РОСЖЕЛДОР
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»
(ФГБОУ ВО РГУПС)

Д.А. Рудиков, Т.А. Финоченко, А.Г. Хвостиков

НАДЁЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ТЕХНОГЕННЫЙ РИСК. ПРАКТИКУМ

Учебно-методическое пособие

Ростов-на-Дону
2020

УДК 62-192 : 504.1(07) + 06

Рецензент – доктор технических наук, профессор В.А. Финоченко

Рудиков, Д.А.

Надёжность технических систем и техногенный риск. Практикум: учебно-методическое пособие / Д.А. Рудиков, Т.А. Финоченко, А.Г. Хвостиков; ФГБОУ ВО РГУПС. – Ростов н/Д, 2020. – 35 с.: ил. – Библиогр.: с. 33.

Изложены основные понятия, определения и критерии, используемые в теории надёжности. Рассмотрены общие методы расчёта надёжности технических систем различного назначения, как нерезервированные, так и резервированные.

Пособие разработано в соответствии с рабочей программой дисциплины «Надёжность технических систем и техногенный риск» на основе ФГОС ВО по специальности 20.03.01 «Техносферная безопасность», профиль «Управление транспортной безопасностью и охраной труда», и содержит требования по подготовке, выполнению и оформлению результатов лабораторных работ.

Предназначено для студентов направления подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность» всех форм обучения.

Одобрено к изданию кафедрой «Безопасность жизнедеятельности».

Оглавление

Лабораторная работа № 1
ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ, БАЗИРУЮЩИХСЯ НА АППАРАТЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЗАКОНЫ ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Цель работы: Приобретение навыков компьютеризованных расчётов вероятностей случайных событий, а также определения числовых характеристик случайных величин.

Краткие теоретические сведения

Теория вероятностей как математическая основа теории надёжности

Как известно, теория надёжности технических систем (ТС), в первую очередь, изучает поведение системы с точки зрения возможности появления внезапных или постепенных отказов. Отмеченные отказы представляют собой случайные события, что обусловливает широкое использование в данной области подходов и результатов теории вероятностей.

На практике инженерные расчёты надёжности ТС предполагают выполнение операций над случайными событиями, вычисление их вероятностей применительно к различным ситуациям. Приведём ряд соотношений, вытекающих из теории вероятностей и применяемых при расчётах надёжности ТС.

Вероятности композиций случайных событий

Правила выполнения операций, которым соответствуют вероятности результирующих событий, представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Операция (искомая величина)	Условие	Соотношение
1	**2**	**3**
Вероятность события	A – случайное событие	$0 \le P(A) \le 1$
Вероятность суммы несовместных событий	События A_1, A_2, ..., A_n несовместны $(A_i A_j = \varnothing,\ i \ne j)$	$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_1\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
Сумма вероятностей полной группы попарно несовместных событий	U – достоверное событие $\sum_{i=1}^{n} A_i = U$, $A_i A_j = \varnothing, i \ne j$	$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_1\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(U) = 1$
Сумма вероятностей противоположных событий	A и $\overline{A}$ – противоположные события	$P(A) + P(\overline{A}) = 1$
Вероятность суммы совместных событий	События A и B совместны $(AB \ne \varnothing)$	$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Окончание табл. 1.1

1	2	3
Вероятность произведения двух событий (общий случай)	$P(B\|A)$ – условная вероятность события B при наличии события A	$P(AB) = P(A) \cdot P(B\|A)$
Вероятность произведения независимых событий	$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ – независимые события	$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$

Случайные величины и их характеристики

Одним из важнейших понятий теории вероятностей является понятие *случайной величины (СВ)*. Закон (функция) распределения F для случайной величины X представляет вероятность P того, что она примет значение, меньшее некоторой заданной величины x:

$$F(x) = P\{X < x\}. \qquad (1.1)$$

При этом различают два типа СВ: непрерывные и дискретные. Плотность распределения непрерывной СВ X в точке x определяется выражением:

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx} F(x). \qquad (1.2)$$

График плотности распределения $f(x)$ называют кривой распределения.

Вероятность попадания СВ в интервал от α до β и функцию $F(x)$ её распределения при известной функции $f(x)$ можно найти как

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx, \qquad (1.3)$$

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dt. \qquad (1.4)$$

Отметим основные свойства плотности распределения:

$$f(x) \geq 0, \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1. \qquad (1.5)$$

Для описания свойств дискретной случайной величины обычно используется так называемый ряд распределения, который может быть представлен в виде таблицы значений вероятностей p_i того, что СВ X примет значения x, $i = \overline{1,n}$:

$$p_i = P\{X = x_i\}, \quad i = \overline{1,n}, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (1.6)$$

Числовые характеристики случайных величин

Во многих задачах определении показателей надёжности ТС требуется найти отдельные числовые характеристики, указывающие на существенные черты распределения (например, математическое ожидание, дисперсию и т. д.). Такие числовые характеристики и расчётные формулы для их нахождения представлены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Характеристика	**Тип случайной величины**	
	Дискретная	***Непрерывная***
Математическое ожидание (МО) $M\left[X\right]=m_x$	$M\left[X\right]=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i$	$M\left[X\right]=\int_{-\infty}^{\infty}xf\left(x\right)dx$
Начальный момент s-го порядка $\alpha_s=M\left[X^s\right]$	$\alpha_s\left[X\right]=\sum_{i=1}^{n}x_i^s p_i$	$\alpha_s\left[X\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x^s f\left(x\right)dx$
Центральный момент порядка s $\mu_s\left[X\right]=M\left[\overset{0}{X}{}^s\right]$	$\mu_s\left[X\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-m_x\right)p_i$	$\mu_s\left[X\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-m_x\right)^s f\left(x\right)dx$
Дисперсия D $D\left[X\right]=D_x=\mu_2\left[X\right]$	$D\left[X\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-m_x\right)^2 p_i$	$D\left[X\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-m_x\right)^2 f\left(x\right)dx$

Примечание: $\overset{0}{X}=X-m_x$ – центрированная случайная величина, $\sigma\left[X\right]=\sigma_x=\sqrt{D\left[X\right]}=\sqrt{D_x}$ – среднее квадратическое отклонение (СКО).

Наиболее применимые в теории надёжности законы распределения случайных величин

Наиболее употребительными при решении задач оценивания надёжности ТС являются экспоненциальный и нормальный законы распределения. При этом в качестве случайной величины чаще всего фигурирует наработка T системы до отказа, которая соответствует функции распределения $F\left(t\right)$. В некоторых ситуациях целесообразно оперировать функцией надежности, характеризующей вероятность противоположного отказу события:

$$P\left(t\right)=P\left\{T\geq t\right\}=1-F\left(t\right). \tag{1.7}$$

Функции и плотности распределения для вышеназванных законов распределения СВ представлены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Закон распределения	**Выражения для функций**		**Параметр**
	Функция распределения	***Плотность распределения***	
Экспоненци-альный	$F(t)=1-e^{-\lambda t}$	$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$	λ – интен-сивность отказов
Нормальное распределение	$F(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$	$f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}}$	σ – СКО, m – МО

Для практических расчётов в случае нормального закона распределения применяют функцию Лапласа.

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-x^2}{2}}dx, \qquad (1.8)$$

где

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}. \qquad (1.9)$$

При этом производится переход от случайной величины T к величине, имеющей нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию:

$$Z=\frac{T-m}{\sigma}. \qquad (1.10)$$

Функция $\varphi(z)$ чётная, т. е. $\varphi(-z)=\varphi(z)$, и, следовательно,

$$\Phi(-z)=1-\Phi(z). \qquad (1.11)$$

Для значений функции $\Phi(z)$ составлены таблицы; она также является встроенной функцией многих программных пакетов.

