РОСЖЕЛДОР
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»
(ФГБОУ ВО РГУПС)

Э.А. Мамаев, И.А. Порицкий, К.А. Годованый

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЛОГИСТИКЕ

Учебное пособие

Утверждено
учебно-методическим советом университета

Ростов-на-Дону
2016

УДК 658.7 : 519.711.3(07) + 06

Рецензенты: кандидат экономических наук Г.А. Ковалев
(фил. АО «РЖД-Логистика» в г. Ростове н/Д);
доктор экономических наук, профессор С.Г. Шагинян (РГУПС)

Мамаев, Э.А.

Экономико-математическое моделирование в логистике: учеб. пособие / Э.А. Мамаев, И.А. Порицкий, К.А. Годованый; ФГБОУ ВО РГУПС. – Ростов н/Д, 2016. – 136 с.: ил. – Библиогр.: с. 133.

ISBN 978-5-88814-483-1

Содержатся теоретические сведения по дисциплине «Экономико-математическое моделирование в логистике», задания и методические указания по их решению.

Учебное пособие предназначено для студентов 4-го курса, обучающихся по направлению 38.03.02 «Менеджмент», профиль «Логистика и управление цепями поставок», а также для аспирантов.

Одобрено к изданию кафедрой «Логистика и управление транспортными системами».

ISBN 978-5-88814-483-1

Оглавление

Введение

Теоретические знания основ логистики могут эффективно применяться на практике для решения конкретных практических задач только при умелом и адекватном использовании математического аппарата принятия решений. При этом вопросы использования тех или иных методов для решения конкретных задач, являясь самостоятельной проблемой, существенно сказываются как на результате, так и на оперативности получения решения.

Многообразию бизнес-процессов в логистике отвечают математические подходы к их формализации и эффективной реализации с использованием аппарата исследования операций, оптимального планирования и управления, математического программирования, комбинаторной оптимизации, сетевого и календарного планирования, теории графов, статистического и имитационного моделирования, теории вероятностей и ее приложений, теории массового обслуживания и других элементов из разделов математики, кибернетики, экономического и финансового анализа.

В данном учебном пособии приведены задания к выполнению работ по отдельным темам, указания по их выполнению, представляющие собой теоретические сведения по изучаемой теме и описание методов решения указанного класса задач. Большинство заданий выполняют с использованием офисного приложения MS-Excel, при этом для выполнения работ требуются только базовые знания.

В конце каждой темы приведены контрольные вопросы для закрепления материала.

Представлено кейс-задание, рекомендованное к выполнению в качестве самостоятельной (расчетно-графической) работы студентами, в котором во взаимоувязанной форме даны задания по отдельным темам.

1 ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

Задание

1 В табл. 1.1 выбрать три показателя из группы 1, четыре показателя из группы 2 и два показателя из группы 3 для индивидуального анализа и расчетов. Сформировать таблицу в MS-Excel для анализа данных. Выбрать исходные данные по своему варианту и двум соседним вариантам (поставщикам услуг, перевозчикам) из табл. 1.1 (для варианта 0 соседние 1 и 9, для варианта 9 – соседние 8 и 0).

2 Провести нормирование показателей группы 2 с учетом выгодности направления их изменения.

3 Провести ранжирование критериев первой и второй групп показателей методом парных сравнений. Определить вес критериев.

4 Для показателей групп 1 и 2 провести рейтинговую оценку перевозчика (для трех выбранных) с использованием лучшего значения в качестве эталона. Провести расчет интегральных рейтингов поставщиков.

5 Определить поставщика, которому удовлетворяет один из показателей из третьей группы.

6 Провести многокритериальный выбор поставщика по нормированным данным значений показателей группы 2, полученным в п. 2 вашего задания методами аддитивной свертки показателей, минимаксной свертки.

Методические указание по выполнению задания

1 Пусть выбраны следующие группы показателей и поставщиков (табл. 1.2). Требуется ввести значения показателей в таблицу в Excel.

2 Провести нормирование показателей группы 2 с учетом выгодности направления их изменения.

Выделим группы показателей, значения которых желательно увеличить: «Качество организации транспортных услуг», «Частота сервиса», «Квалификация персонала». Определим для этих показателей новые значения в интервале [0, 1] по следующей формуле:

$$x_{i,\text{нов}} = \frac{x_i - x_i^{\min}}{x_i^{\max} - x_i^{\min}}.$$

Выделим группы показателей, значения которых желательно уменьшить: «Класс сервиса на линии».

Определим для этих показателей новые значения в интервале [0, 1], по следующей формуле:

$$x_{i,\text{нов}} = \frac{x_i^{\max} - x_i}{x_i^{\max} - x_i^{\min}}.$$

Таблица 1.1

	Наименование показателя (параметра)	Интервал	Поставщики (вариант – вторая цифра в номере по списку в журнале)									
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Группа 1 (количественные измеримые)												
1	Цена продукции, руб/т	125 ÷ 215	210	160	130	170	190	170	190	210	130	190
2	Надежность поставок, процент срывов поставок	0 ÷ 15	10	0	12	13	12	4	4	6	11	8
3	Удаленность поставщика от потребителя, км.	200 ÷ 500	240	290	460	360	360	390	380	230	470	340
4	Сроки выполнения текущих и экстренных заказов, дни	2 ÷ 6	6	4	5	4	5	4	6	4	6	6
5	Тарифы (затраты) на доставку, тыс. руб.	250 ÷ 350	280	280	260	310	320	320	340	350	300	300
6	Потери и хищения груза (сохранность груза), % от стоимости	0,00 ÷ 3,50	0,4	1,1	3,2	1,8	2,5	1,9	2	1,5	3,4	2,9
Группа 2 (рейтинговая оценка)												
1	Качество поставляемой продукции	1 ÷ 20	15	13	15	11	18	18	18	13	5	12
2	Надежность времени доставки (транзита)	1 ÷ 10	6	9	7	5	5	6	2	2	8	4
3	Сервис на линии	1 ÷ 5	3	4	5	1	3	5	2	1	2	2
4	Качество организации продаж транспортных услуг	10 ÷ 100	50	60	90	20	70	70	80	100	80	70
5	Частота сервиса	10 ÷ 50	28	21	36	15	39	25	26	41	25	28
6	Наличие дополнительных услуг по комплектации и доставке груза	3 ÷ 9	8	4	6	7	7	6	9	8	5	8
7	Экипирование отправок	1 ÷ 15	13	14	5	8	2	10	5	3	2	7
8	Квалификация персонала	20 ÷ 60	33	20	57	37	32	57	40	36	23	43
9	Отслеживание отправок	3 ÷ 9	5	6	3	7	8	3	5	5	8	6
Группа 3 (дискретные, релейные)												
1	Наличие резервных мощностей	Да / Нет	Да	Нет	Да	Нет	Да	Да	Нет	Да	Да	Нет
2	Финансовое положение поставщика, его кредитоспособность	Уст/Неуст.	Неуст.	Неуст.	Неуст.	Неуст.	Уст.	Уст.	Неуст.	Уст.	Уст.	Уст.
3	Возможность изменения сервиса	Да / Нет	Да	Да	Да	Да	Нет	Нет	Нет	Да	Нет	Нет
4	Готовность схем маршрутизации перевозок	Да / Нет	Да	Нет	Нет	Да	Да	Да	Нет	Да	Нет	Нет
5	Наличие системы управления качеством (по ISO)	Есть / Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Есть	Есть	Нет	Нет	Есть	Есть
6	Отслеживание отправок	Да / Нет	Нет	Нет	Нет	Да	Да	Да	Нет	Нет	Да	Нет
7	Наличие специального оборудования	Да / Нет	Да	Да	Нет	Да	Да	Да	Да	Нет	Да	Да

Таблица 1.2

№ п/п	Наименование показателя (параметра)	Интервал изменения	Перевозчики		
			I	II	III
Группа 1 (количественные измеримые)					
1	Надежность поставок, процент срывов поставок	0 ÷ 15	13	2	12
2	Удаленность поставщика от потребителя, км	200 ÷ 500	220	490	360
3	Потери груза, % от стоимости	0,00 ÷ 3,50	2,4	2,1	0,2
Группа 2 (рейтинговая оценка)					
4	Класс сервиса на линии	1 ÷ 5	3	1	5
5	Качество организации транспортных услуг	10 ÷ 100	70	40	90
6	Частота сервиса	10 ÷ 50	48	31	26
7	Квалификация персонала	20 ÷ 60	43	30	47
Группа 3 (дискретные релейные)					
8	Наличие системы управления качеством (ISO)	Есть/Нет	Есть	Есть	Нет
9	Отслеживание отправок	Да/Нет	Нет	Есть	Есть

Полученная таблица имеет вид (табл. 1.3).

Таблица 1.3

№ п/п	Показатель (критерий)	Min	Max	I	II	III
1	Сервис на линии	1	5	0,5000	1,0000	0,0000
2	Качество организации транспортных услуг	10	100	0,6667	0,3333	0,8889
3	Частота сервиса	10	50	0,9500	0,5250	0,4000
4	Квалификация персонала	20	60	0,5750	0,2500	0,6750

3 Провести ранжирование критериев первой и второй групп показателей методом парных сравнений. Определить вес критериев.

Одним из способов ранжирования является метод парных сравнений, при проведении которого заполняется матрица. Элементы матрицы могут быть определены по формуле

$$I = \begin{Bmatrix} I_{kj} = 1,\ \textit{если}\ \ X_k = X_j; \\ I_{kj} = 0,\ \textit{если}\ \ X_k < X_j; \\ I_{kj} = 2,\ \textit{если}\ \ X_k > X_j. \end{Bmatrix}$$

Знаки равенства, «меньше» и «больше» соответствуют равнозначности критериев, меньшей и большей значимости одного критерия по сравнению с другим соответственно.

Например, если «Потери груза, % от стоимости» более значимо, чем «Надежность поставок, % срывов поставок», то в ячейку (3;1) записываем значение 2, я в ячейку (1;3) – значение 0. Значение 1 в ячейке говорит о равнозначности сравниваемых показателей.

При опросе многих экспертов получаем множество таблиц парных сравнений, которые могут быть приведены к одной, например, на основе расчета среднего значения по ячейке. При этом могут быть реализованы процедуры «отсева» некачественных оценок (экспертов).

В результате парных сравнений эксперт поставил следующие оценки, сведенные в таблицу (табл. 1.4).

Таблица 1.4

Наименование показателя (параметра)	**I**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Σ**	Ранг	Вес ω_i
Надежность поставок, % срывов поставок	**1**	1	2	0	2	0	1	2	**8**	**2**	0,236
Удаленность поставщика от потребителя, км	**2**	0	1	1	0	0	0	1	**3**	**7**	0,019
Потери груза, % от стоимости	**3**	2	1	1	1	0	2	0	**7**	**4**	0,087
Класс сервиса на линии	**4**	0	2	1	1	1	1	2	**8**	**2**	0,236
Качество организации транспортных услуг	**5**	2	2	2	1	1	2	2	**12**	**1**	0,389
Частота сервиса	**6**	1	2	0	1	0	1	1	**6**	**5**	0,053
Квалификация персонала	**7**	0	1	2	0	0	1	1	**5**	**6**	0,032

Ранг определяется порядком убывания суммарной оценки показателя.

Вес показателей определим по формуле

$$\omega_i = \Delta_x \exp(-x_i),$$

где x_i середина i-го интервала, $i = 1, 2,\ldots,7$; Δ_x – интервал, рассчитываемый с учетом количества показателей и размаха значений x.

Примем $\Delta_x = 0{,}5$, тогда для первого показателя середина интервала $x_1 = 0{,}25$ (рис. 1.1).

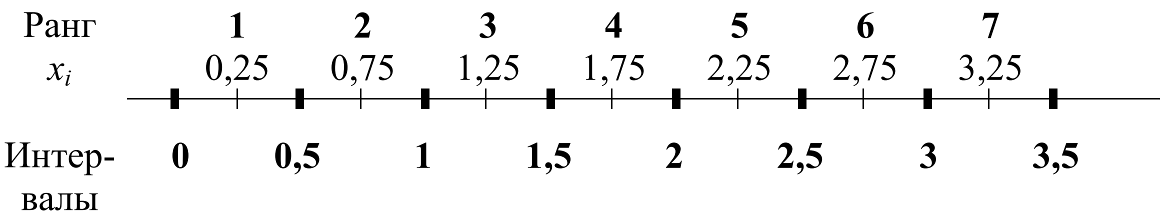


Рис. 1.1

$$\omega_1 = 0{,}5 * \exp(-0{,}25) = 0{,}389.$$

Для второго показателя середина интервала $x_2 = 0{,}75$.

$$\omega_2 = 0{,}5 * \exp(-0{,}75) = 0{,}236.$$

Для третьего показателя середина интервала $x_2 = 0,75$.

$$\omega_3 = 0,5 * \exp(-0,75) = 0,236.$$

Для четвертого показателя середина интервала $x_2 = 1,75$.

$$\omega_4 = 0,5*\exp(-1,75) = 0,087.$$

Результаты остальных расчетов приведены в табл. 1.5.

