I(m)"	"	0.036	
"14. Оценка сил трения I(тр.)	"	0.041	
"15. Оценка сил фрикционных автоколебаний I(фр.к.)	"	0.013	
"16. Оценка динамического коэф. демпфирования I(γ)	"	0.583	

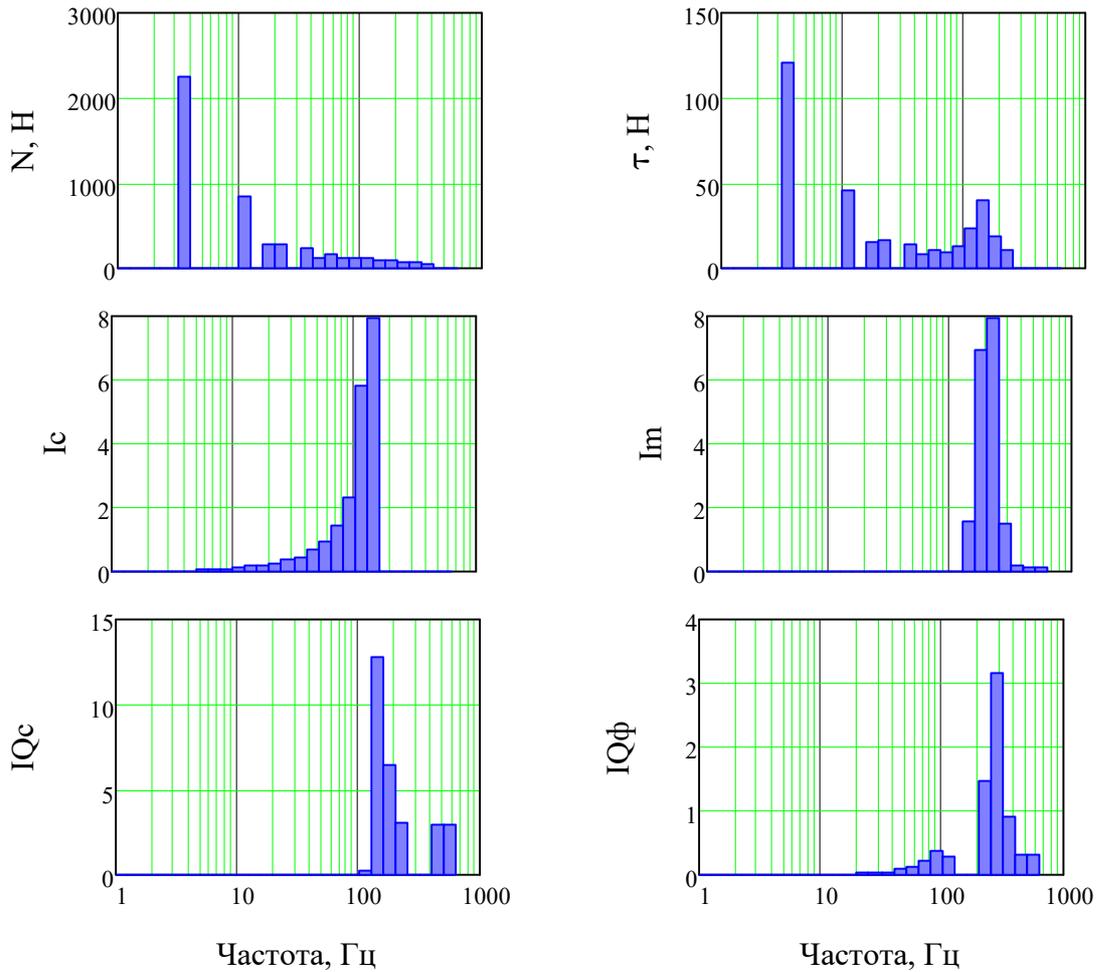


Рис. 8 - 1/ $B = 3$ - долеоктавные спектры среднего квадратичного отклонения: **а** - вертикальной нагрузки; **б** - силы нормального воздействия; **в** - силы тангенциального смещения; **г** - упругих нагрузок на объект; **д** - инерционных воздействий на объект; **е** - сил сопротивления колебаниям объекта; **ж** - сил трения, обусловленных фрикционными автоколебаниями