Задание на выполнение работы

С использованием программы MS Excel (либо MathCAD) найти решения следующих задач.

1. Имеются 4 ящика с черными и белыми шарами:

1) в первом ящике – 2 белых и 3 черных шара;
2) во втором ящике – 3 белых и 1 черный шар;
3) в третьем ящике – 3 белых и 3 черных;
4) в четвёртом ящике – 2 белых и 2 черных.

Из каждого ящика наугад вынимают по шару. Найти вероятность того, что все они будут одного цвета.

2. Прибор состоит из трёх блоков, причём первый может отказать с вероятностью 0,01, второй – с вероятностью 0,001, третий – с вероятностью 0,002. Перед вводом в эксплуатацию прибор проходит два вида испытаний.

При первом виде испытаний дефект первого блока будет выявлен с вероятностью 0,7; второго – с вероятностью 0,5; третьего –с вероятностью 0,4.

При втором виде испытаний дефект первого блока будет выявлен с вероятностью 0.9; второго – с вероятностью 0,2; третьего – с вероятностью 0,6.

Прибор считается исправным, если исправны все три блока.

Найти: 1) вероятность того, что неисправный прибор будет выпущен в эксплуатацию; 2) вероятность отказа прибора.

3. Дискретная случайная величина *X* распределена по закону, заданному рядом

x_i	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,2	1,3	1,4	1,5
p_i	0,001	0,002	0,007	0,12	0,4	0,22	0,1	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01

Найти: 1) математическое ожидание m_x; 2) дисперсию D_x.

4. Значение сопротивления резистора имеет номинал 1 кОм, погрешность задания этой величины составляет 0,1 % и подчиняется нормальному закону распределения.

Найти вероятность того, что значение сопротивления будет лежать в интервале от 999,5 Ом до 999,8 Ом.

5. Прибор состоит из основного блока и такого же резервного. Для каждого из них вероятность безотказной работы подчиняется экспоненциальному закону: $P_i(t) = e^{-\lambda t}$, $i = 1,2$; $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ ч$^{-1}$. Оба блока работают 50 часов. Прибор отказывает при отказе обоих блоков. Найти вероятность отказа прибора.

Содержание отчёта:

1 Цель работы.

2 Расчётные формулы для решения задач.

3 Результаты расчётов.

Лабораторная работа № 2
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЁЖНОСТИ НЕВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ СИСТЕМ

Цель работы: Ознакомление с методикой и приобретение навыков расчёта показателей надёжности невосстанавливаемых систем (НС).

Краткие теоретические сведения

Наиболее применимые в теории надёжности законы распределения случайных величин *(продолжение)*

Кроме тех законов распределения, которые были изучены в процессе выполнения лабораторной работы № 1, в решении задач оценивания надёжности ТС нашли себе применение усечённый нормальный закон распределения и распределение Вейбулла – Гнеденко. Функции и плотности распределения для вышеназванных законов представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Закон распределения	Функция распределения	Плотность распределения	Параметры
Нормальное распределение (усечённый закон)	$F(t)=\begin{cases} 0, t\le 0 \\ \dfrac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^t e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx \\ t\ge 0 \end{cases}$	$f(t)=\dfrac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}}$	σ, m
Распределение Вейбулла – Гнеденко	$F(t)=1-e^{-\alpha t^k}$	$f(t)=\alpha k t^{k-1}e^{-\alpha t^k}$	α, k

Примечание: c – нормирующий коэффициент: $c=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\displaystyle\int_{-\frac{m}{\sigma}}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}}dz}$.

Вероятности отказа и безотказной работы НС

Статистическая оценка $F(t)$ наработки НС до отказа при условии, что на испытания поставлено N идентичных систем, находящихся в одинаковых условиях, а испытания каждой системы доводятся до её отказа, соответствует формуле

$$F(t)=\frac{N(t)}{N}, \tag{2.1}$$

где $N(t)$ – число систем, отказавших к моменту времени t, т. е. на интервале $(0, t)$, причём $F(t)$ = 0, а при $t\to\infty$ величина $F(t)\to 1$.

Статистическая оценка $Q(t_1)$ вероятности отказа $Q(t_1)$ при фиксированном значении $t = t_1$:

$$Q(t_1) = \frac{N(t_1)}{N}. \qquad (2.2)$$

Статистическая оценка $P(t_1)$ вероятности безотказной работы $P(t_1)$ НС на интервале (0, t_1):

$$P(t_1) = 1 - Q(t_1) = \frac{N - N(t_1)}{N}. \qquad (2.3)$$

Интенсивность отказов НС

Интенсивность отказов $P(t_1)$ невосстанавливаемой системы определяется как условная плотность вероятности её отказа в момент *t* при условии, что до этого момента отказы не возникали:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left[-\frac{1 - P(t, t + \Delta t)}{\Delta t}\right] = -\frac{dP(t)}{dt}\frac{1}{P(t)}. \qquad (2.4)$$

Статистическая оценка $\lambda(t)$ интенсивности отказов определяется равенством:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{N\left(t - \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t\left[N - N(t)\right]}, \qquad (2.5)$$

где $N\left(t - \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right)$ – число систем, отказавших на интервале $\left(t - \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right)$; $N - N(t)$ – число систем, работоспособных к моменту *t*.

Средняя наработка НС до отказа

К числу показателей надёжности НС, являющихся числовыми характеристиками случайных величин, относится средняя наработка до отказа (среднее время безотказной работы) – математическое ожидание случайной величины *T* наработки до отказа (или времени безотказной работы). При этом:

$$\tau = \int_0^\infty p(t)\,dt. \qquad (2.6)$$

Статистическая оценка $\tilde{\tau}$ средней наработки τ до отказа

$$\tilde{\tau} = \sum_{i=1}^{N} \frac{t_i}{N}, \qquad (2.7)$$

где t_i – наработка до отказа *i*-й системы; *N* – число систем.

Отметим, что средняя наработка τ до отказа равна:

а) для случая экспоненциального закона распределения:

$$\tau = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}; \tag{2.8}$$

б) для случая нормального распределения

$$t = m; \tag{2.9}$$

в) для случая усечённого нормального распределения

$$\tau = m + \sigma c_1, \tag{2.10}$$

где $c_1 = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-m^2}{2\sigma^2}}$.

Задание на выполнение работы

С использованием программы MS Excel (либо MathCAD) найти решения следующих задач.

1. На испытания отправлено 50 образцов новой технической системы. К моменту t_1 = 10 000 часов (ч) число отказавших систем $N(t_1)$ = 3; к моменту t_2 = 11 000 ч – $N(t_2)$ = 4; к моменту t_3 = 12 000 ч – $N(t_3)$ = 6.

Найти статистические оценки:

1) вероятности безотказной работы $P(t_1)$, i = 1, 2, 3;

2) вероятности отказа $Q(t_1)$, i = 1, 2, 3;

3) интенсивности отказов $\lambda(t_2)$.

2. Найти оценку $\tilde{\tau}$ средней наработки системы до отказа, если испытано 10 образцов этой системы (т. е. N = 10), и каждый i-й образец (i = 1, 2, ..., 10) проработал до отказа время t_i, указанное в таблице.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i, ч	12 000	7200	10 000	5000	11 000	7000	7800	9100	9800	8000

3. Наработка системы до отказа подчиняется экспоненциальному закону $P(t) = e^{-\lambda t}$, с интенсивностью отказов $\lambda = 2 \cdot 10^{-3}$ 1/ч.

Необходимо:

1) найти вероятность $Q(t_1)$ отказа системы к моменту времени t_1 = 1200 ч;

2) найти среднюю наработку τ системы до отказа;

3) построить график функции $Q(t)$.