4 Для показателей первой и второй групп провести рейтинговую оценку перевозчика (для трех выбранных) с использованием лучшего значения в качестве эталона.

Вес определяется в предыдущем пункте.

Значения рейтингов по сравнению с эталоном вычисляем по формулам

$$\text{для min } X_{i,\text{нов}} = X_{\text{эт}}/X_i;$$
$$\text{для max } X_{i,\text{нов}} = X_i \,/\, X_{\text{эт}}.$$

Средневзвешенный вес поставщика определяется как $\sum_i \omega_i X_{i,нов}$.

Таблица 1.5

Наименование показателя (параметра)	Вес ω_i	Желательное значение	Эталон $X_{\text{эт}}$	Нормирование $X_{i,нов}$			$\omega_i X_{i,нов}$		
				I	II	III	I	II	III
Надежность поставок, % срывов поставок	0,23	min	2	0,15	1,00	0,166	0,036	0,236	0,039
Удаленность поставщика от потребителя, км	0,01	min	220	1,00	0,449	0,611	0,019	0,008	0,011
Потери груза, % от стоимости	0,08	min	0,2	0,08	0,095	1,00	0,007	0,008	0,087
Класс сервиса на линии	0,23	min	1	0,33	1,00	0,20	0,078	0,236	0,047
Качество организации транспортных услуг	0,38	max	90	0,77	0,444	1,00	0,302	0,172	0,389
Частота сервиса	0,05	max	48	1,00	0,645	0,541	0,053	0,034	0,028
Квалификация персонала	0,0	max	47	0,91	0,638	1,00	0,029	0,020	0,032
Суммарная оценка с учетом веса							**0,52**	**0,71**	**0,63**

Сравниваем результаты, выбираем поставщика – II.

5 Определим поставщика, удовлетворяющего показателям из третьей группы.

Условия задания (из табл. 1.2):

8	Наличие системы управления качеством (ISO)	Есть/Нет	Есть	Есть	Нет
9	Отслеживание отправок	Да/Нет	Нет	Есть	Есть

Требование «Наличие системы управления качеством» исключает из рассмотрения III поставщика и определяет лучшим (из оставшихся) II.

Требование «Отслеживание отправок» исключает из рассмотрения I поставщика и определяет лучшим (из оставшихся) II.

6 Проведем многокритериальный выбор поставщика по нормированным данным значений показателей – x_{ij}, полученным в п. 2 (табл. 1.3), работы аддитивной сверткой и минимаксной сверткой показателей по соответствующим формулам:

$$J_{\text{опт}} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_{ij} \; ; \; \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1,$$

$$J_{\text{опт}} = x_{ij} - x_{ij} \; . \; .$$

Вес α_i выбирает эксперт.

Расчеты по аддитивной свертке (1.1) сведем в табл. 1.6.

Таблица 1.6

Показатель (критерий)	i	Поставщик j			Вес α_i	$\alpha_i x_{i1}$	$\alpha_i x_{i2}$	$\alpha_i x_{i3}$
		1	2	3				
Сервис на линии	1	0,500	1,000	0,000	0,20	0,100	0,200	0,000
Качество организации транспортных услуг	2	0,333	0,667	0,111	0,24	0,080	0,160	0,027
Частота сервиса	3	0,050	0,475	0,600	0,30	0,015	0,143	0,180
Квалификация персонала	4	0,575	0,25	0,675	0,26	0,111	0,195	0,085
Сумма $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_{ij}$					1	0,305	0,698	0,291
$J_{\text{опт}}$ – max							X	

$J_{\text{опт}} = 2$ – второй поставщик предпочтителен.

Расчеты по аддитивной свертке (1.2) сведем в табл. 1.7, 1.8.

Таблица 1.7

Показатель (критерий)	i	Поставщик j			Вес, α_i	$\alpha_i x_{i1}$	$\alpha_i x_{i2}$	$\alpha_i x_{i3}$
		1	2	3				
Сервис на линии	1	0,500	1,000	0,000	0,20	0,100	0,200	0,000
Качество организации транспортных услуг	2	0,333	0,667	0,111	0,24	0,080	0,160	0,027
Частота сервиса	3	0,050	0,475	0,600	0,30	0,015	0,143	0,180
Квалификация персонала	4	0,575	0,25	0,675	0,26	0,111	0,195	0,085
Сумма $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_{ij}$					1	0,305	0,698	0,291
$J_{опт}$ – max							X	

Таблица 1.8

№ п/п	Показатель (критерий)	I	II	III	x_{ij}
1	Сервис на линии x_{1j}	0,500	1,000	0,000	1,000
	$_{ij} - x_{ij}$	0,5	0	1	
2	Качество организации транспортных услуг x_{2j}	0,333	0,667	0,111	0,667
	$_{ij} - x_{ij}$	0,334	0	0,556	
3	Частота сервиса x_{3j}	0,050	0,475	0,600	0,600
	$_{ij} - x_{ij}$	0,55	0,125	0	
4	Квалификация персонала x_{4j}	0,575	0,25	0,675	0,675
	$_{ij} - x_{ij}$	0,325	0	0,425	
	max	0,55	0,125	1	
	$J_{опт}$ – min		X		

$J_{опт} = 2$ – второй поставщик предпочтителен.

Контрольные вопросы

1 В чем состоит сущность экспертного подхода к выбору логистических посредников?

2 Охарактеризуйте алгоритм выбора логистических посредников с учетом количественных, качественных и релейных показателей их работы.

3 Какие методы используют для обработки количественных и качественных показателей работы логистических посредников с целью определения интегральной оценки посредника?

2 ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ЛОГИСТИКЕ

Задание

Ознакомиться с общим алгоритмом (схемой) прогнозирования на базе расчетов, выполненных в продукте MS Excel.

Для данных, приведенных в табл. 2.1, выполнить:

1 Выбрать показатель (по последней цифре номера в списке группы), характеризующий логистический процесс компании, по номеру варианта. Подготовить исходные данные для получения прогноза в MS Excel.

2 Выполнить прогноз с помощью алгоритма, представленного в примере.

3 Сохранить результаты прогноза и запомнить оптимальные (рациональные) модели прогнозирования и результаты.

4 Оценить качество прогноза. Построить графики по моделям зависимостей и базовых (ретроспективных) данных показателей.

5 Оформить результаты в отчете.

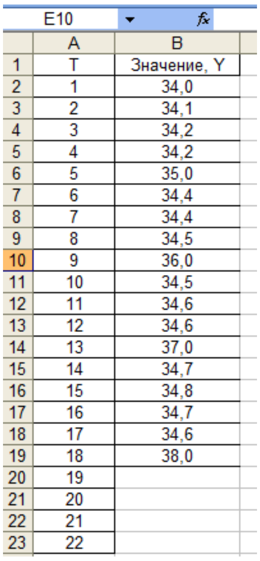
Методические указания по выполнению задания

Пусть выбранный показатель, характеризующий логистический процесс компании, имеет вид, представленный в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Наименование показателя (параметра), млн руб.	Период, месяц								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Объем продаж	34,0	34,1	34,2	34,2	35,0	34,4	34,4	34,5	36,0
Наименование показателя (параметра) млн руб.	Период, месяц								
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Объем продаж	34,5	34,6	34,6	37,0	34,7	34,8	34,7	38,0	34,9

На рис. 2.1 слева представлены исходные данные. Значение «Т» в столбце «А» делаем на четыре единицы больше, так как эти ячейки служат порядковыми номерами прогнозирования процесса. В столбец «В» вводим исходные данные из условия «Значение Y». Следует учитывать, что формат ячеек «Значение Y» должен быть числовой. Проверить это можно, выделив область «Значение Y». Затем нажатием правой кнопки мыши открыть вспомогательное меню и выбрать «Формат ячеек». Проверить, чтобы в окне «Числовые форматы» (рис. 2.2) было выбрано поле «Числовой». Осуществим ввод исходных данных в динамическую таблицу MS Excel.



	A	B
1	T	Значение, Y
2	1	34,0
3	2	34,1
4	3	34,2
5	4	34,2
6	5	35,0
7	6	34,4
8	7	34,4
9	8	34,5
10	9	36,0
11	10	34,5
12	11	34,6
13	12	34,6
14	13	37,0
15	14	34,7
16	15	34,8
17	16	34,7
18	17	34,6
19	18	38,0
20	19	
21	20	
22	21	
23	22	

Рис. 2.1

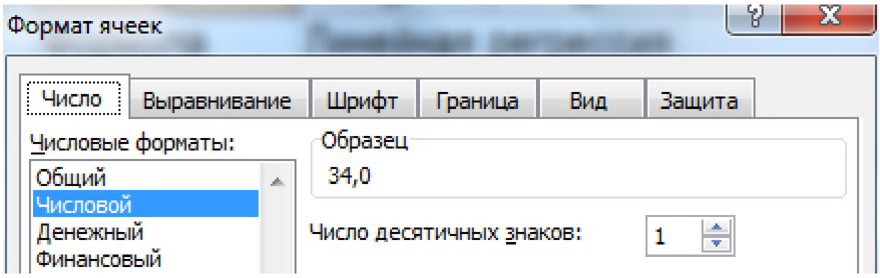
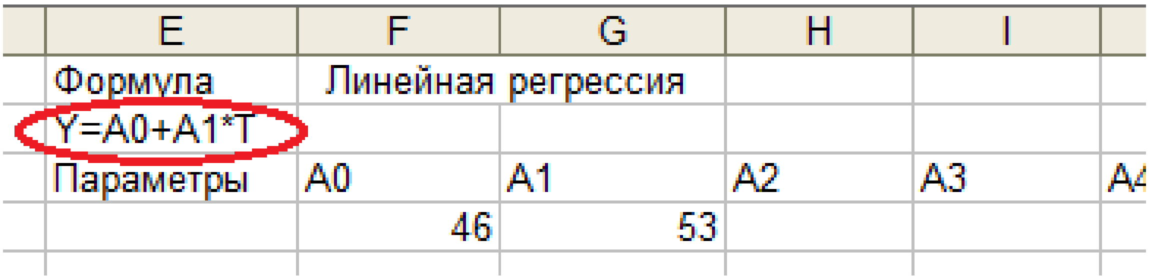


Рис. 2.2

Выполним прогнозирование логистического процесса с помощью ***линейной регрессии***. Введем формулу и параметры в динамическую таблицу MS Excel (рис. 2.3).



E	F	G	H	I	
Формула	Линейная регрессия				
Y=A0+A1*T					
Параметры	A0	A1	A2	A3	A4
	46	53			

Рис. 2.3

В качестве параметров A0, A1 используем случайную величину. Произведем расчет по приведенной формуле. Y(T) – данные, полученные в результате расчета по формуле, приведенной на рис. 2.3. Для нахождения значения Y(T) в диалоговое окно следует ввести с клавиатуры выражение *f(x)*= $F$4 + B2 * A2.

В качестве параметров модели применяется свободный член и угловой коэффициент. Далее следует найти разность между «Y» и «Y(T)» , затем возвести ее в квадрат. Вводим в диалоговое окно выражение *f*(*x*)= (B2 - C2), затем нужно применить это выражение для всех остальных ячеек столбца (рис. 2.4). Далее выполняется «автосумма». Для этого следует выполнить следующие действия. Выбрать свободную ячейку и сделать ее активной (воспользоваться символом автосуммы , нажав на него, выделить столбец со значениями «(Y-Y(T))^2» и нажать клавишу «Enter») (рис.

2.4). Затем следует найти коэффициент корреляции между значениями Y и Y(T). В диалоговое окно вводят следующую функцию =КОРРЕЛ и указывают массивы со значениями расчета. В указанном примере это (B2:B12;C2:C12).