	0	1	2
$t_0 =$	"ПАРАМЕТР"	"факт"	"по спектру"
1	"СКЗ нагрузки"	2466.717	2462.461
2	"СКЗ силы тангенц. смещения"	143.363	142.636
3	"СКЗ упругих сил"	0.04	20.909
4	"СКЗ сил инерции"	0.036	18.203
5	"СКЗ сил сопротивления"	0.041	25.435
6	"СКЗ сил тр., обусл. фрик. авт."	0.013	7.026

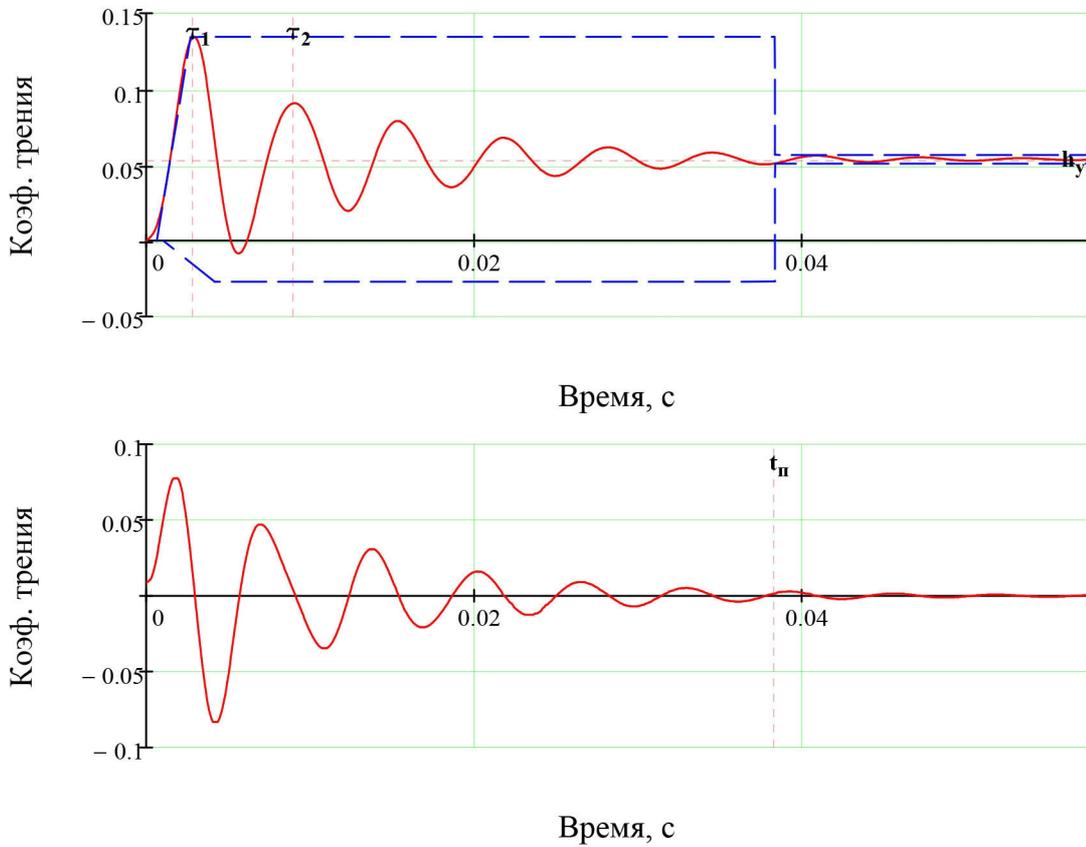


Рис. 9 - Временные характеристики объекта при амплитуде внешнего воздействия $y_0 \cdot 1000 = 0.5$ мм, частоте колебаний $\omega = 4$ Гц и коэффициенте демпфирования колец 2, 3, 5 $\xi = 0.1$: а - переходной функции Хэвисайда $h(t)$ - отклика объекта на единичную функцию включения $1(t)$; б - импульсной функции Дирака $w(t)$ - отклика объекта на импульсную ударную функцию $\delta(t) = 1'(t)$