4. Наработка системы до отказа подчиняется нормальному закону, усечённому на интервале $(0,\infty)$ с параметрами распределения m = 4000 ч, σ = 1000 ч.

Необходимо:

1) найти вероятность безотказной работы для момента времени t_1 = 1200 ч;

2) найти среднюю наработку τ системы до отказа;

3) построить график изменения вероятности безотказной работы в интервале от t = 100 ч до t = 500 ч.

5. Наработка системы до отказа подчиняется распределению Вейбулла. При этом имеет место «участок приработки» на характеристике для интенсивности отказов. Параметры распределения: α = 10^{-3}; k = 0,5.

Найти вероятность $P(t)$ безотказной работы и интенсивность $\lambda(t)$ отказов системы при: 1) $t = t_1$ = 100 ч; 2) $t = t_2$ = 500 ч.

Содержание отчёта:

1 Цель работы.

2 Расчётные формулы для решения задач.

3 Результаты расчётов, необходимые графики.

Лабораторная работа № 3
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЁЖНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ СИСТЕМ

Цель работы: Ознакомление с методикой и приобретение навыков расчёта показателей надёжности восстанавливаемых систем (ВС).

Краткие теоретические сведения

Потоки отказов восстанавливаемых систем

После каждого отказа ВС следует её восстановление, которое заключается в замене отказавшего элемента идентичным работоспособным или в проведении ремонтных операций. Так же, как и наработка до первого отказа невосстанавливаемой системы, моменты наступления отказов ВС являются случайными. Нередко случайной является и продолжительность работ по проведению восстановления.

Последовательность отказов, происходящих один за другим в случайные моменты времени, носит название потока отказов. Понятие потока отказов является одним из основных при рассмотрении систем с восстановлением.

Возможны два основных способа задания потока отказов. Первый способ заключается в рассмотрении некоторого дискретного случайного процесса $\eta(t)$ – числа отказов на промежутке времени (0, *t*). Второй способ заключается в изучении последовательности непрерывных случайных наработок $\xi_1 = t_1$, $\xi_2 = t_2 - t_1$, $\xi_3 = t_3 - t_2$, ... между отказами.

Введём некоторые дополнительные понятия. Ведущая функция потока определяется как математическое ожидание числа отказов за время *t*:

$$W(t) = M\left[\eta(t)\right]. \tag{3.1}$$

Очевидно, что $W(t)$ – неотрицательная неубывающая функция. Эта функция к тому же практически всегда дифференцируема, и существует величина

$$\omega(t) = \frac{dW(t)}{dt}, \tag{3.2}$$

которую называют параметром потока отказов.

Показатели надёжности восстанавливаемых систем

*Показатели безотказности****.*** В соответствии с двумя способами задания потока отказов для восстанавливаемых систем можно применять различные показатели безотказности. При задании потока отказов как дискретного случайного процесса $\eta(t)$ – числа отказов на интервале (0, *t*) показателем безотказности является параметр потока отказов $\omega(t)$, определяемый соотношением

(3.2). Для статистического определения параметра потока отказов используются данные испытаний одинаковых ВС в одинаковых условиях эксплуатации и при одинаковом техническом обслуживании. В момент t = 0 все системы работоспособны и начинают работу. Обозначим $n_i(t)$ число отказов i-й системы $\left(i=\overline{1,N}\right)$ на интервале (0, t). Тогда

$$\omega(t)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\left[n_i(t+\Delta t)-n_i(t)\right]}{N\cdot\Delta t}. \tag{3.3}$$

Таким образом, параметр потока отказов характеризуется отношением числа отказов системы на некотором малом отрезке времени к значению этого отрезка.

При задании потока отказов как последовательности случайных величин ξ_1, ξ_2, ... наработок между отказами (в предположении, что эти наработки имеют одинаковое распределение с плотностью $f(t)$) показателем безотказности является средняя наработка на отказ

$$\theta=M(\xi_i)=\int_0^{\infty}tf(t)dt,\ (i=1,2,...). \tag{3.4}$$

Отметим, что в простейшем потоке средняя наработка на отказ θ и параметр потока ω связаны соотношением $\theta=\dfrac{1}{\omega}$.

Для статистического определения средней наработки на отказ θ будем, как и выше, испытывать N одинаковых восстанавливаемых систем. Предположим, что каждая из них проработала в течение времени t. Тогда

$$\theta=\frac{Nt}{\sum_{i=1}^{N}n_i(t)}. \tag{3.5}$$

Показатели ремонтопригодности. На практике продолжительность восстановления почти всегда существенно меньше времени между отказами. Однако нельзя не учитывать продолжительность восстановления для решения многих задач надёжности (например, расчёта потерь из-за отказов, количества необходимого ремонтного персонала и др.).

Обозначим через T_B случайную величину – продолжительность восстановления работоспособного состояния системы после отказа (далее сокращённо – время восстановления). Показателями ремонтопригодности являются вероятность $G(t)$ восстановления работоспособного состояния за заданное время t_1 и среднее τ_B время восстановления соответственно:

$$G(t_1)=P\{T_B<t_1\},\quad \tau_B=M[T_B]. \tag{3.6}$$

Статистические определения этих показателей:

$$G(t_1)=\frac{l(t_1)}{m},\quad \tilde{\tau}_B=\sum_{i=1}^{m}\frac{\tau_{Bi}}{m}, \tag{3.7}$$

где $l(t_1)$ – число восстановлений, длительность которых меньше t_1; m – общее число восстановлений; τ_{Bi} – время восстановления после i-го отказа.

Комплексные показатели надёжности. Комплексные показатели отражают совместно безотказность и ремонтопригодность.

Коэффициентом готовности $K_Г$ называют вероятность того, что система окажется работоспособной в произвольно выбранный момент времени в установившемся процессе эксплуатации. Можно показать, что в альтернирующем процессе восстановления коэффициент готовности

$$K_Г=\frac{\theta}{\theta+\tau_B}. \tag{3.8}$$

Для статистического определения коэффициента готовности, как и в начале настоящего раздела, рассмотрим испытания N одинаковых восстанавливаемых систем и обозначим $N_p(t_x)$ число систем, находящихся в состоянии работоспособности в произвольный, достаточно удалённый от начала испытаний момент времени t, Тогда статистическое определение коэффициента готовности

$$K_Г=\frac{N_p(t_x)}{N}. \tag{3.9}$$

Коэффициентом оперативной готовности $K_{ОГ}(t)$ называют вероятность того, что система окажется работоспособной в произвольно выбранный момент времени в установившемся режиме эксплуатации и что, начиная с этого момента, система будет работать безотказно в течение заданного интервала времени t. Из этого определения и из формулы (3.9) следует, что в альтернирующем процессе восстановления

$$K_{ОГ}(t)=\frac{\theta}{\theta+\tau_B}P(t_x,t), \tag{3.10}$$

где $P(t_x,t)$ – условная вероятность безотказной работы ВС на интервале $(t_x$, $t_x+t)$ при условии, что в момент t_x система была работоспособна.

При экспоненциальным законе для условной вероятности имеем:

$$K_{ОГ}(t)=\frac{\theta}{\theta+\tau_B}e^{-\lambda t}. \tag{3.11}$$

Задание на выполнение работы

С использованием программы MS Excel (либо MathCAD) найти решения следующих задач.