	A	B	C
1	T	Значение, Y	Y(T)
2	1	34,0	99
3	2	34,1	152
4	3	34,2	205
5	4	34,2	258
6	5	35,0	311
7	6	34,4	364
8	7	34,4	417
9	8	34,5	470
10	9	36,0	523
11	10	34,5	576
12	11	34,6	629
13	12	34,6	682
14	13	37,0	735
15	14	34,7	788
16	15	34,8	841
17	16	34,7	894
18	17	34,6	947
19	18	38,0	1000
20	19		1053
21	20		1106
22	21		1159
23	22		1212

D24 =СУММ(D2:D23)

	A	B	C	D
1	T	Значение, Y	Y(T)	(Y-Y(T))^2
2	1	34,0	99	4225,00
3	2	34,1	152	13899,01
4	3	34,2	205	29188,93
5	4	34,2	258	50081,10
6	5	35,0	311	76176,00
7	6	34,4	364	108608,94
8	7	34,4	417	146418,96
9	8	34,5	470	189699,34
10	9	36,0	523	237169,00
11	10	34,5	576	293254,73
12	11	34,6	629	353358,82
13	12	34,6	682	419110,28
14	13	37,0	735	487204,00
15	14	34,7	788	567443,58
16	15	34,8	841	649928,38
17	16	34,7	894	738338,86
18	17	34,6	947	832450,53
19	18	38,0	1000	925444,00
20	19		1053	
21	20		1106	
22	21		1159	
23	22		1212	
24				6121999,46

Рис. 2.4

Для адекватного расчета линейной регрессии следует применить функцию «Поиск решений». Делаем активной ячейку со значением суммы. Во вкладке верхнего меню «Сервис» выбираем «Поиск решений».

В появившемся окне (рис. 2.5) необходимо проверить, чтобы была правильно установлена «целевая ячейка». Выбрать «минимальное значение», изменяя ячейки, имеющие параметр А0, А1, затем нажать «Выполнить». Новые результаты являются конечным этапом расчетов линейной регрессии (рис. 2.6).

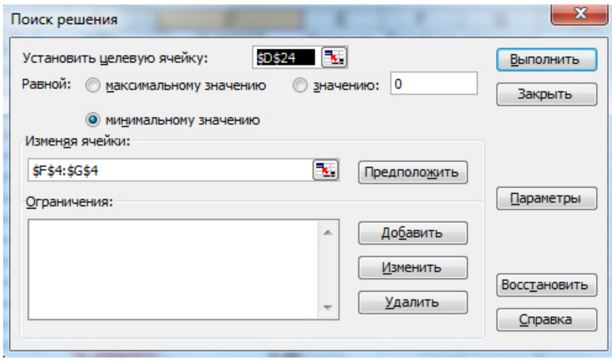


Рис. 2.5

После выполнения расчетов необходимо построить диаграмму прогноза. В меню выбираем «Мастер диаграмм». Далее в открывшемся окне выбираем «График». Нужный вид диаграммы выделен черным цветом (рис. 2.7). В появившемся меню выбрать вкладку «Ряд» -> Добавить. В окне «Значения» указываем массив значений Y. Затем необходимо добавить еще один ряд и указать массив значений Y(T) (рис. 2.8).

	A	B	C	D	E	F	G
1	T	Значение, Y	Y(T)	(Y-Y(T))^2	Формула	Линейная	регрессия
2	1	34,0	34,0	0,00	Y=A0+A1*T		
3	2	34,1	34,1	0,00	Параметры	A0	A1
4	3	34,2	34,2	0,00		33,87047	0,108597
5	4	34,2	34,3	0,01			
6	5	35,0	34,4	0,34			
7	6	34,4	34,5	0,01			
8	7	34,4	34,6	0,08			
9	8	34,5	34,7	0,08			
10	9	36,0	34,8	1,33			
11	10	34,5	35,0	0,24			
12	11	34,6	35,1	0,25			
13	12	34,6	35,2	0,31			
14	13	37,0	35,3	2,95			
15	14	34,7	35,4	0,46			
16	15	34,8	35,5	0,46			
17	16	34,7	35,6	0,76			
18	17	34,6	35,7	1,22			
19	18	38,0	35,8	4,73			
20	19		35,9				
21	20		36,0				
22	21		36,2				
23	22		36,3				
24				13,24			
25	Коэффициент корреляции		0,5				

Рис. 2.6

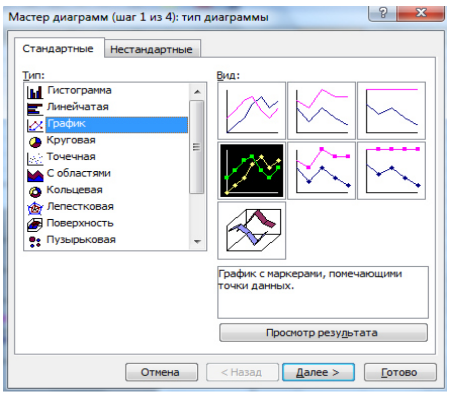


Рис. 2.7

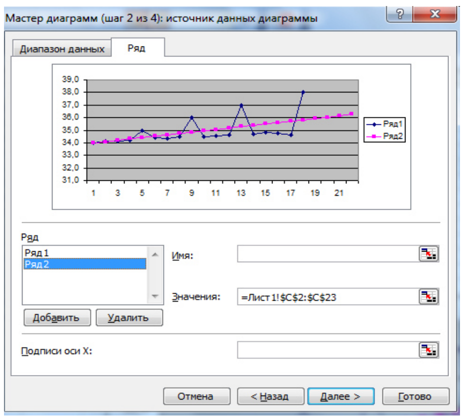


Рис. 2.8

В конечном итоге должна получиться диаграмма, где Ряд 1 – значения Y, Ряд 2 – линейная регрессия (рис. 2.9).

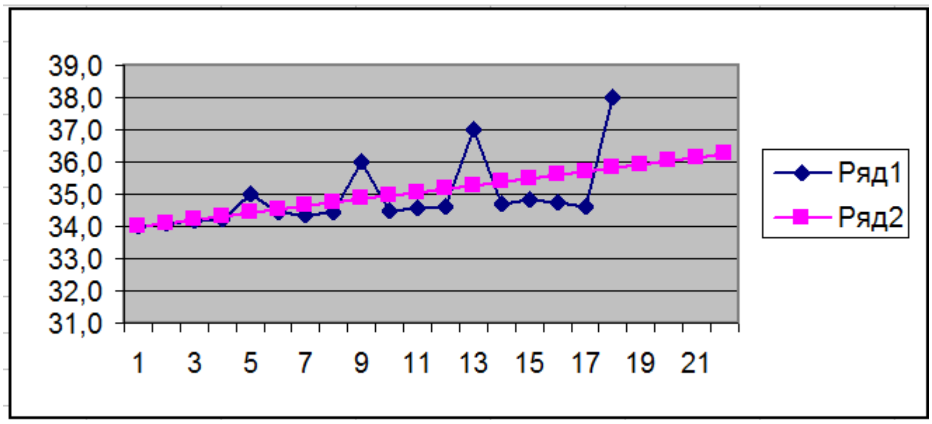


Рис. 2.9

На следующем этапе необходимо провести планирование логистического процесса с помощью ***параболической регрессии***. Исходные данные остаются неизменными. Добавляем случайную величину в параметр A2. Расчет массива со значениями Y(T) производится по формуле Y=A0+A1*T+A2*T^2 (рис. 2.10).

E	F	G	H	I	J
Формула	Параболическая регрессия				
Y=A0+A1*T+A2*T^2	A0	A1	A2	A3	A4
Параметры	43	36	23		

Рис. 2.10

Далее производится расчет Y(T) по алгоритму, аналогичному линейной регрессии (рис. 2.11).

	A	B	C	D
1	T	Значение, Y	Y(T)	(Y-Y(T))^2
2	1	34,0	102	4624,0
3	2	34,1	207	29892,4
4	3	34,2	358	104877,3
5	4	34,2	555	271220,2
6	5	35,0	798	582169,0
7	6	34,4	1087	1107879,8
8	7	34,4	1422	1925565,0
9	8	34,5	1803	3127751,0
10	9	36,0	2230	4813636,0
11	10	34,5	2703	7121052,3
12	11	34,6	3222	10159773,2
13	12	34,6	3787	14080410,2
14	13	37,0	4398	19018321,0
15	14	34,7	5055	25203296,8
16	15	34,8	5758	32754804,8
17	16	34,7	6507	41890233,2
18	17	34,6	7302	52814917,7
19	18	38,0	8143	65691025,0
20	19		9030	
21	20		9963	
22	21		10942	
23	22		11967	
24				280701449,1
25	Коэффициент корреляции		0,558793677	

Рис. 2.11

Затем следует выполнить «Поиск решений». Диаграмма параболической регрессии выполняется аналогично диаграмме линейной регрессии. Результат расчета представлен на рис. 2.12.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	T	Значение, Y	Y(T)	(Y-Y(T))^2	Формула	Параболическая регрессия				
2	1	34,0	34,2	0,0	Y=A0+A1*T+A2*T^2	A0	A1	A2	A3	A4
3	2	34,1	34,2	0,0	Параметры	34,15640812	0,022808	0,004515		
4	3	34,2	34,3	0,0						
5	4	34,2	34,3	0,0						
6	5	35,0	34,4	0,4						
7	6	34,4	34,5	0,0						
8	7	34,4	34,5	0,0						
9	8	34,5	34,6	0,0						
10	9	36,0	34,7	1,6						
11	10	34,5	34,8	0,1						
12	11	34,6	35,0	0,2						
13	12	34,6	35,1	0,2						
14	13	37,0	35,2	3,2						
15	14	34,7	35,4	0,4						
16	15	34,8	35,5	0,5						
17	16	34,7	35,7	0,9						
18	17	34,6	35,8	1,5						
19	18	38,0	36,0	3,9						
20	19		36,2							
21	20		36,4							
22	21		36,6							
23	22		36,8							
24				13,0						
25	Коэффициент корреляции		0,6							

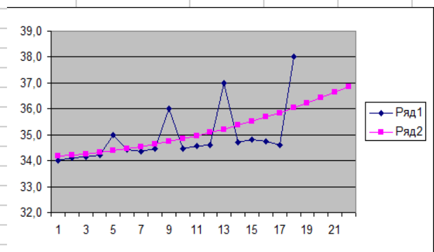


Рис. 2.12

Далее выполняем прогнозирование логистического процесса на основе ***авторегрессии с постоянным трендом***. Расчет массива со значениями Y(T) производится по формуле Y(t) = A0 + A1*Y(t – 1) (рис. 2.13).

E	F	G	H	I	J	K
Формула	Авторегрессия с постоянным трендом					
Y(t)=A0+A1*Y(t-1)						
Параметры	A0	A1	A2	A3	A4	A5
	46	54				

Рис. 2.13

Прогнозирование на основе авторегрессии выполняется аналогично двум примерам (авторегрессии и параболической регрессии), рис. 2.14.

C3 =F$4+G$4*C2

	A	B	C	D
1	T	Значение, Y	Y(T)	(Y-Y(T))^2
2	1	34,0	34,0	0,0
3	2	34,1	35	0,8
4	3	34,2	36	3,4
5	4	34,2	37	7,8
6	5	35,0	38	9,0
7	6	34,4	39	20,8
8	7	34,4	40	31,9
9	8	34,5	41	42,8
10	9	36,0	42	36,0
11	10	34,5	43	72,8
12	11	34,6	44	89,1
13	12	34,6	45	107,9
14	13	37,0	46	81,0
15	14	34,7	47	151,0
16	15	34,8	48	173,7
17	16	34,7	49	203,5
18	17	34,6	50	236,8
19	18	38,0	51	169,0
20	19		52	
21	20		53	
22	21		54	
23	22		55	
24				1437,3
25	Коэффициент корреляции		0,549023553	

Рис. 2.14

Выполним «Поиск решений», затем построим диаграмму (рис. 2.15).

	A	B	C	D	E	F	G
1	T	Значение, Y	Y(T)	(Y-Y(T))^2	Формула	Авторегрессия	
2	1	34,0	34,0	0,0	Y(t)=A0+A1*Y(t-1)		
3	2	34,1	34,2	0,0	Параметры	A0	A1
4	3	34,2	34,3	0,0		4,477313	0,873206
5	4	34,2	34,4	0,1			
6	5	35,0	34,5	0,2			
7	6	34,4	34,6	0,0			
8	7	34,4	34,7	0,1			
9	8	34,5	34,8	0,1			
10	9	36,0	34,9	1,3			
11	10	34,5	34,9	0,2			
12	11	34,6	35,0	0,2			
13	12	34,6	35,0	0,2			
14	13	37,0	35,1	3,8			
15	14	34,7	35,1	0,1			
16	15	34,8	35,1	0,1			
17	16	34,7	35,1	0,2			
18	17	34,6	35,2	0,3			
19	18	38,0	35,2	7,9			
20	19		35,2				
21	20		35,2				
22	21		35,2				
23	22		35,2				
24				14,8			
25	Коэффициент корреляции		0,506121798				

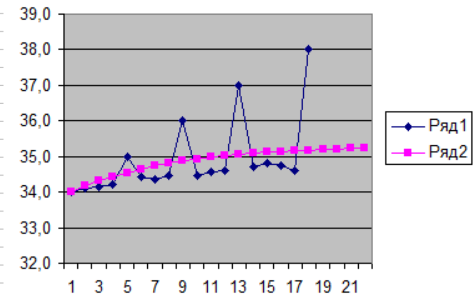


Рис. 2.15

Сезонная авторегрессия и скользящая средняя выполняются аналогичным образом по соответствующим формулам: Y(t) = A0+A1*Y(t–4), Y(t) = A0*Y(t–1)+(1–A0)*y(t–1).