Временные характеристики функции Хэвисайда

"17. Время запаздывания, с	"	$1.05 \cdot 10^{-3}$
"18. Мин. время нарастания амплитуды $t(n.min)$, с	"	$1.461 \cdot 10^{-3}$
"19. Время реализации 1-го максимума $t(m)$, с	"	$2.9 \cdot 10^{-3}$
"19. Макс. время нарастания амплитуды $t(n.max)$, с	"	$3.266 \cdot 10^{-3}$
"20. Время регулирования $t(p)$, с	"	0.038
"21. Время, соотв. установившемуся значению $h[t(max)]$, с	"	0.057
"Фактическая ошибка регулирования Δ , %	"	-4.798
"22. Перерегулирование σ , %	"	150.401
"1. Установившееся знач. коэф. трения	"	0.054
"Логарифмический декремент затуханий δ	"	0.782
"23. Добротность Q колебательной системы	"	11.586
"24. Степень затухания ψ	"	0.542
"Корневой показатель колебательности m	"	0.124
"4. Частотный показатель колебательности M	"	4.082
"Степень колебательности μ	"	8.039
"Частота затухающих колебаний ω , Гц	"	162.655
"Коэффициент затухания n , Гц	"	20.232
"Частота свободных колебаний ω_0 , Гц	"	163.908
"Коэффициент демпфирования ξ	"	0.122

коэффициент демпфирования ζ		0.125
"Период релаксации фрикционных связей τ , с	"	$7.866 \cdot 10^{-3}$
"Число колебаний за время релаксации N_e	"	1.28
25. Число колебаний регулируемой величины N	"	6.226
26. Линейный интегральный критерий качества I_1	"	$1.301 \cdot 10^{-5}$
27. Линейный интегральный критерий качества по модулю I_2 "	"	$6.611 \cdot 10^{-4}$
'10. Квадратичный интегральный критерий качества I	"	$2.343 \cdot 10^{-5}$
ДИНАМИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ КАЧЕСТВА $I(d)$	"	1.122

Частные критерии качества:

tabl3 =

"Макс. доп. величина стационарного коэф. трения Γ "	1.003
"Мин. доп. запас устойчивости по амплитуде L "	0.502
"Мин. доп. запас устойчивости по фазе ψ "	1
"Макс. доп. частотный показатель колебательности M "	1.07
"Макс. доп. частота по условию $A(\omega) = A(0)$, Гц"	0.013
"Мин. доп. частота по условию $A(\omega) = 0.707A(0)$, Гц"	0.666
"Мин. доп. резонансная частота $A[\omega(p)] = A_{max}$, Гц"	0.874
"Макс. доп. квадр. интегр. критерий качества I "	1.329
"Макс. доп. квадр. интегр. критерий качества I' "	1.279
"Макс. доп. интегр. оценка упруго-инерционных сил $I(c)$ "	0.724
"Макс. доп. интегр. оценка инерционных сил $I(m)$ "	1.095
"Макс. доп. интегр. оценка сил трения $I(\text{сопр.})$ "	0.745
"Макс. доп. оценка сил фрикционных автоколебаний $I(\text{фр.к})$ "	1.346
"Мин. доп. оценка динамич. коэф. демпфирования $I(\gamma)$ "	0.832
"Макс. доп. время запаздывания $t(z)$, с"	1.166
"Макс. доп. мин. время нарастания $t(n.\text{min})$, с"	1.124
"Макс. доп. макс. время нарастания $t(n.\text{max})$, с"	1.004
"Макс. доп. время регулирования $t(p)$, с"	1.32
"Макс. доп. время установившегося значения $h[t(\text{max})]$, с"	1.16
"Макс. доп. перерегулирование σ , %"	5.013
"Макс. доп. добротность Q "	1.103
"Мин. доп. коэф. демпфирования ξ "	0.13
"Макс. доп. число колебаний регулируемой величины N "	2.075
Макс. доп. линейный интегральный критерий качества $I(1)$ "	0.087
Макс. доп. линейный интегральный критерий качества $I(2)$ "	1.377