1. Пусть для числа отказов $n_i(t)$ каждой из пяти систем, поставленных на испытания, имеют место следующие закономерности:

Номер системы	**Число отказов**	**Время *t*, ч**					
		50	100	150	200	250	300
1	$n_1(t)$	1	2	2	3	4	4
2	$n_2(t)$	2	3	3	3	4	5
3	$n_3(t)$	1	1	1	3	4	4
4	$n_4(t)$	2	3	4	4	5	5
5	$n_5(t)$	1	1	2	2	3	3

Системы полностью восстанавливаются после каждого отказа. Найти ω (t_1 = 150 ч) и ω (t_2 = 250 ч) – значения параметра потока отказов.

2. Четыре системы проработали 1000 часов. При этом:

1) в первой системе было 3 отказа;
2) во второй – 0 отказов;
3) в третьей – 5 отказов;
4) в четвертой – 2 отказа.

После каждого отказа системы полностью восстанавливались. Найти оценку θ средней наработки на отказ.

3. В системе имели место 7 отказов. Время восстановления τ_{Bi}, *i* = 1, 2, …, 7, после очередного отказа составило:

i, номер отказа	1	2	3	4	5	6	7
Время восстановления τ_{Bi}, ч	1,5	6	2	2,5	3	3	2,5

Найти оценки:

1) вероятности того, что время восстановления не будет превышать t_1 = 2 ч;

2) среднего времени τ_{Bcp} в восстановления.

4. Имеются 3 экземпляра системы, которые проработали 500 часов. График работы систем:

Номер системы	Данные об отказах и ремонтах систем	Номер отказа				
		1	2	3	4	5
1	Момент отказа, ч	100	155	300	390	–
	Время ремонта, ч	5	2	10	5	–
2	Момент отказа, ч	50	100	155	300	350
	Время ремонта, ч	10	5	5	5	10
3	Момент отказа, ч	150	300	455	–	–
	Время ремонта, ч	10	5	5	–	–

Знак «–» обозначает отсутствие отмеченного отказа.

Найти коэффициент готовности $K_Г$.

5. Построить график изменения коэффициента оперативной готовности системы $K_{ОГ}(t)$ на интервале времени Δt = 200 ч, если: закон надёжности – экспоненциальный, λ = 10^{-4} $ч^{-1}$; средняя наработка на отказ θ = 300 ч; среднее время восстановления $\tau_{Вср}$ = 10,5 ч. Построение графика производить, используя программные средства по указанию преподавателя, интервал изменения t от 0 до 200 часов.

6. Найти параметры в формуле для коэффициента оперативной готовности системы $K_{ОГ}(t)$ при экспоненциальном законе надёжности, если средняя наработка на отказ θ = 480 ч, а $K_{ОГ}(t = 0 \text{ ч})$ = 0,96, $K_{ОГ}(t = 100 \text{ ч})$ = 0,95.

Содержание отчёта:

1 Цель работы.

2 Расчётные формулы для решения задач.

3 Результаты расчётов.

4 Значения функции коэффициента готовности в отдельных точках и её график.

Лабораторная работа № 4
МЕТОДЫ РАСЧЁТА НАДЁЖНОСТИ НЕВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ СИСТЕМ

Цель работы: Ознакомление с методикой и приобретение навыков расчёта показателей надёжности невосстанавливаемых систем (включая системы с резервированием).

Краткие теоретические сведения.

Методы расчёта надёжности невосстанавливаемых систем

Выбор метода расчёта надёжности невосстанавливаемых систем зависит от структуры системы. Обычно различают две группы указанных систем: с простой структурой, сводящейся к последовательно-параллельному соединению элементов (в смысле надёжности); со сложной структурой, не сводящейся к последовательно-параллельному соединению элементов (в смысле надёжности).

Расчёт надёжности систем с простой структурой

Вероятность безотказной работы системы при основном (последовательном) соединении n элементов определяется выражением

$$P_c(t) = p_1(t)\,p_2(t)...p_n(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t), \tag{4.1}$$

где $p_i(t)$ – вероятность безотказной работы *i*-го элемента.

При параллельном соединении *m* элементов вероятность отказа системы будет равна

$$Q_c(t) = q_1(t)q_2(t)...q_m(t) = \prod_{j=1}^{n} q_j(t), \tag{4.2}$$

где $q_j(t)$ = 1 – $p_i(t)$ – вероятность безотказной работы *j*-го элемента.

Если закон распределения времени безотказной работы элементов экспоненциальный, т. е. $p_i(t) = e^{-\lambda_i t}$, то при основном соединении элементов выражение (4.1) примет следующий вид:

$$P_c(t) = e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t}...e^{-\lambda_n t} = e^{-\lambda_c t}, \tag{4.3}$$

где $\lambda_c = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ – интенсивность отказов системы.

При параллельном соединении *m* элементов, имеющих экспоненциальный закон распределения времени безотказной работы, вероятность отказа всей группы элементов:

$$Q_p(t) = \left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)\left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right)...\left(1 - e^{-\lambda_m t}\right) = \prod_{j=1}^{m}\left(1 - e^{-\lambda_j t}\right). \tag{4.4}$$

Влияние условий эксплуатации на величины показателей надёжности учитывают при окончательном (коэффициентном) расчёте. Такой учёт обычно производится с помощью соотношения

$$\lambda = \lambda_{\text{ном}} k_1 k_2 ... k_n, \tag{4.5}$$

где $\lambda_{\text{ном}}$ – номинальное значение интенсивности отказов, соответствующее нормальным условиям эксплуатации; k_1, k_2, ... , k_n – поправочные коэффициенты (коэффициенты нагрузки), учитывающие отклонения влияющих величин от нормальных значений; λ – результирующая величина интенсивности отказов.

Расчёт надёжности систем со сложной структурой

Метод перебора состояний. Вероятность того, что система будет находиться в одном из возможных работоспособных состояний, определяется выражением

$$P = \sum_{j=1}^{m} \prod_{l_j} p_l \prod_{k_j} q_k, \tag{4.6}$$

где m – общее число работоспособных состояний, в каждом j-м из которых число исправных элементов равно l_j, а вышедших из строя – k_j; p_l и q_k – вероятность безотказной работы и вероятность отказа элемента с соответствующим номером.

Метод разложения относительно особого элемента. Этот метод основан на использовании формулы полной вероятности. В сложной системе выделяется особый элемент, все возможные состояния H_i, i = 1, 2, ..., n, которого образуют полную группу: $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$. Если A – анализируемое состояние системы, то его вероятность

$$P(A) = \sum P(H_i) P\left(\frac{A}{H_i}\right). \tag{4.7}$$

Сомножитель $P\left(\frac{A}{H_i}\right)$ в каждом из слагаемых правой части (4.7) определяет вероятность состояния A при условии, что особый элемент находится в состоянии H_i. Рассмотрение состояния H_i особого элемента как фиксированного позволяет упростить структурную схему системы, применяемую при расчёте надёжности, и свести её к последовательно-параллельному соединению элементов.

Структурная избыточность

Для повышения надёжности технических систем и их компонентов применяют структурную избыточность. С целью сопоставления общего числа однотипных элементов n и числа r работающих элементов, необходимых для функционирования системы, вводится понятие кратности резервирования:

$$k = \frac{n-r}{r}. \tag{4.8}$$

Показателями, определяющими эффективность резервирования, являются величины

$$B_\tau = \frac{\tau_p}{\tau}, \quad B_p = \frac{P_p}{P}, \quad B_Q = \frac{Q}{Q_p}, \tag{4.9}$$

где B_τ – выигрыш за счёт повышения средней наработки до отказа резервированной системы τ_p по сравнению с наработкой нерезервированной системы τ; B_p, B_Q – аналогичные показатели, характеризующие повышение вероятности безотказной работы и снижение вероятности отказа.