Контрольные вопросы

1 Какие методы прогнозирования вы знаете и в чем их отличия?

2 Каковы этапы прогнозирования при статистическом методе прогнозирования?

3 Что вы понимаете под точностью прогноза?

4 Как оценить адекватность модели прогноза исследуемому процессу?

5 Приведите типы моделей статистического моделирования?

3 МАРШРУТИЗАЦИЯ ПЕРЕВОЗОК

Задание

1 Для транспортной задачи с n = 5 пунктами поставки и m = 6 пунктами получения по исходным данным, представленным в табл. 3.1 – 3.3, выполнить следующее:

1.1 Построить начальный план по двум из вышеприведенных методов и сравнить результаты.

1.2 Проверить на оптимальность лучший из полученных планов. Если план не оптимальный, выполнить улучшение плана методом потенциалов.

1.3 Используя приложение MS-Excel, составить задание на поиск решения транспортной задачи и найти оптимальное решение.

1.4 Сравнить затраты, полученные по оптимальному и начальным решениям.

Таблица 3.1

c_{ij}	Пункты получения						
Пункты поставки	*i* *j*	1	2	3	4	5	6
	1	15	14	10	13	14	11
	2	9	13	19	14	14	13
	3	20	8	26	16	13	14
	4	12	13	18	10	9	12
	5	10	14	14	6	8	18

Таблица 3.2

c_{ij}		Вариант – предпоследняя цифра номера варианта студента									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Пункты получения	b_1	100	110	80	30	100	80	100	120	110	80
	b_2	90	40	40	130	60	30	130	50	150	110
	b_3	140	120	90	90	90	100	90	110	100	140
	b_4	100	70	90	60	50	30	70	80	60	70
	b_5	90	140	30	100	120	120	120	130	170	120
	b_6	80	120	270	190	180	240	90	110	110	80

Таблица 3.3

c_{ij}		Вариант – последняя цифра номера варианта студента									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Пункты поставки	a_1	180	50	100	110	50	200	180	80	170	90
	a_2	120	190	130	160	200	50	100	90	140	120
	a_3	110	90	180	100	110	110	80	120	180	130
	a_4	120	170	70	60	160	80	90	170	30	150
	a_5	70	100	120	170	80	160	150	140	80	110

2 Найти, используя приложение MS-Excel, решение задачи с ограничением на пропускные способности по направлениям, представленным в табл. 3.4.

2.1 Сравнить суммарные издержки по полученным вариантам решений.

2.2 Установить, какие направления являются лимитирующими для уменьшения транспортных издержек (где достигнуты предельные пропускные способности)

3 Используя приложение MS-Excel, решить транспортную задачу с промежуточными пунктами (распределительными складами), см. указания по выполнению задания.

Таблица 3.4

d_{ij}	Пункты получения						
Пункты поставки	i/j	1	2	3	4	5	6
	1			50			
	2	80					90
	3		120				
	4					150	
	5	200					

Решить задачу для случая $n = 3$, $r = 3$, $m = 4$ и данных, представленных в табл. 3.5–3.8.

Таблица 3.5

d_{ik}	$s_1 = 50$	$s_2 = 30$	$s_3 = 80$
$a_1 =$	12	6	4
$a_2 =$	10	15	12
$a_3 =$	16	8	14

Таблица 3.6

c_{kj}	$b_1 =$	$b_2 =$	$b_3 =$	$b_4 =$
$s_1 = 50$	10	14	10	13
$s_2 = 30$	19	12	13	11
$s_3 = 80$	13	9	16	8

Таблица 3.7

c_{ij}		Вариант – предпоследняя цифра номера варианта студента									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Пункты получения	b_1	30	30	40	20	40	50	40	20	20	50
	b_2	40	40	50	40	30	30	20	10	30	30
	b_3	20	40	40	20	40	30	30	30	50	30
	b_4	70	50	30	80	50	50	70	100	60	50

Таблица 3.8

c_{ij}		Вариант – последняя цифра номера варианта студента									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Пункты поставки	a_1	30	50	50	50	20	60	40	60	50	50
	a_2	10	30	20	10	50	10	40	40	20	50
	a_3	120	80	90	100	90	90	80	60	90	60

Методические указания по выполнению задания

Пункты 1.1 и 1.2 выполнить «вручную» с учетом нижеследующих теоретических сведений.

Имеется n пунктов поставки некоторого продукта с объемами a_i, $i = 1,2, \ldots n$, и m пунктов получения этого же продукта с потребностями b_j, $j = 1,2, \ldots , m$. Известны c_{ij} – транспортные издержки, связанные с доставкой единицы продукта из пункта поставки i в пункт получения j, $i = 1,2,\ldots n$, $j = 1,2, \ldots , m$ (рис. 3.1).

Найти x_{ij} – объемы перевозки из пункта поставки i в пункт получения j, $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$, доставляющие минимум суммарных транспортных затрат, т.е.

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min_{\|x_{ij}\|}.$$

Ограничениями в задаче являются:

1 Потребности всех пунктов получения должны быть удовлетворены, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \;,\; j = 1,2,\ldots,m.$$

2 При условии, что выполняется условие $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$, можно сформулировать ограничение: со всех пунктов отправления продукт отправлен полностью, т.е.

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \;,\; i = 1,2,\ldots,n.$$

3 Объемы поставок должны быть неотрицательными, т.е. $x_{ij} \geq 0$ для всех $i = 1,2,\ldots,n$ и $j = 1,2,\ldots,m$.

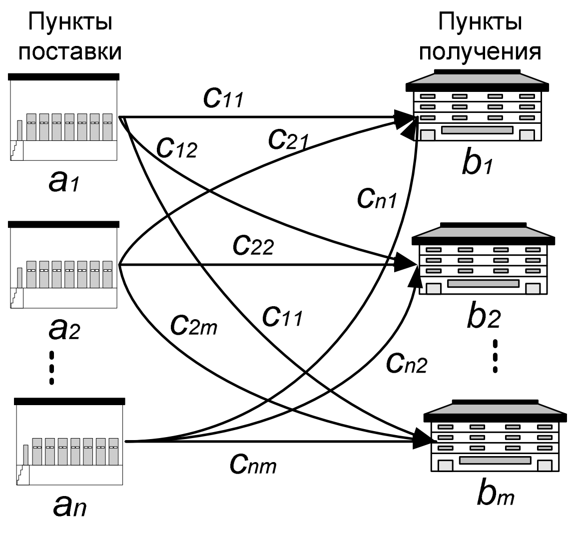


Рис. 3.1

Следует заметить, что для получения решения (оптимального плана) задачи должно быть выполнено условие $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$ (суммарный объем продукта на складах равен суммарному объему потребностей пунктов получения), т.е. это задача «закрытого» типа. Если данное условие не выполняется (задача «открытого» типа), то для выполнения ограничений искусственно вводим фиктивный (несуществующий) пункт поставки или получения с недостающим объемом $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j\right|$, а транспортные издержки, связанные с этим пунктом, приравниваем к нулю (или другой константе).

Данные для транспортной задачи с четырьмя пунктами поставки $(n = 4)$ и пятью пунктами получения $(m = 5)$ приведены в табл. 3.9.

Таблица 3.9

Пункты поставки	Пункты получения				
	$b_1 = 90$	$b_2 = 90$	$b_3 = 80$	$b_4 = 60$	$b_5 = 30$
$a_1 = 100$	12	8	16	13	15
$a_2 = 80$	4	5	10	9	9
$a_3 = 120$	14	9	8	7	7
$a_4 = 50$	3	15	4	13	16

Доказано, что в оптимальном (наилучшем) решении транспортной задачи (в приведенной постановке) должно быть не более $n+m-1$ базисных (ненулевых) переменных. Для нахождения некоторого начального решения, которое может претендовать на оптимальность, можно воспользоваться следующими шагами.

Шаг 1. Выбираем некоторое направление (i, j) из нерассмотренных и присваиваем переменной x_{ij} максимально возможное значение объема перевозок (в начале все направления доступны).

Шаг 2. Уменьшаем объем пункта отправки i и потребность пункта получения j на величину x_{ij}. При этом хотя бы в одном из двух пунктов (отправления i или получения j) получим нулевой объем (отправления или получения).

Шаг 3. Исключаем из рассмотрения один из пунктов, где получен нулевой объем отправления или получения.

Шаг 4. Если остались допустимые направления, то переходим к повторению шагов, иначе получим некоторый допустимый план для проверки на оптимальность.

В зависимости от стратегии выбора очередного направления для реализации различают методы:

северо-западного угла – выбирают нерассмотренное верхнее левое направление в матрице x_{ij};

минимального элемента – выбирают нерассмотренное направление с минимальной стоимостью;

двойного предпочтения – предварительно помечают для каждой строки и столбца направления с минимальной стоимостью. В результате имеем направления с двумя пометками, с одной пометкой и без пометок, которые и рассматриваем именно в такой последовательности.

Рассмотрим получение начального решения каждым из методов и значение суммарных транспортных издержек в каждом случае.

Метод *северо-западного угла* не требует анализа транспортных издержек по направлениям. Реализация вышеприведенных шагов для построения начального плана определяет данную последовательность рассмотрения направлений (табл. 3.10): (1,1) – (1,2) – (2,2) – (3,2) – (3,3) – (3,4) – (4,4) – (4,5).

Таблица 3.10

Пункты поставки	Пункты получения				
	$b_1 = 90$	$b_2 = 90$	$b_3 = 80$	$b_4 = 60$	$b_5 = 30$
$a_1 = 100$	90	10			
$a_2 = 80$		80			
$a_3 = 120$		0	80	40	
$a_4 = 50$				20	30

Из рассмотрения после каждого шага исключают строки и столбцы, соответствующие пунктам поставки и получения: столбец 1 – строка 1 – строка 2 – столбец 2 – столбец 3 – строка 3 – столбец 4 – столбец 5.

Заметим, что после рассмотрения направления (2,2) объемы поставки пункта 2 и объем получения пункта 2 становятся нулевыми. Из рассмотрения исключают один из них, в нашем случае исключен пункт поставки 2 (строка 2).

Суммарные издержки по плану (ед.)

$$Z = 90 \cdot 12 + 10 \cdot 8 + 80 \cdot 5 + 0 \cdot 9 + 80 \cdot 8 + 40 \cdot 7 + 20 \cdot 13 + 30 \cdot 16 = 3220.$$

В методе *минимальной стоимости* последовательно выбираем направление с минимальной стоимостью. Реализация шагов для построения начального плана обеспечивает прохождение направлений в таком порядке (табл. 3.11): $(4,1) - (2,1) - (2,2) - (3,4) - (3,5) - (1,2) - (3,3) - (1,3)$.

Таблица 3.11

Пункты поставки	Пункты получения				
	$b_1 = 90$	$b_2 = 90$	$b_3 = 80$	$b_4 = 60$	$b_5 = 30$
$a_1 = 100$	12	8 50	16 50	13	15
$a_2 = 80$	4 40	5 40	10	9	9
$a_3 = 120$	14	9	8 30	7 60	7 30
$a_4 = 50$	3 50	15	4	13	16

Суммарные издержки по плану (ед.)

$$Z = 50 \cdot 8 + 50 \cdot 16 + 40 \cdot 4 + 40 \cdot 5 + 30 \cdot 8 + 60 \cdot 7 + +30 \cdot 7 + 50 \cdot 3 = 2580.$$

Для реализации метода *двойного предпочтения* предварительно помечаем направления. В результате получены направления с двойной пометкой, показанные двойным обрамлением, и с одной пометкой, показанные полужирным обрамлением. Дальнейший выбор направлений обеспечивает прохождение направлений в такой последовательности (табл. 3.12):

$(4,1) - (3,4) - (3,5) - (1,2) - (2,1) - (1,3) - (2,3) - (3,3)$.