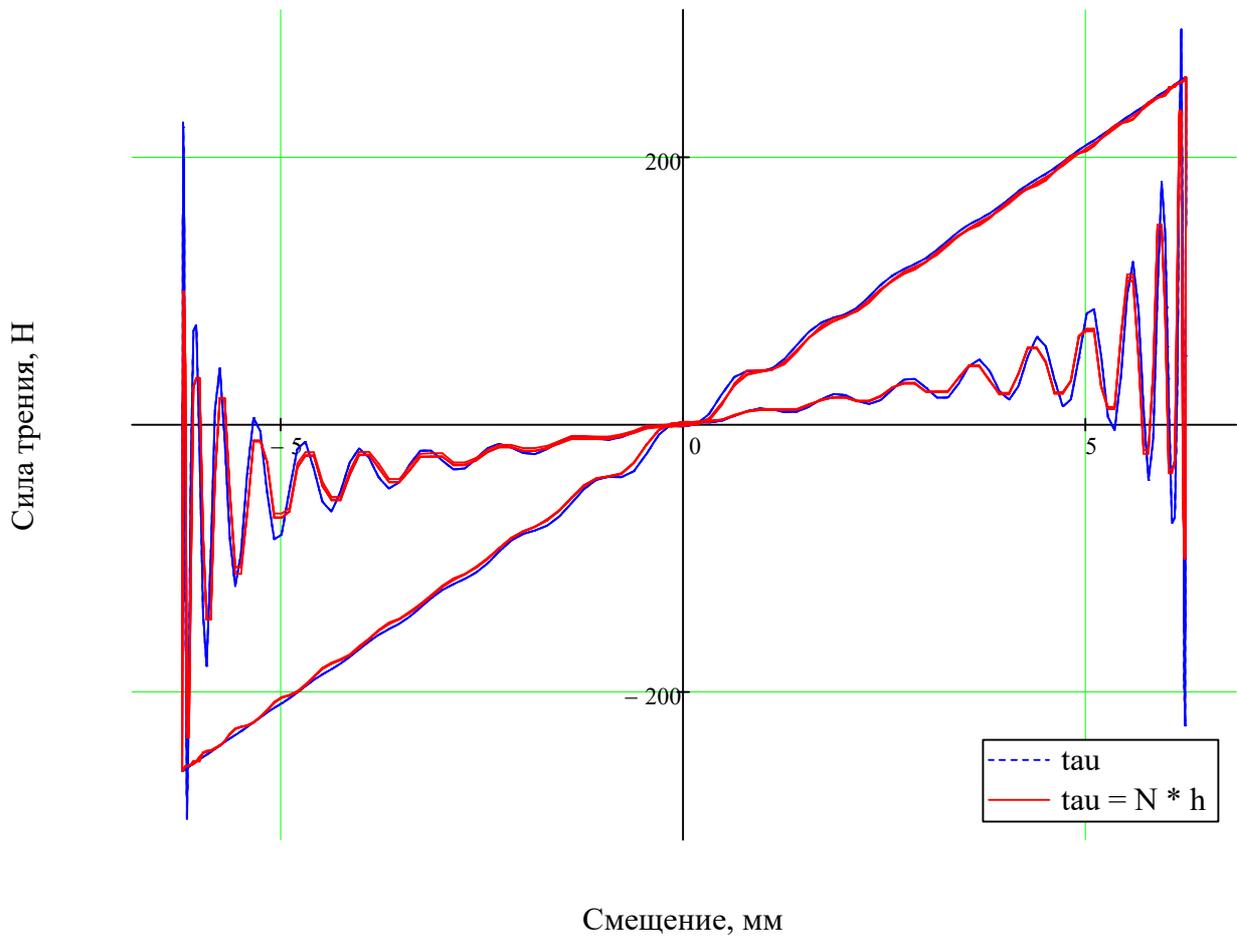
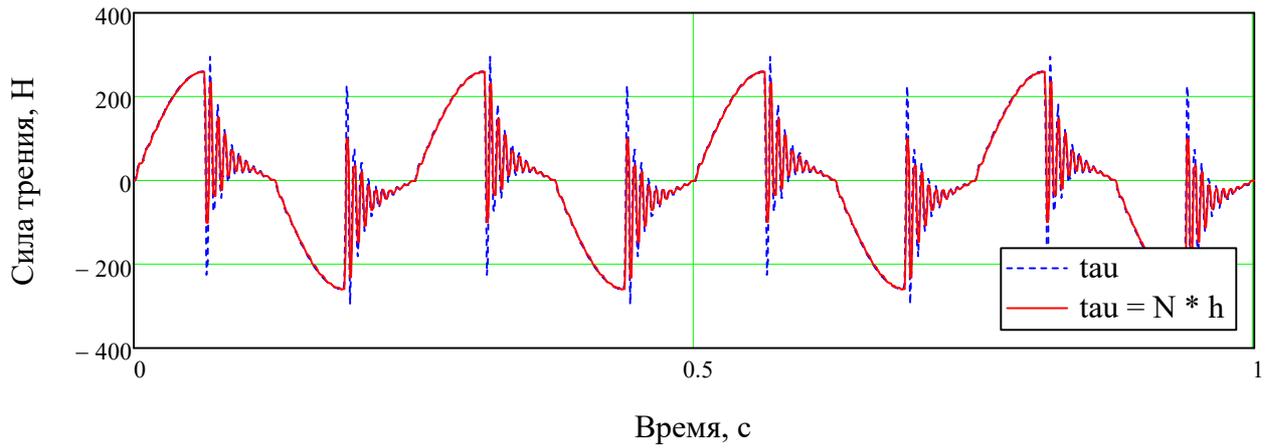