Общее постоянное резервирование с целой кратностью

Вероятность отказа совокупности m параллельно работающих элементов при $r = 1$ определяется выражением (4.2), откуда для равнонадёжных элементов

$$Q_p = q^m = q^{k+1}, \quad B_Q = \frac{q}{q^m} = \frac{1}{q^k}, \tag{4.10}$$

где q – вероятность отказа одного элемента.

Для группы резервированных элементов при кратности резервирования k и экспоненциальном законе распределения времени их безотказной работы средняя наработка до отказа определяется выражением:

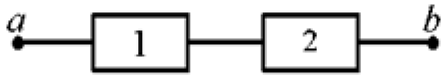
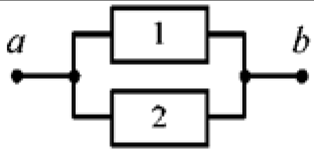
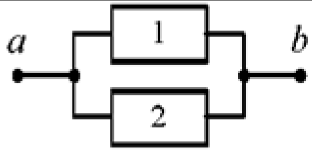
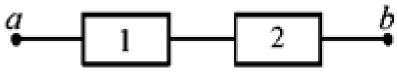
$$\tau_p = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k+1}\right) = \tau\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i}, \tag{4.11}$$

где λ – интенсивность отказов одного элемента; $\tau = \frac{1}{\lambda}$.

Резервирование двухполюсных элементов

Наиболее характерными типами отказов для двухполюсных элементов релейного типа являются «обрыв» и «короткое замыкание». Учитывая возможные влияния отказов на функционирование системы, можно построить структурные схемы расчёте надёжности для указанных случаев отказа, которые представлены в табл. 4.1. Построение подобных схем для систем с релейными элементами позволяет рассчитывать их надёжность.

Таблица 4.1

Тип отказа	**Соединения элементов**	
	последовательное	параллельное
обрыв		
короткое замыкание		

Задание на выполнение работы

С использованием программы MS Excel (либо MathCAD) найти решения следующих задач.

1. Система состоит из 15 элементов, подчиняющихся экспоненциальному закону надёжности. Отказ системы происходит при отказе любого из её элементов. В табл. 4.2 приведены интенсивности отказов λ_i, ч$^{-1}$, i = 1, 2, ..., 15, элементов и их коэффициенты нагрузки K_{Hi}, i = 1, 2, ..., 15.

Таблица 4.2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
λ_i, ($\times 10^{-6}$)	1	20	30	4	5	70	100	20	1000	70	200	80	90	100	300
K_{Hi}	3	2	1	7	1,2	4	2	1	3	3	1	2,5	2	1,2	3

Найти:

а) среднюю наработку системы до отказа τ;

б) вероятность безотказной работы за время t_1 = 500 ч;

в) вероятность безотказной работы за время t_2 = 1000 ч.

2. Система состоит из трёх идентичных элементов, соединённых параллельно в смысле надёжности. Для каждого элемента справедлив экспоненциальный закон надёжности с интенсивностью $\lambda = 2 \cdot 10^{-5}$ ч$^{-1}$.

Найти вероятность безотказной работы системы за время t = 200 ч.

3. В системе применено общее постоянное резервирование с целой кратностью k = 4. Для исходной (нерезервированной) системы выполнялся экспоненциальный закон надёжности с интенсивностью отказов $\lambda = 2{,}3 \cdot 10^{-4}$ ч$^{-1}$.

Найти:

1) выигрыш по вероятности отказа $\left(B_Q\right)$ за время t_1 = 150 ч;

2) среднюю наработку τ_p до отказа резервированной системы.

4. Дана схема, представляющая собой соединение реле (рис. 4.1). Вероятность безотказной работы каждого реле:

1) по отношению к отказу типа «обрыв» $P_1(t) = e^{-10^{-4}t}$;

2) по отношению к отказу типа «короткое замыкание» $P_2(t) = e^{-10^{-5}t}$.

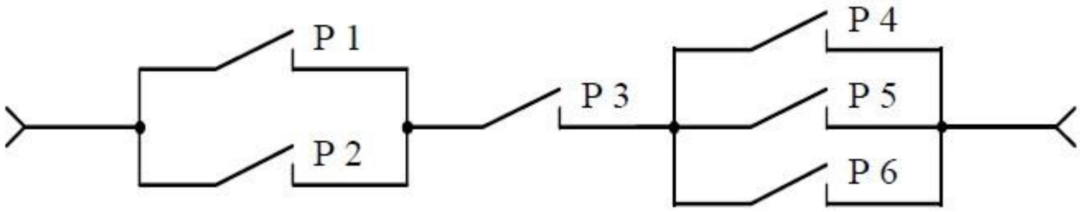


Рис. 4.1. Схема соединения реле

Определить вероятность отказа всей схемы применительно к «обрыву» $\left(Q_{c1}(t_1)\right)$ и «короткому замыканию» ($Q_{c2}(t_2)$) при t_1 = 500 ч.

5. Схема соединения элементов (в смысле надёжности) имеет вид рис. 4.2:

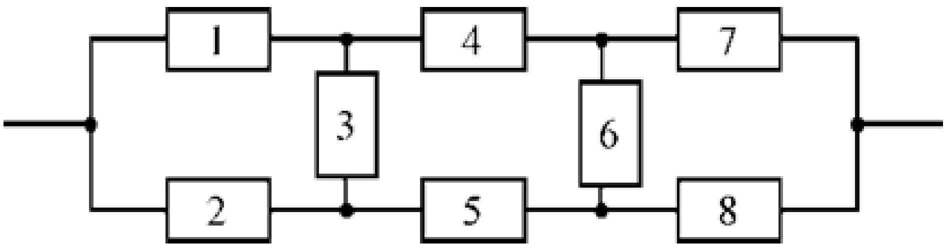


Рис. 4.2. Схема соединения элементов

Все элементы – одинаковые, их вероятность безотказной работы подчиняется закону $P_i(t) = e^{-\lambda t}$, λ = 10^{-3} $ч^{-1}$; *i* = 1, 2,..., 8.

Рассчитать вероятность безотказной работы всего устройства, используя метод разложения относительно особого элемента. Время функционирования системы *t* = 100 ч.

Содержание отчёта:

1 Цель работы.

2 Структурные схемы расчёта надёжности.

3 Расчётные формулы решения задач.

4 Результаты расчётов.

Лабораторная работа № 5
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЁЖНОСТИ РЕЗЕРВИРОВАННЫХ СИСТЕМ С ДРОБНОЙ КРАТНОСТЬЮ, ОБЩИМ И ПОЭЛЕМЕНТНЫМ РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ

Цель работы: Ознакомление с методикой и приобретение навыков расчёта показателей надёжности резервированных систем с дробной кратностью, общим и поэлементным резервированием.

Краткие теоретические сведения

Резервирование с дробной кратностью

При резервировании с дробной кратностью система может функционировать, если из n однотипных работающих элементов, соединённых параллельно в смысле надёжности, в работоспособном состоянии находятся r. Система отказывает, если число отказавших элементов z составляет $z \geq m = n - r + 1$. Вероятность отказа такой системы равна:

$$Q = \sum_{z=m}^{n} C_n^z q^z \left(1-q\right)^{n-z}, \qquad (5.1)$$

где $C_n^z = \dfrac{n!}{z!\left(n-z\right)!}$ – число сочетаний из n элементов по z, а q – вероятность отказа одного элемента.

Резервирование с голосованием по большинству

Этот вид резервирования (рис. 5.1), называемый также мажоритарным, является разновидностью резервирования с дробной кратностью. Наличие в системе «элемента голосования» (ЭГ) позволяет обеспечить сопоставление информации о каждом из n каналов таким образом, что выход системы формируется путём выбора «по большинству».