Таблица 3.12

Пункты поставки	Пункты получения					u_i
	$b_1 = 90$	$b_2 = 90$	$b_3 = 80$	$b_4 = 60$	$b_5 = 30$	
$a_1 = 100$	12	8 90	16 10	13	15	$u_1 = 0$
$a_2 = 80$	4 40	5	10 40	9	9	$u_2 = -6$
$a_3 = 120$	14	9	8 30	7 60	7 30	$u_3 = -8$
$a_4 = 50$	3 50	15	4	13	16	$u_4 = -7$
v_j	$v_1 = 10$	$v_2 = 8$	$v_3 = 16$	$v_4 = 15$	$v_5 = 15$	

Исключение строк и столбцов в результате решения выполняется в определенной последовательности: строка 4 – столбец 4 – столбец 5 – столбец 2 – столбец 1 – строка 1 – строка 2 – строка 3.

Суммарные издержки по плану (ед.)

$$Z = 90 \cdot 8 + 10 \cdot 16 + 40 \cdot 4 + 40 \cdot 10 + 30 \cdot 8 + 60 \cdot 7 + 30 \cdot 7 + 50 \cdot 3 = 2460.$$

Как видно из результатов расчетов, полученные планы разные и требуют дальнейшего анализа на оптимальность.

Рассмотрим метод потенциалов для получения оптимального решения. Из теории известно, что для оптимальности решения должны существовать величины u_i и v_j (потенциалы), для которых выполняются условия:

$u_i + v_j = c_{ij}$ – для всех выбранных направлений в плане,

$u_i + v_j \le c_{ij}$ – для остальных направлений.

По первому условию можно найти неизвестные величины. Далее, для направления с максимальным нарушением второго условия оптимальности производим перераспределение объемов так, чтобы число базисных переменных оставалось равным $n+m-1$. Для улучшения плана строим замкнутый контур, используя направление с нарушением условия оптимальности и базисные переменные (направления).

Рассчитанные потенциалы для решения, приведенного в табл. 3.12, представлены в последних строке и столбце. Для нахождения потенциалов одну из переменных u_i и v_j берем произвольной, например $u_1 = 0$, а остальные находим последовательно по цепочке по заполненным клеткам:

$$
\begin{aligned}
&u_1 + v_2 = 8 \Rightarrow v_2 = 8,\\
&u_1 + v_3 = 16 \Rightarrow v_3 = 16,\\
&u_2 + v_3 = 10 \Rightarrow u_2 = -6,\\
&u_3 + v_3 = 8 \Rightarrow u_3 = -8,\\
&u_2 + v_1 = 4 \Rightarrow v_1 = 10,\\
&u_3 + v_4 = 7 \Rightarrow v_4 = 15,\\
&u_3 + v_5 = 7 \Rightarrow v_5 = 15,\\
&u_4 + v_1 = 3 \Rightarrow u_4 = -7.
\end{aligned}
$$

Проверяем нарушение второго условия оптимальности в направлениях:

$u_1 + v_1 \le 12,$ нарушения нет,
$u_1 + v_4 \le 13,$ нарушение 2 ед.,
$u_1 + v_5 \le 15,$ нарушения нет,
$u_2 + v_2 \le 5,$ нарушения нет,
$u_2 + v_4 \le 9,$ нарушения нет,
$u_2 + v_5 \le 9,$ нарушения нет,
$u_3 + v_1 \le 14,$ нарушения нет,
$u_3 + v_2 \le 9,$ нарушения нет,
$u_4 + v_2 \le 15,$ нарушения нет,
$u_4 + v_3 \le 4,$ нарушение 5 ед.,
$u_4 + v_4 \le 13,$ нарушения нет,
$u_4 + v_5 \le 16,$ нарушения нет.

Поскольку объем перевозки в направлении (4,3) будет увеличиваться, то по направлению (4,1) – уменьшаться, по (2,1) – увеличиваться, по (2,3) – уменьшаться. Перераспределяемый объем равен 40 ед. Новый план будет иметь вид, представленный в табл. 3.13.

Таблица 3.13

Пункты поставки	Пункты получения					u_i
	$b_1 = 90$	$b_2 = 90$	$b_3 = 80$	$b_4 = 60$	$b_5 = 30$	
$a_1 = 100$	12	8 90	16 10	13	15	$u_1 = 0$
$a_2 = 80$	4 80	5	10	9	9	$u_2 = -11$
$a_3 = 120$	14	9	8 30	7 60	7 30	$u_3 = -8$
$a_4 = 50$	3 10	15	4 40	13	16	$u_4 = -12$
v_j	$v_1 = 15$	$v_2 = 8$	$v_3 = 16$	$v_4 = 15$	$v_5 = 15$	

Суммарные издержки по новому плану составят (ед.)

$$Z = 90 \cdot 8 + 10 \cdot 16 + 80 \cdot 4 + 30 \cdot 8 + 60 \cdot 7 + 30 \cdot 7 + 10 \cdot 3 + 40 \cdot 4 = 2260.$$

Нетрудно убедиться, что и полученный план не оптимальный (новые рассчитанные потенциалы приведены в табл. 3.14.

Оптимальный план представлен в табл. 3.14.

Таблица 3.14

Пункты поставки	Пункты получения					u_i
	$b_1 = 90$	$b_2 = 90$	$b_3 = 80$	$b_4 = 60$	$b_5 = 30$	
$a_1 = 100$	12 10	8 90	16	13	15	$u_1 = 0$
$a_2 = 80$	4 80	5	10	9	9	$u_2 = -8$
$a_3 = 120$	14	9	8 30	7 60	7 30	$u_3 = -5$
$a_4 = 50$	3 0	15	4 50	13	16	$u_4 = -9$
v_j	$v_1 = 12$	$v_2 = 8$	$v_3 = 13$	$v_4 = 12$	$v_5 = 12$	

Суммарные издержки по новому плану составят (ед.)

$$Z = 12 \cdot 10 + 90 \cdot 8 + 80 \cdot 4 + 30 \cdot 8 + 60 \cdot 7 + 30 \cdot 7 + 0 \cdot 3 + 50 \cdot 4 = 2230.$$

Для решения задачи в MS-Excel (п. 1.3 задания) воспользуйтесь подсказками дополнения к данному заданию.

При сравнении затрат (п. 1.4 задания), полученных по оптимальному и начальным решениям, оценить в процентах улучшение затрат в процентах по оптимальному варианту в сравнении с начальными.

Пункт 2 задания выполняют в MS-Excel. Рекомендуется скопировать полученный рабочий лист в новый и добавить в «Поиск решения» ограничения по пропускным способностям направлений.

1) Определить, на сколько увеличиваются транспортные издержки в решении с ограничениями на пропускные способности.

2) Определить и указать направления с полным использованием пропускных способностей для перевозки.

Для выполнения п. 3 задания ввести в задание на поиск решения два диапазона переменных определяющие x_{ik} и y_{kj}, ограничения на суммарный объем поступающего объема.

Задача имеет следующую постановку.

Имеются n пунктов поставки некоторого продукта с объемами a_i, $i = 1,2,...,n$, r распределительных складов с объемами размещения груза s_k, $k = 1,2,...,r$ и m пунктов потребления этого продукта с потребностями b_j, $j = 1,2,\ldots,m$.

Известны d_{ik} – транспортные издержки, связанные с доставкой единицы продукта из пункта поставки i в распределительный склад k, c_{kj} – транспортные издержки, связанные с доставкой единицы продукта из распределительного склада k в пункт потребления (получения) j, $i = 1,2,...,n$, $k = 1,2,...,r$, $j = 1,2,\ldots,m$.

Найти x_{ik} – объемы перевозки из пункта поставки i до распределительного склада k, y_{kj} – объемы перевозки из распределительного склада k в пункт получения j, $i = 1,2,...,n$, $k = 1,2,...,r$, $j = 1,2,\ldots,m$, доставляющие минимум суммарных транспортных затрат.

Расчеты провести в MS-Excel. Переменные будут иметь два диапазона значений, определяемые x_{ik} и y_{kj}. В остальном все решается так же, как и в п. 1.3 и 2 (см. дополнение).

Контрольные вопросы

1 Какие варианты задач планирования и маршрутизации перевозок в соответствии с классификацией, приведенной в табл. 3.1, были рассмотрены в заданиях данного раздела?

2 Зависит ли число пунктов поставки от числа пунктов получения в транспортной задаче?

3 Чем отличается «открытая» транспортная задача от «закрытой»?

4 Как привести «открытую» транспортную задачу к «закрытой»?

5 Какие методы построения начального плана транспортной задачи вы знаете, в чем их отличия?

6 Всегда ли существует оптимальное решение для транспортной задачи?

Дополнение. Решение транспортной задачи в среде MS-Excel

В стандартную поставку MicroSoft Excel (MS-Excel) входят дополнительные функции для корреляционно-регрессионного, финансового анализа данных, поиска решения. Последнее служит для решения оптимизационных задач. Воспользуемся этой функцией для решения транспортной задачи.

Общий вид окна настройки поиска решения приведен на рис. 3.2. Здесь *1* – ячейка со значением целевой функции, *2* – направление оптимизации целевого функционала, *3* – диапазон ячеек с изменяемыми значениями (переменные), *4* – задание ограничений задачи, *5* – запуск поиска решения, *6* – параметры поиска.

Рассмотроим небольшой (для удобства отображения) пример. Исходные данные для примера представлены в табл. 3.15.

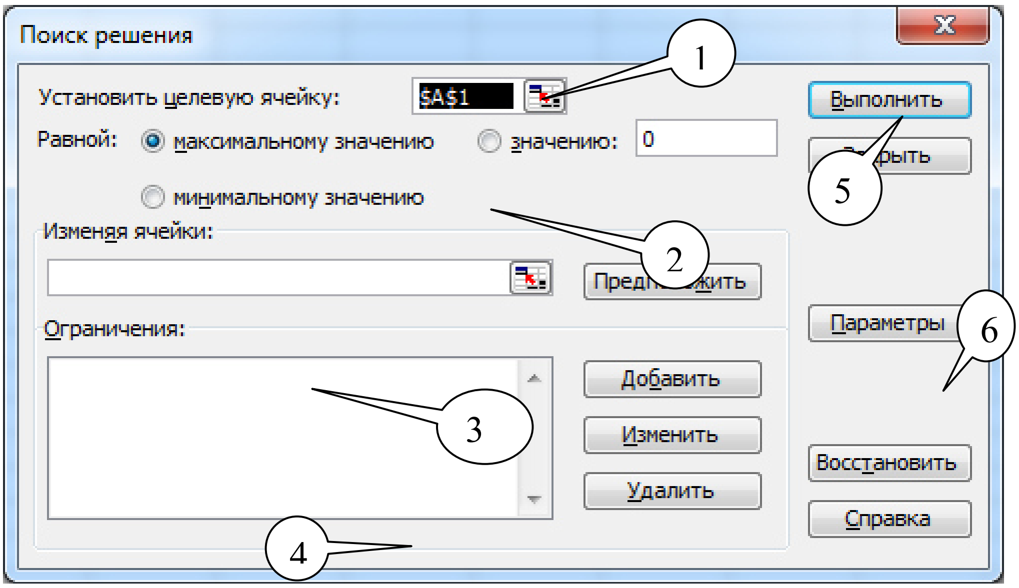


Рис. 3.2

Таблица 3.15

a_i / b_j	40	50	30	20
60	12	8	16	13
50	4	5	10	9
30	14	9	8	7

Информация для ввода в рабочий лист MicroSoft Excel и расчетные формулы приведены на рис. 3.3. В расчетных формулах используется встроенная функция MS Excel вычисления суммы чисел из заданного диапазона ячеек. Например, СУММ(B8:E8) определяет сумму ячеек B8, C8, D8 и E8. Для удобства представления расчеты приведены поэтапно: расчет транспортных издержек по направлениям, далее суммарные транспортные издержки.

В соответствии с данными на рис. 3.3 требуется минимизировать суммарные издержки, вычисляемые в ячейке F17, за счет изменения объемов поставок по направлениям, представленным в ячейках B8:E10. Суммарные объемы отправления из пунктов поставки приводятся в ячейках F8:F10, а суммарные объемы получения по каждому пункту получения – в ячейках B11-E11.

Приведенные в формальной постановке ограничения описываются в функции «Поиск решения» MS Excel. Если данная функция в подпунктах меню «Сервис» отсутствует, следует его активировать, выполнив пункты «Сервис» – «Надстройки», отмечаем «Поиск решения» и «Ок». Если данное действие не дало результата, следует обратиться к справочной системе Приложения MS Excel.