Рис. 10 - Использование интеграла Дюамеля позволяет приближённо оценить вид переходного процесса по вещественной частотной характеристике (см. рис. 6,г), то есть определить отклик системы $\tau(t)$ по заданному внешнему воздействию $N(t)$ и переходной функции Хэвисайда $h(t)$, при амплитуде внешнего воздействия $y_0 \cdot 1000 = 0.5$ мм, частоте колебаний $\omega = 4$ Гц и коэффициенте демпфирования колец 2, 3, 5 $\xi = 0.1$

Динамический критерий качества

Средняя квадратичная ошибка синтеза

$J_d = 1.122$

$\sigma = 28.037$

Коэффициент детерминации

$R^2 = 0.962$

Коэффициент множественной корреляции

$R = 0.981$

Уровень значимости критерия

$\alpha = 0.05$

Расчётное значение критерия Фишера

$F_p = 12548.1$

Табличное значение критерия Фишера	$F_T = 3.85$
Адекватность модели по критерию Фишера	$G_0 = \text{"адекватна"}$
Расчётное значение коэффициента корреляции Пирсона	$r_{xy} = 0.981$
Фактическое значение критерия Стьюдента	$t_p = 158.6$
Табличное значение критерия Стьюдента	$t_T = 1.96$
Адекватность модели по критерию Стьюдента	$G_1 = \text{"адекватна"}$

Учебное издание

Озябкин Андрей Львович

**ОЦЕНКА ДИНАМИКИ И ПРОЧНОСТИ
ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ МАШИН**

Печатается в авторской редакции

Технический редактор

Учебно-методическое пособие для выполнения
практических занятий, контрольных и курсовых работ

Подписано к печати __. __. 17. Формат 60x84/19
Бумага газетная. Ризография. Усл.печ.л. ____.
Тираж ____ экз. Изд. № ____ . Заказ ____ .

Редакционно-издательский отдел ФГБОУ ВО РГУПС

Адрес университета: 344038, г. Ростов-на-Дону, пл. им. Ростовского
Стрелкового Полка Народного Ополчения, д. 2.