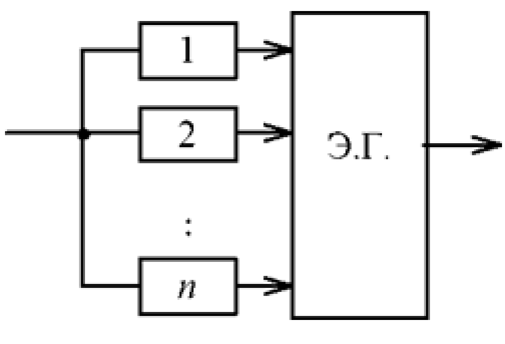


Рис. 5.1. Схема мажоритарного резервирования

Вероятность отказа трёхканальной мажоритарной схемы (без учёта надёжности ЭГ) равна:

$$Q_{MC} = C_3^2 q^2 \left(1-q\right) + C_3^3 q^3 = 3q^2 - 2q^3, \qquad (5.2)$$

где q – вероятность отказа одного из сопоставляемых каналов.

Вероятность отказа с учётом возможности отказа ЭГ равна:

$$Q = 1 - P_{МС} \cdot P_{ЭГ}, \qquad (5.3)$$

где $P_{МС}$, $P_{ЭГ}$ – вероятности безотказной работы собственно мажоритарной схемы и элемента голосования.

Общее и поэлементное резервирование

В случае общего резервирования кратности k системы из n элементов (рис. 5.2) вероятность отказа системы определяется выражением

$$Q_{ор} = \left(1 - (1-q)^n\right)^{k+1}, \qquad (5.4)$$

где q – вероятность отказа одного элемента.

Для системы, состоящей из n участков с поэлементным резервированием (рис. 5.3) целой кратности k_i, i = 1, 2, ..., n, вероятность безотказной работы равна:

$$P = \prod_{i=1}^{n} P_i = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \prod_{j=0}^{k_i} q_{ij}\right), \qquad (5.5)$$

где q_{ij} – вероятность отказа j-го элемента, входящего в i-й участок резервирования; P_i – вероятность безотказной работы i-го участка.

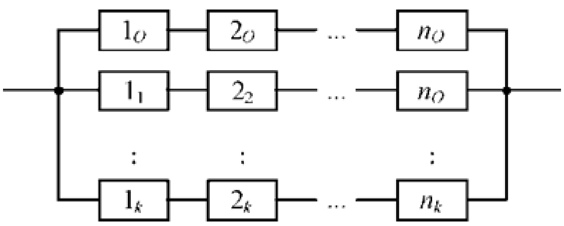


Рис. 5.2

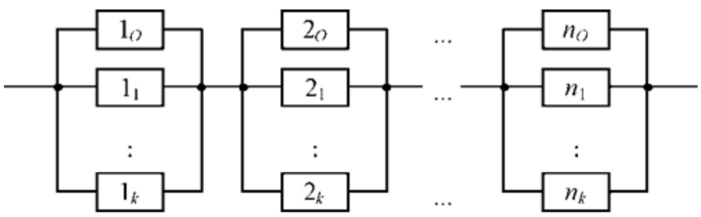


Рис. 5.3

Такое соединение эффективнее общего резервирования системы.

Резервирование замещением

Если резерв вводится в состав системы после отказа основного элемента и сопровождается переключающими операциями, то имеет место резервирование замещением – активное резервирование.

При этом способе резервирования (рис. 5.4) резервные элементы могут находиться в нагруженном, облегченном и ненагруженном состоянии.

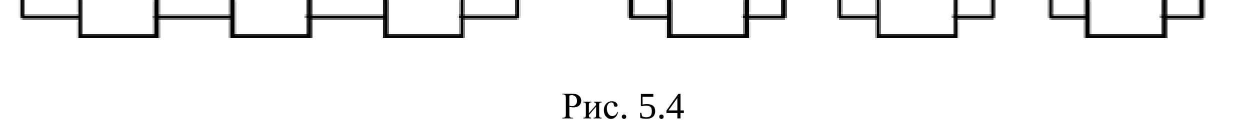


Рис. 5.4

В случае применения общего резервирования замещением с кратностью k для случая экспоненциального закона надёжности с интенсивностью λ вероятность безотказной работы системы определяется выражением

$$P_p(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}. \tag{5.6}$$

Задание на выполнение работы

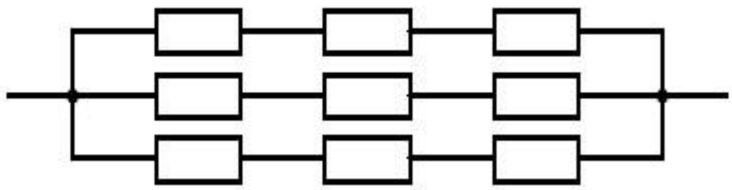
С использованием программы *MS Excel* (либо *MathCAD*) найти решения следующих задач.

1. Дана система, в которой использовано резервирование с дробной кратностью. Количество элементов, необходимых для работы системы, $r = 4$; общее число элементов (включая резервные) $n = 7$. Вероятность безотказной работы элемента за заданное время $p = 0{,}92$. Найти вероятность безотказной работы системы.

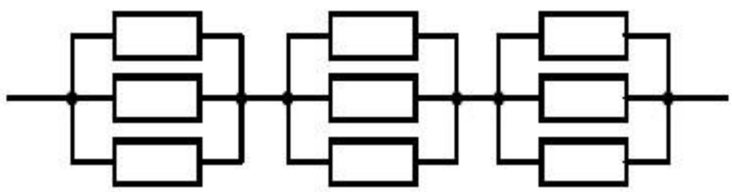
2. В системе применено мажоритарное резервирование (резервирование с голосованием по большинству) по принципу «два из трёх». Вероятность безотказной работы одного канала $p = 0{,}95$, вероятность безотказной работы элемента голосования $P_{ЭГ} = 0{,}98$. Найти вероятность отказа Q_C всей системы.

3. Даны 2 варианта резервирования системы:

1) общее



2) поэлементное



Вероятность безотказной работы одного элемента подчиняется экспоненциальному закону: $P_i(t) = e^{-\lambda t}$, $\lambda = 2 \cdot 10^{-3}$ ч$^{-1}$. Найти вероятность безотказной работы для двух вариантов построения резервированной системы при $t = 300$ ч.

4. В системе применено общее резервирование замещением, для чего использованы 4 резервных системы, полностью идентичные основной. Каждая из систем подчиняется экспоненциальному закону надёжности с интенсивностью $\lambda = 2 \cdot 10^{-3}$ ч$^{-1}$. Найти вероятность безотказной работы резервированной системы $P_p(t)$ за время $t = 200$ ч.

5. В системе – два блока, причём один из них резервируется путём замещения, у второго – применяется постоянное резервирование (троирование). Для обоих блоков имеет место экспоненциальный закон надёжности, причём интенсивности отказов $\lambda_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ ч$^{-1}$, $\lambda_2 = 3 \cdot 10^{-4}$ ч$^{-1}$. Найти вероятность отказа системы за время t = 200 ч.

Содержание отчёта:

1 Цель работы.

2 Структурные схемы расчёте надёжности.

3 Расчётные формулы решения задач.

4 Результаты расчётов.

5 Выводы.

Лабораторная работа № 6
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЁЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Цель работы: Ознакомление с методами статистического моделирования. Приобретение навыков применения статистического моделирования для определения показателей надёжности технических систем.

Краткие теоретические сведения

Назначение метода статистического моделирования

При проектировании, производстве и эксплуатации сложных технических систем (ТС) возникает необходимость исследования закономерностей, которым подчиняется функционирование этих систем, когда они находятся под воздействием разнообразных детерминированных и случайных факторов.