Рис. 3.3

После активации окна «Поиск решения» необходимо ввести установки для поиска решения транспортной задачи (рис. 3.4):

– целевая ячейка – вручную или указанием на ячейку определяем ячейку со значением целевой функции. Обозначение $F$17 определяет абсолютность адреса ячейки, т.е. при добавлении и удалении ячеек адрес данной ячейки не будет смещаться;

– устанавливаем направленность целевой функции (ячейки). В нашем случае – нахождение минимального значения;

– определяем изменяемые ячейки (переменные задачи) в диапазоне $B8$:$E$10, т.е. решение задачи;

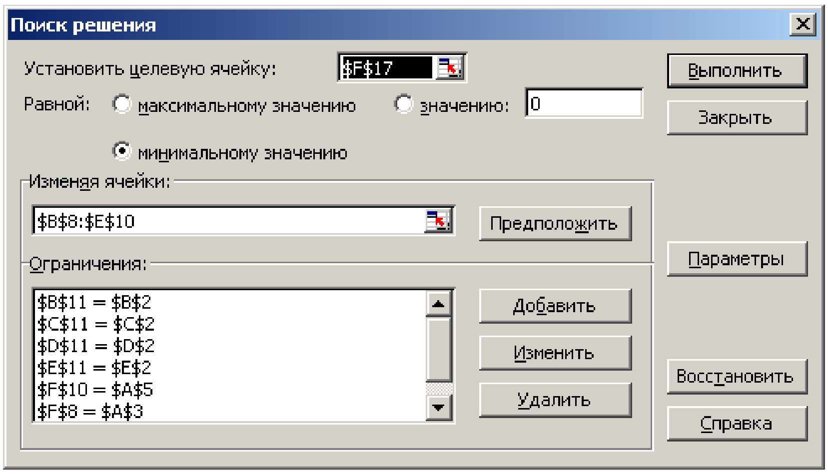


Рис. 3.4

– задаем ограничения задачи, для чего в режиме добавления (кнопка «Добавить») определяем три ограничения на объемы поставок и четыре ограничения на объемы получения (рис. 3.5). Перечень ограничений после завершения ввода отобразится в окне «Ограничения» (рис. 3.5);

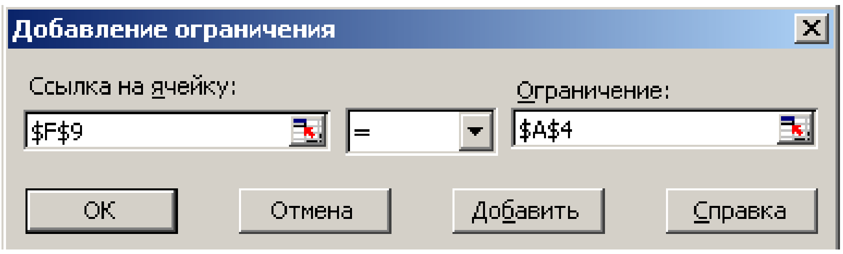


Рис. 3.5

– последнее ограничение на неотрицательность переменных транспортной задачи можно задать при определении параметров задачи (рис. 3.6.) Для этого достаточно поставить флажок (галочку) в признак «Неотрицательные значения». Остальные значения параметров поиска приведены на рис. 3.6.

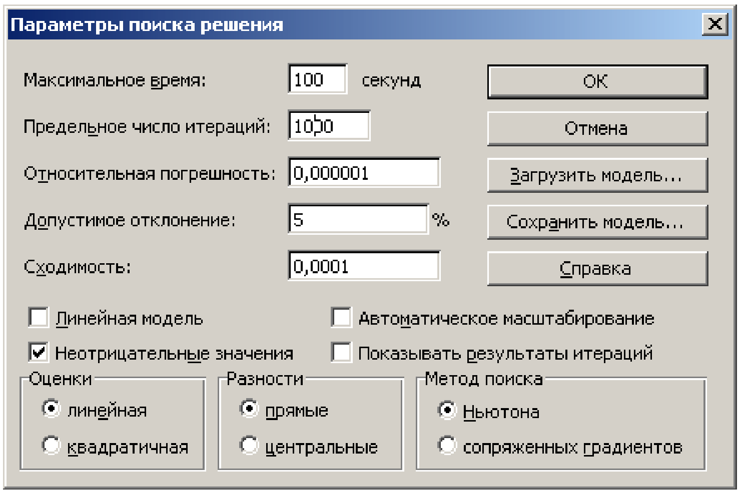


Рис. 3.6

После определения всех параметров следует «Выполнить» (рис. 3.2) расчет по поиску решения транспортной задачи. Успешный поиск оптимального решения транспортной задачи приводит к результатам, представленным на рис. 3.7.

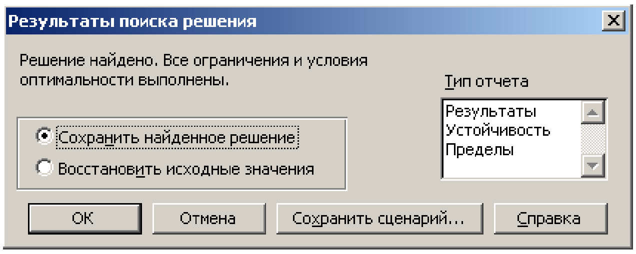


Рис. 3.7

Окончательные результаты решения транспортной задачи представлены на рис. 3.8.

	A	B	C	D	E	F
1		**Исходные данные**				
2		**40**	**50**	**30**	**20**	
3	**60**	12	8	16	13	
4	**50**	4	5	10	9	
5	**30**	14	9	8	7	
6						
7		**Решение задачи**				
8			50		10	60
9		40		10		50
10				20	10	30
11		40	50	30	20	
12						
13		**Расчет транспортных издержек**				
14			400		130	
15		160		100		
16				160	70	
17						1020
18						

Рис. 3.8

Следует отметить, что в результатах решения могут быть более чем $n+m-1$ занятых клеток – переменных (см. теоретические сведения к решению транспортной задачи), но ненулевых клеток должно не более чем $n+m-1$. В результате решения без округления значения переменных могут не равняться нулю. Для получения решения в целых числах следует форматировать ячейки диапазона $B8$:$E$10, выбрав пункты меню: «Формат» – «Ячейки» – «Число» – «Числовой» и задав число десятичных знаков равным нулю.

4 ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ МАРШРУТОВ В СЕТЯХ

Задание

Для транспортной сети с $n = 10$ пунктами, заданной графом на рис. 4.1 (N – последняя цифра номера варианта), выполнить следующее:

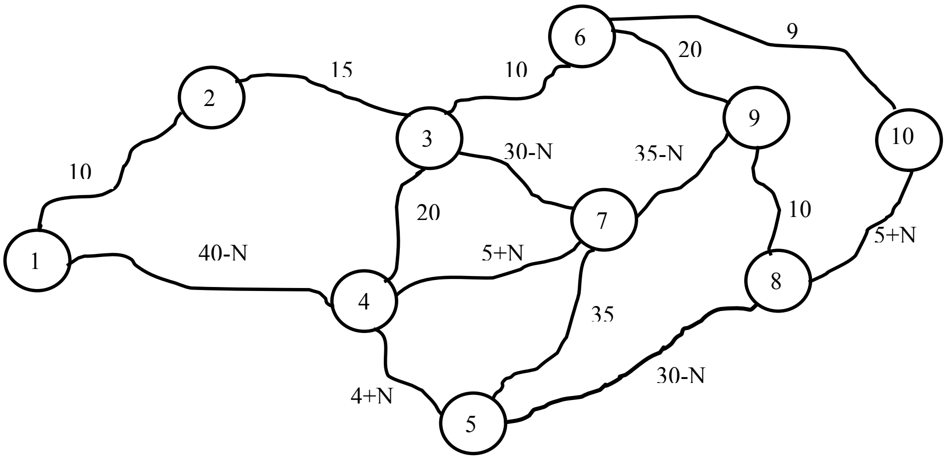


Рис. 4.1

1) построить матрицу смежности для графа транспортной сети;

2) построить кратчайший путь от пункта (вершины) Z до вершины W, вариант определяется по числу букв в фамилии студента (Z, W) по табл. 4.1;

Таблица 4.1

Число букв в фамилии							
≤5	6	7	8	9	10	11	≥12
(2,9)	(1,8)	(2,8)	(5,6)	(4,10)	(1,6)	(3,10)	(1,9)

3) найти кратчайший путь от пункта (вершины) Z (из табл. 4.1) до всех остальных пунктов (вершин);

4) построить сеть минимальной дины (минимальное дерево) с начальной вершиной в W (из табл. 4.1);

5) найти максимальный поток от пункта 1 до пункта 10 для графа, представленного на рис. 4.2 (S – число букв в фамилии студента), определить минимальный разрез графа;

6) решить задачу коммивояжера для транспортной сети, представленной на рис. 4.3 (N – последняя цифра в номере варианта, F – число букв в имени студента, S – число букв в фамилии студента).

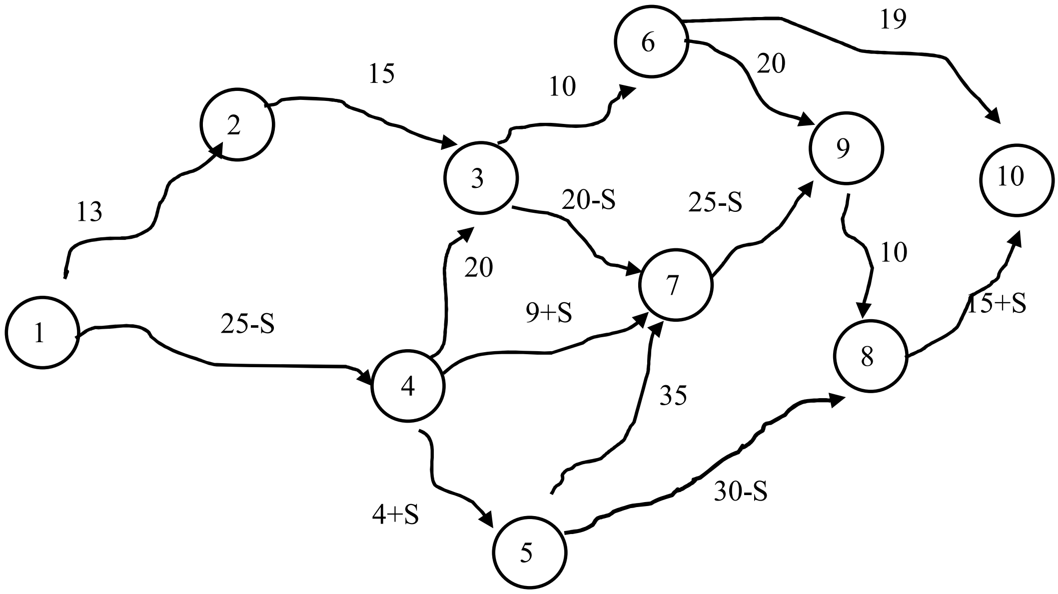


Рис. 4.2

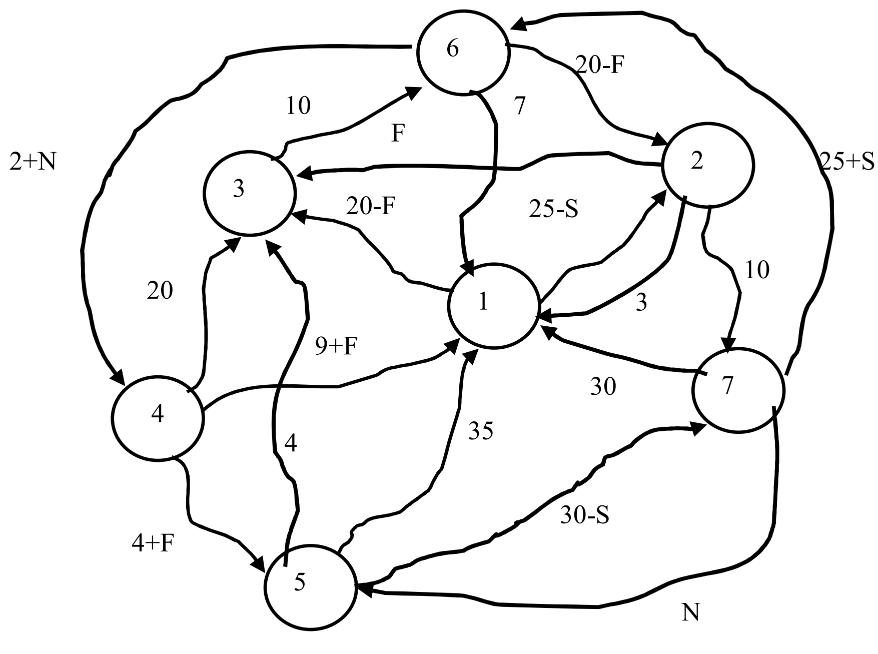


Рис. 4.3

Методические указания по выполнению задания

1 Пусть транспортная сеть задана схемой (рис. 4.4).

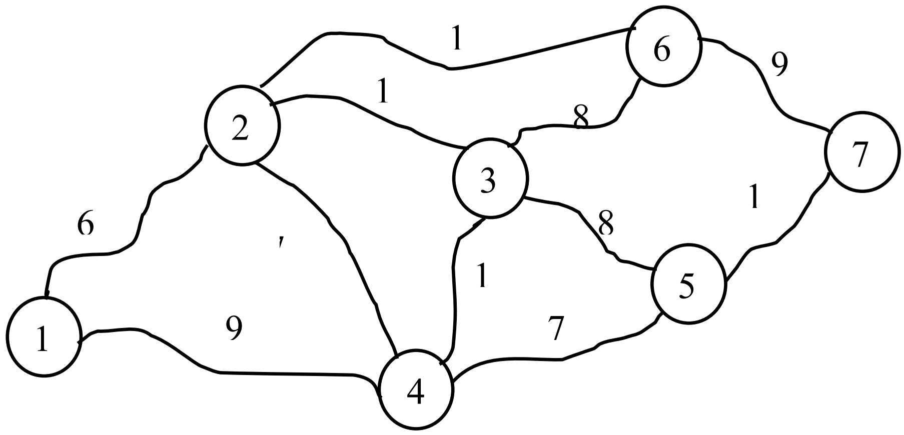


Рис. 4.4

$n = 7$ – число вершин.
Матрица смежности $n * n$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } i \text{ соединена с вершиной } j, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2 Найдем кратчайший пункт от вершины 2 до вершины 7 (рис. 4.5).

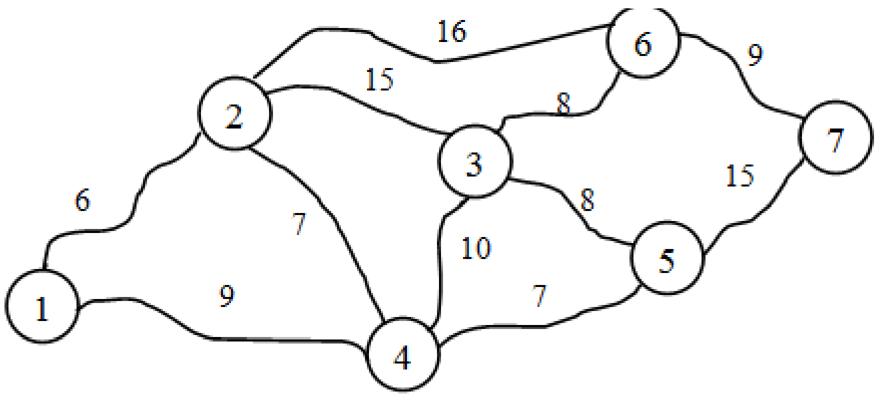


Рис. 4.5

3 Помечаем вершину 2 пометкой (0, 2) и изменяем пометки вершин, связанных с вершиной 2:

1: (6,2); 4: (7,2); 3: (15, 2); 6: (16,2).

4 Отмечаем вершину 2 как помеченную и просмотренную (рис. 4.6).

5 Выбираем непросмотренную вершину с пометкой с минимальным весом, это вершина 1.

6 Просматриваем все вершины, связанные с вершиной 1, и пересматриваем их пометки.

7 Сравниваем текущий вес вершины 7 с новым вариантом с включением пути с вершиной 1, т.е. 6 + 9 = 15; поскольку 15 > 7, пометку вершины 4 оставляем без изменения, отмечаем вершину 1 как помеченную и просмотренную (рис. 4.6).

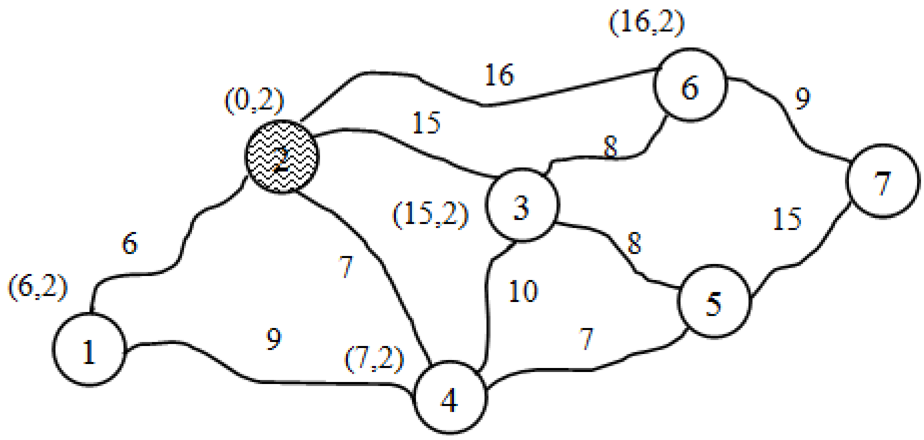


Рис. 4.6

8 Выбираем непросмотренную вершину с пометкой с минимальным весом, это вершина 4.

9 Просматриваем все вершины, связанные с вершиной 4, и пересматриваем их пометки.

10 Сравниваем текущий вес вершины 15 с новым вариантом пути с включением вершины 4, т.е. 7 + 10 = 17; поскольку 17 > 15, пометку вершины 3 оставляем без изменения.

11 Определяем пометку вершины 5: 7 + 7 = 14; поэтому пометка вершины 5 будет (14,4), отмечаем вершину 4 как помеченную и просмотренную (рис. 4.7).

12 Выбираем непросмотренную вершину с пометкой с минимальным весом, это вершина 5 (рис. 4.8).

13 Просматриваем все вершины, связанные с вершиной 5, и пересматриваем их пометки.

14 Сравниваем текущий вес вершины 15 с новым вариантом пути с включением вершины 4, т.е. 14 + 8 = 22; поскольку 22 > 15, пометку вершины 3 оставляем без изменения.

15 Определяем пометку вершины 7: 14 + 15 = 29; поэтому пометка вершины 7 будет (29,5).

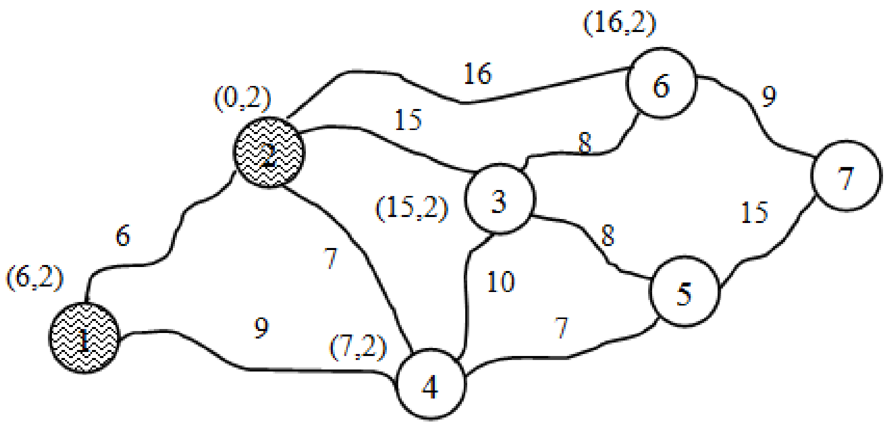


Рис. 4.7

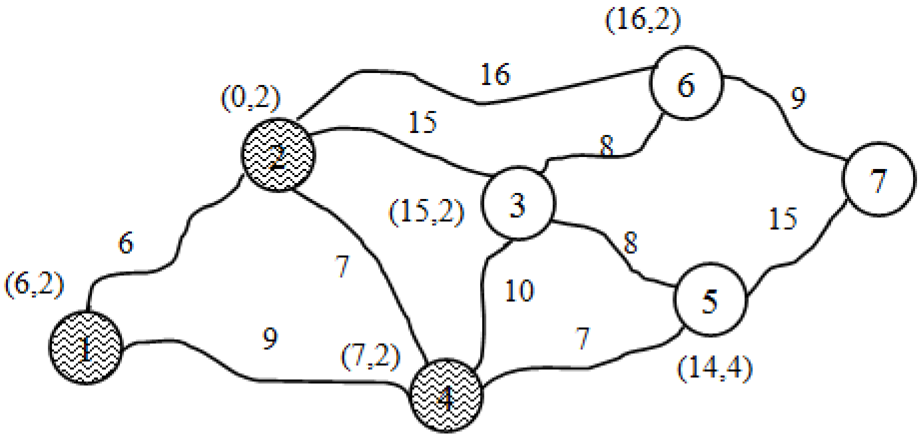


Рис. 4.8

16 Отмечаем вершину 5 как помеченную и просмотренную (рис. 4.9).

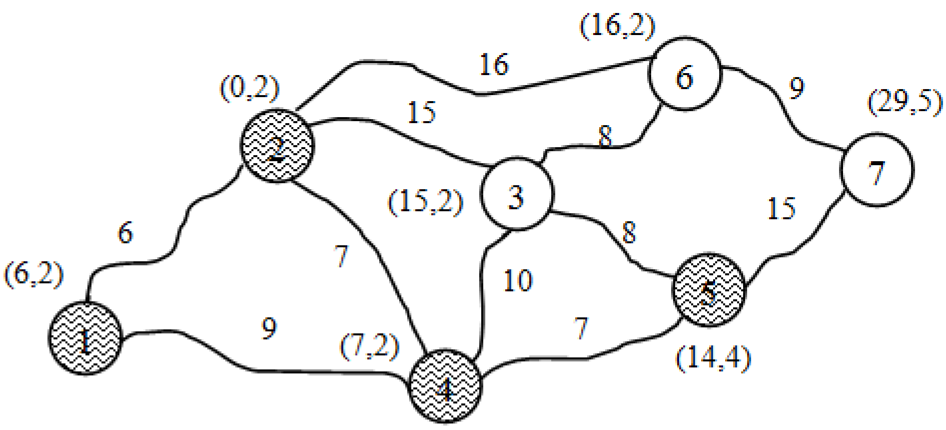


Рис. 4.9

17 Выбираем непросмотренную вершину с пометкой с минимальным весом, это вершина 3.

18 Просматриваем все вершины, связанные с вершиной 3, и пересматриваем их пометки.

19 Сравниваем текущий вес вершины 16 с новым вариантом пути с включением вершины 3, т.е. 15 + 8= 23; поскольку 23 > 16, пометку вершины 6 оставляем без изменения.

20 Отмечаем вершину 3 как помеченную и просмотренную (рис. 4.10).

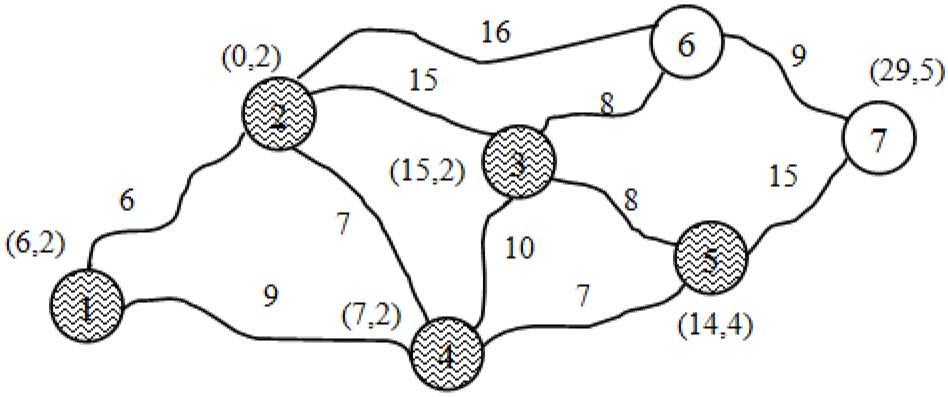


Рис. 4.10

21 Выбираем непросмотренную вершину с пометкой с минимальным весом, это вершина 6.

22 Просматриваем все вершины, связанные с вершиной 6, и пересматриваем их пометки.

23 Сравниваем текущий вес вершины 29 с новым вариантом пути с включением вершины 6, т.е. 16 + 9 = 25; поскольку 25 > 29, пометка вершины 7 будет (25,6).

24 Отмечаем вершину 6 как помеченную и просмотренную.