Одним из распространённых методов анализа свойств сложных ТС является моделирование. *Моделирование* – это, в общем случае, замена объекта, подлежащего исследованию (оригинала), другим объектом (моделью), исследование модели и распространение результатов этого исследования на оригинал. Среди распространённых видов моделирования важнейшее значение имеет машинное моделирование, т. е. моделирование на ЭВМ.

Сущность машинного моделирования системы заключается в следующем. На основании математического описания процесса функционирования ТС и использования численных методов разрабатывается моделирующий алгоритм, имитирующий внешнее воздействие на систему, поведение её элементов и их взаимодействие, в результате чего прослеживается последовательное изменение состояний всей системы во времени. Разработанный моделирующий алгоритм затем реализуется на ЭВМ.

Если система находится под воздействием внешних и внутренних случайных факторов, то задача исследования системы состоит в определении соответствующих вероятностных характеристик. В такой ситуации моделирующий алгоритм содержит операторы воспроизведения конкретных реализаций всех случайных факторов; в то же время, результатом единичного машинного эксперимента является реализация случайного процесса функционирования системы. Чтобы получить статистические характеристики этого процесса, машинный эксперимент многократно повторяется. Данный подход к исследованию систем называется методом статистического моделирования.

Машинное моделирование случайных факторов

Случайные факторы могут быть представлены как внешними возмущениями, действующими на исследуемую систему, так и внутренними возмущениями. Они характеризуются случайными величинами, функциями, событиями, потоками событий. Воспроизведение случайных факторов с заданными вероятностными характеристиками при статистическом моделировании может осуществляться тремя способами: аппаратным, табличным и алгоритмическим.

Аппаратный способ предполагает применение специальных электронных генераторов случайных сигналов, а табличный – фиксацию реализаций случайных величин, функций и их систем в соответствующих запоминающих устройствах с последующим считыванием и воспроизведением.

Алгоритмический способ предполагает воспроизведение случайных факторов путём реализации специальных алгоритмов на ЭВМ. Данный способ обеспечивает получение периодических числовых последовательностей с большим периодом. В пределах периода эти последовательности обладают свойствами реализаций дискретных случайных функций и называются псевдослучайными или квазислучайными. Основное достоинство способа – возможность его реализации на ЭВМ без внешних устройств и приставок при малых затратах памяти. Основной недостаток – меньшая (по сравнению с другими способами) точность получения вероятностных характеристик моделируемых случайных факторов.

При статическом моделировании на ЭВМ в качестве базовых обычно выбирают распределения дискретных равномерно распределённых случайных величин. Алгоритмический способ получения равномерно распределённых случайных величин основан на использовании рекуррентного соотношения вида

$$g_i = \Phi\left(g_{i-1},\ g_{i-2},\ ..., g_{i-r}\right),\ i = 1, 2, \ldots \tag{6.1}$$

где $i - r = 0$ и начальное число g_0 задано.

Обычно пригодность выбранной функции Φ для отмеченной цели определяется по результатам анализа последовательности g_0, g_1, ..., g_i. Необходимо, чтобы эти числа с достаточной точностью можно было принять за ожидаемые значения равномерно распределённой случайной величины G.

Иногда для получения последовательности псевдослучайных чисел используется функция вида

$$g_i = O\left(\frac{\alpha g_{i-1}}{\beta}\right),\ i = 1, 2, \ldots \tag{6.2}$$

где α, β, g_0 – целые положительные постоянные и символ O означает, что g_i, равно остатку, образовавшемуся при делении произведения αg_{i-1} на β.

Характер последовательности g_0, g_1, ..., g_i, зависит от выбора α, β, g_0. Во всех случаях после некоторого числа шагов L получится отрезок g_0, g_1, ..., g_k, g_{k+1}, g_{k+2}, ..., g_{L-1} такой, что остальные значения элементов последовательности будут получаться повторением отрезка g_{k+1}, g_{k+2}, ..., g_{L-1} ($k \geq 1$).

Первый из этих отрезков называется отрезком апериодичности псевдослучайной последовательности g_0, g_1, ..., второй – периодом, число $P = L - k - 1$ – длиной периода.

В ЭВМ числа g_i представляются N двоичными разрядами, и количество несовпадающих чисел, которые могут быть получены по формуле (6.2), равно $2^N - 1$. При достаточно большом N псевдослучайная величина может быть аппроксимирована случайной функцией E_H с реализацией e_H, причём:

$$f\left(e_H\right)=1 \text{ при } 0 \geq e_H \geq 1;\ m_{E_H}=0{,}5;\ \sigma_{E_H}=\frac{0{,}5}{\sqrt{3}}. \tag{6.3}$$

Здесь $f\left(e_H\right)$ – плотность распределения, m_{E_H} – математическое ожидание и σ_{E_H} – с.к.о. этой величины.

Такой «базовый датчик» (генератор) случайных величин используется для моделирования на ЭВМ и более сложных объектов.

Моделирование случайных величин с произвольным законом распределения

Для моделирования дискретной случайной величины X её возможные значения x_0, x_1, ..., x_n располагают в порядке убывания вероятностей, т. е. так, чтобы $p_1 > p_2 > ... > p_n$. Интервал $0 \leq e_H < 1$ возможных значений базовой случайной величины E_H с требуемыми вероятностными характеристиками делится на интервалы длин p_1, p_2, ..., p_n. Выданное генератором случайных величин число сравнивается с p_1. Если $e_H < p_1$, то $X = x_1$, если $e_H > p_1$, то значение e_H сравнивается с $p_1 + p_2$, и т. д.

Моделирование непрерывной случайной величины X с функцией распределения $F_X\left(x\right)$ осуществляется нелинейным преобразованием $X=\Psi\left(Z\right)$ базовой случайной величины Z с функцией распределения $F_Z\left(z\right)$. Можно показать, что $\Psi\left(Z\right)=F_X^{-1}\left[F_Z\left(z\right)\right]$. Отметим, что решение этого уравнения относительно x определяет функцию Ψ:

$$x=F_X^{-1}\left[F_Z\left(z\right)\right]=\Psi\left(z\right), \tag{6.4}$$

где F_X^{-1} – функция, обратная F_X.

В частности, случайную величину X с показательным распределением

$$F_X\left(x\right)=1-e^{-\lambda x}, \quad f_X\left(x\right)=\lambda e^{-\lambda x}, \tag{6.5}$$

можно получить, преобразовав базовую случайную величину $Z = E_H$ с вероятностными характеристиками, описываемыми (6.3), и функцией распределения $F_Z\left(z\right)=z$.

На основании равенства $F_Z\left(z\right) = F_X\left(x\right)$, т. е. $z=1-e^{-\lambda x}$, находим

$$x=\Psi\left(z\right)=-\ln\frac{1-z}{\lambda}; \quad X=-\ln\frac{1-E_H}{\lambda}. \tag{6.6}$$

Так как случайные величины $1-E_H$ и E_H имеют одинаковые законы распределения, то можно принять

$$X=-\ln\frac{E_H}{\lambda}. \tag{6.7}$$

Если найти аналитическое выражение обратной функции невозможно, используют табулирование и различные аппроксимации.

Существуют многочисленные методы формирования случайных величин с различными заданными законами распределения.

Моделирование нормального закона распределения случайной величины X, например, может быть осуществлено на основании центральной предельной теоремы, согласно которой закон распределения суммы независимых случайных величин стремится к нормальному с увеличением числа слагаемых. Для решения практических задач сумму $x = \sum_{i=1}^{n} e_{Hi}$ значений e_{Hi}, выданных датчиком случайной величины E_H с характеристиками (6.3), можно считать значениями нормально распределённой величины, ограничившись восемью слагаемыми:

$$X = \sum_{i=1}^{n} E_{Hi}\,, \tag{6.8}$$

при $n \geq 8$. Так как все слагаемые E_{Hi} имеют одинаковые математические ожидания m_{E_H} и дисперсии D_{E_H}, то $m_X = n \cdot m_{E_H}$ и $D_X = n \cdot D_{E_H}$.

Применение статистического моделирования для анализа надёжности технических систем

Аналитические методы исследования надёжности ТС обычно основываются на ряде допущений и ограничений, которые зачастую приводят к уменьшению достоверности результатов. Наиболее распространённое и существенное среди них – допущение о том, что отказы элементов и узлов являются независимыми случайными событиями, предположение об однородности процесса восстановления отказавших узлов и др. Метод статистического моделирования позволяет с требуемой точностью учесть особенности функционирования достаточно сложных систем.

Отметим, что для решения задач анализа надёжности достаточно широкое распространение получили так называемые логические модели безотказной работы системы. При этом предполагается, что каждый элемент ТС и вся система в любой момент времени могут находиться в одном из двух состояний: работоспособном или отказа. Функциональные связи между элементами заменяются логическими, определяющими состояние системы в зависимости от состояния элементов. Процесс статистического моделирования при использовании логической модели сводится к воспроизведению в соответствии с заданными законами распределения процесса изменения состояний элементов, моделированию логических функций, определяющих случайный процесс изменения состояний системы в случайные моменты времени, и вычислению оценок показателей надёжности.

Моделирование невосстанавливаемой системы

Процесс моделирования направлен на формирование случайных значений времени наработки до отказа каждого элемента системы.

В зависимости от структуры, модель системы на основании значений реализации случайных величин в некотором смысле формирует реализацию – случайного значения времени наработки до отказа всей ТС. В результате проведения статистических испытаний получается случайная выборка значений наработки до отказа системы.

Моделирование восстанавливаемой системы

Модели системы в этом случае предназначены для формирования случайных значений времени наработки на отказ T_i и времени восстановления T_{Bi} применительно к каждому элементу, а также характеристикам его безотказности и восстанавливаемости.

Задание на выполнение работы

С использованием программы MS Excel (либо MathCAD) найти решения следующих задач.

1. Получить 30–100 значений псевдослучайных чисел, равномерно распределённых в интервале от 0 до 1 (в программе MS Excel с помощью встроенной функции СЛЧИС()). Провести анализ вероятностных характеристик полученной последовательности псевдослучайных чисел.

2. Получить 30–100 значений псевдослучайных чисел из интервала от 0 до 1 с помощью функции (6.2), где $\alpha = 5^9$, $\beta = 2^{21}$, $g_0 = 1$, а символ O означает, что g_i равно остатку, получившемуся при делении произведения αg_{i-1} на β.

Провести анализ вероятностных характеристик полученной последовательности псевдослучайных чисел.

3. Получить 30–100 значений псевдослучайной величины, каждый раз производя суммирование 8 случайных чисел, равномерно распределённых в интервале от 0 до 1. Провести анализ вероятностных характеристик полученной последовательности псевдослучайных чисел.

4. Выполнить моделирование системы, представленной электрической схемой на рис. 6.1.

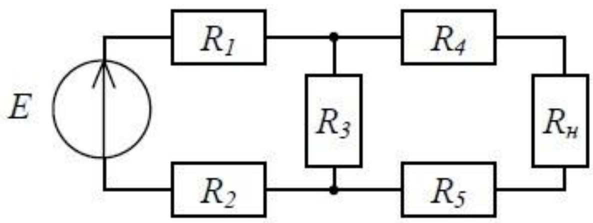


Рис. 6.1

Здесь E – источник постоянного напряжения (E = 10 В), R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 резистивные элементы (со значениями сопротивлений, подчиняющимися случайному равномерному закону распределения в диапазоне от 10 до 10,5 кОм). Путем статистического моделирования исследовать значения напряжения на нагрузке R_H, значение которого равно 10 Ом. Построить функцию распределения полученных значений выходного напряжения.

5. Выполнить статистическое моделирование невосстанавливаемой технической системы, состоящей из трёх блоков, которые соединены последовательно в смысле надёжности. Вероятности безотказной работы первого и второго блоков характеризуются экспоненциальным законом, третьего – нормальным законом распределения. Величины средней наработки до отказа первого и второго блоков соответственно равны τ_1 = 1000 ч, τ_2 = 1500 ч.

Параметры закона распределения для третьего блока m_3 = 1000 ч, σ_3 = 20 ч.

Вычислить статистическую оценку вероятности отказа исследуемой системы за время t = 800 ч.

6. Выполнить статистическое моделирование невосстанавливаемой технической системы, первый и второй блоки которой соединены параллельно в смысле надёжности, а третий – последовательно с указанными двумя блоками.

Вероятности безотказной работы первого и третьего блоков описываются показательным законом, второго – нормальным законом распределения.

Параметры распределений для первого и третьего блоков имеют значения $\lambda_1 = 10^{-4}$ ч$^{-1}$, $\lambda_3 = 10^{-3}$ ч$^{-1}$. Параметры закона распределения для второго блока m_2 = 2000 ч, σ_2 = 20 ч.

Найти статистическую оценку вероятности безотказной работы системы за время t = 1000 ч.

Содержание отчета:

1 Цель работы.

2 Расчетные формулы для решения задач.

3 Результаты расчетов.

4 Графики статистической функции распределения и аппроксимирующих выражений.

5 Выводы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Курицкий, Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0 / Б.Я. Курицкий. – СПб. : BHV-Санкт-Петербург, 1997. – 384 с.

2. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей и её инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М. : Наука, 1988. – 480 с.

3. Вероятностные методы в вычислительной технике / А.В. Крайников, Б.А. Курдиков, А.Н. Лебедев [и др.]. – М. : Высшая школа, 1986. – 312 с.

4. Очков, В.Ф. Mathcad 7 Pro для студентов и инженеров / В.Ф. Очков. – М. : КомпьютерПресс, 1998. – 384 с.

Встроенные функции программных пакетов, используемых при расчётах показателей надёжности ТС

№ п/п	***Имя функции***	***Результат***	***Программный пакет***
1	exp(x)	экспоненциальная функция от аргумента x	Eureka, Excel, MathCAD
2	ln(x)	вычисление натурального логарифма	
3	ФАКТР(п)	вычисляет факториал целого числа n	Excel
4	СЛЧИС( ); аргументов нет	вычисляет равномерно распределенное случайное число большее либо равное 0 и меньшее 1; новое случайное число вычисляется каждый раз, когда рабочий лист пересчитывается	
5	rnd(x)	псевдослучайное число в диапазоне от 0 до x	MathCAD
6	rnorm(m,p,o); ц и а- параметры	вектор m случайных чисел, имеющих нормальное распределение	
7	rexp(m,r); r (r > 0) - параметр	вектор m случайных чисел, имеющих экспоненциальное распределение	

Примечание: для расчёта факториала в пакете MathCAD используется оператор n!.

Учебное издание

Рудиков Дмитрий Алексеевич
Финоченко Татьяна Анатольевна
Хвостиков Андрей Георгиевич

НАДЁЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ТЕХНОГЕННЫЙ РИСК. ПРАКТИКУМ

Печатается в авторской редакции
Технический редактор Т.И. Исаева

Подписано в печать 20.10.20. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,09.
Тираж экз. Изд. № 9098. Заказ .

Редакционно-издательский центр ФГБОУ ВО РГУПС.

Адрес университета: 344034, г. Ростов н/Д, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, д. 2