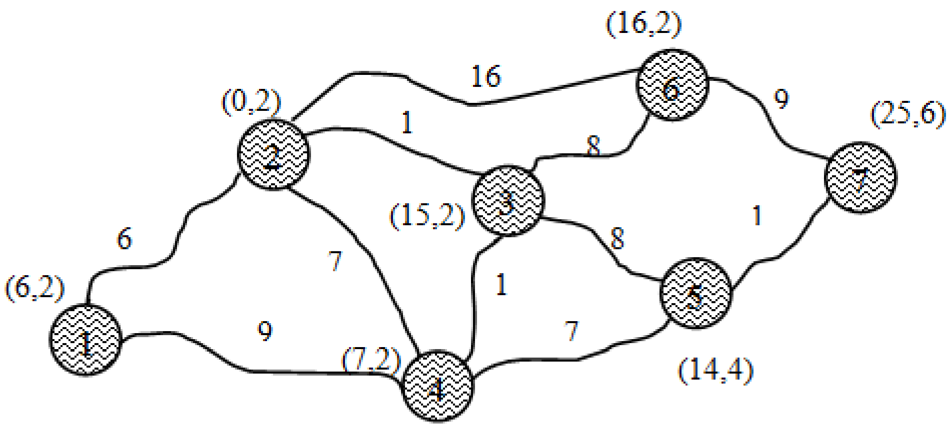


Рис. 4.11

25 Помечаем последнюю вершину 7 (рис. 4.11).

26 Восстанавливаем в обратном порядке кратчайший путь от вершины 7 к вершине 2: 7 – 6 – 2. Кратчайшее расстояние равно 25 ед.

27 Находим кратчайший путь из пункта 2 в остальные пункты (вершины) графа:

1) 2 – 1; кратчайшее расстояние равно 6 ед.

2) 2 – 3; кратчайшее расстояние равно 15 ед.

3) 2 – 4; кратчайшее расстояние равно 7 ед.

4) 2 – 4 – 5; кратчайшее расстояние равно 14 ед.

5) 2 – 6; кратчайшее расстояние равно 16 ед.

6) 2 – 6 – 7; кратчайшее расстояние равно 25 ед.

28 Построим сеть минимальной длины (минимальное дерево) с начальной вершиной 2.

Результат имеет следующий вид (рис. 4.12).

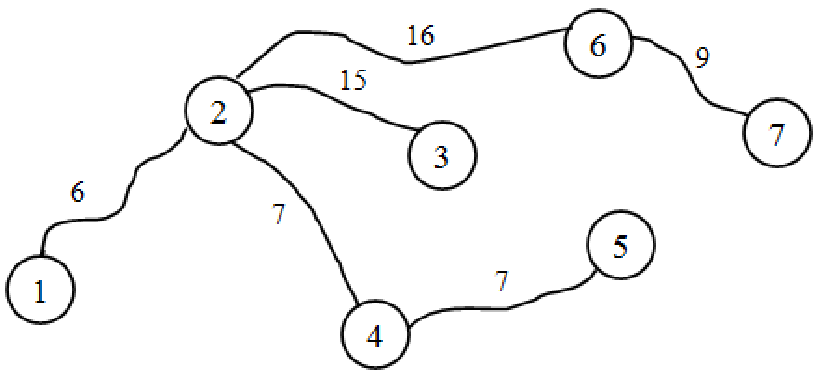


Рис. 4.12

Найти максимальный поток от пункта 1 до пункта 7 для графа, представленного на рис. 4.13.

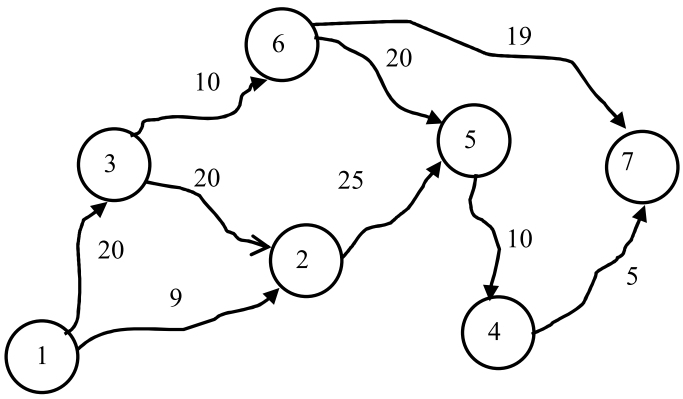


Рис. 4.13

Находим цепь между вершинами 1 и 7 с ненулевой пропускной способностью (все дуги, входящие в цепь, имеют ненулевую пропускную способность).

Пусть эта цепь 1 – 3 – 2 – 5 – 4 – 7. Пропускная способность цепи равна 5 (минимальный вес дуги с в цепи), S = 5. Уменьшаем пропускные способности дуг цепи на 5 (рис. 4.14).

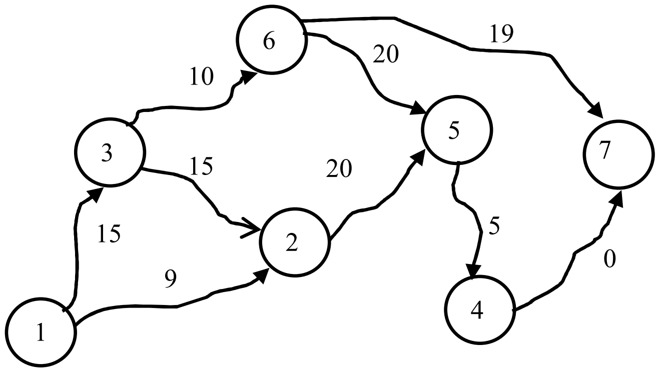


Рис. 4.14

Находим очередную цепь между вершинами 1 и 7 с ненулевой пропускной способностью.

Пусть эта цепь 1 – 3 – 6 – 7. Пропускная способность цепи равна 10 (минимальный вес дуги с в цепи), $S = 5 + 10 = 15$. Уменьшаем пропускные способности дуг цепи на 10 (рис. 4.15).

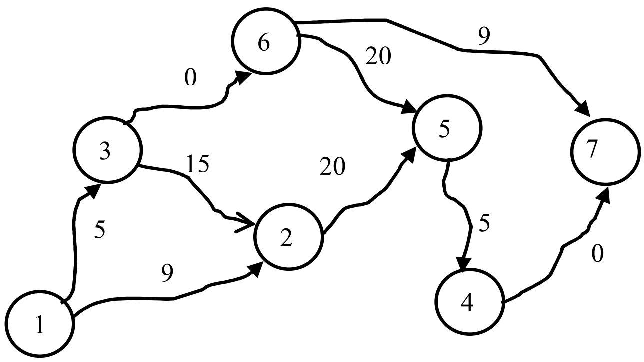


Рис. 4.15

Очередной цепи между вершинами 1 и 7 с ненулевой пропускной способностью нет.

Максимальная пропускная способность равна 15.

Определим минимальный разрез графа.

Поскольку в минимальный разрез входят дуги с нулевыми весами, минимальный разрез {(3,6); (4,7)}. Вес минимального разреза 5 + 10 = 15 ед.

Решим задачу коммивояжера для транспортной сети, представленной на рис. 4.16.

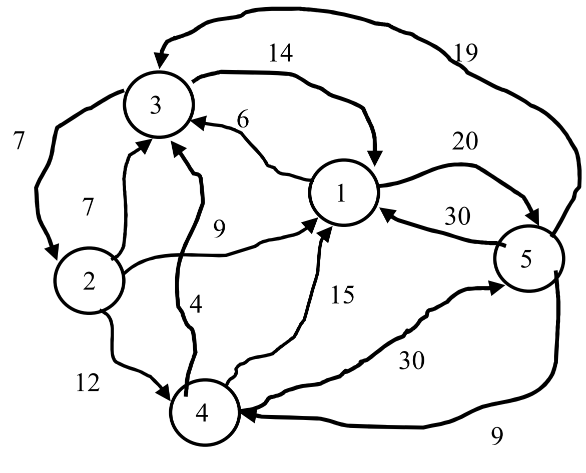


Рис. 4.16

Определим матрицу связей между вершинами:

$$A = \begin{bmatrix} \infty & \infty & 6 & \infty & 20 \\ 9 & \infty & 7 & 12 & \infty \\ 14 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ 15 & \infty & 4 & \infty & 30 \\ 30 & \infty & 19 & 9 & \infty \end{bmatrix}.$$

Находим минимальный вес в каждой строке:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \infty & \infty & 6 & \infty & 20 \\ 9 & \infty & 7 & 12 & \infty \\ 14 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ 15 & \infty & 4 & \infty & 30 \\ 30 & \infty & 19 & 9 & \infty \end{bmatrix} & \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 7 \\ 4 \\ 9 \end{matrix} \end{array}.$$

Вычитаем минимальный вес от каждого элемента в строке.
Находим минимальный вес в каждом столбце:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & \infty & 14 \\ 2 & \infty & 0 & 5 & \infty \\ 7 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ 11 & \infty & 0 & \infty & 26 \\ 21 & \infty & 10 & 0 & \infty \end{bmatrix} & \begin{matrix} 6 \\ 9 \\ 7 \\ 4 \\ 9 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} & \end{array}.$$

Вычитаем минимальный вес от каждого элемента в столбце:

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 5 & \infty \\ 5 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ 9 & \infty & 0 & \infty & 12 \\ 19 & \infty & 10 & 0 & \infty \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Нижняя оценка всех гамильтоновых контуров равна

$$F(G_0) = 6 + 9 + 7 + 4 + 9 + 2 + 14 = 51.$$

Выбираем дугу для разбиения. Определяем минимальный вес в каждой строке для нулевых весов без учета веса данной (нулевой) дуги. Эти величины записаны верхними индексами:

$$A=\begin{bmatrix}\infty & \infty & 0^0 & \infty & 0^0\\ 0^0 & \infty & 0^0 & 5 & \infty\\ 5 & 0^5 & \infty & \infty & \infty\\ 9 & \infty & 0^9 & \infty & 12\\ 19 & \infty & 10 & 0^{10} & \infty\end{bmatrix}.$$

Выбираем дугу с максимальной дополнительной оценкой. Из полученных дуг это дуга (5,4). Исходное множество G_0 разбиваем на два подмножества: в первый включены гамильтоновы контуры, содержащие дугу (5,4), во втором эта дуга исключена $\overline{(5,4)}$. $G_0=G_1\cup G_2$, $G_1\cup G_2=\varnothing$. $G_1=\{(5,4)\}$; $G_2=\{\overline{(5,4)}\}$.

Для первого подмножества имеем матрицу с исключенными 5-й строкой и 4-м столбцом и весом дуги (4,5), равным ∞, для второго подмножества та же матрица с весом дуги (5,4), равным ∞. Определяем нижние оценки для гамильтоновых контуров в подмножествах G_1 и G_2,:

$$G_1:A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\infty & \infty & 0^0 & & 0^0\\ 0^0 & \infty & 0^0 & & \infty\\ 5 & 0^0 & \infty & & \infty\\ 9 & \infty & 0^9 & & \infty\\ & & & & \end{bmatrix}\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\ \\\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 0 & 0 & & 0\end{matrix}\end{array}$$

$$F(G_1)=51$$

$$G_2:A=\begin{bmatrix}\infty & \infty & 0 & \infty & 0\\ 0 & \infty & 0 & 5 & \infty\\ 5 & 0 & \infty & \infty & \infty\\ 9 & \infty & 0 & \infty & 12\\ 19 & \infty & 10 & \infty & \infty\end{bmatrix}\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\10\end{matrix},$$

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\infty & \infty & 0 & \infty & 0\\ 0 & \infty & 0 & 5 & \infty\\ 5 & 0 & \infty & \infty & \infty\\ 9 & \infty & 0 & \infty & 12\\ 9 & \infty & 0 & \infty & \infty\end{bmatrix}\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\10\end{matrix},\\ \begin{matrix}0 & 0 & 0 & 5 & 0\end{matrix}\end{array}$$

$$A=\begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 0 & \infty \\ 5 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ 9 & \infty & 0 & \infty & 12 \\ 9 & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{matrix},$$
$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{matrix}$$

$$F(G_2) = 51 + 10 + 5 = 66.$$

Для очередного разбиения выбираем подмножество с минимальной оценкой G_1.

Для разбиения выбираем дугу (4,3). Множество G_1 разбиваем на два подмножества: в первый включены гамильтоновы контуры, содержащие дугу (4,3), во втором эта дуга исключена $\overline{(4,3)}$. $G_1 = G_3 \cup G_4$, $G_3 \cup G_4 = \varnothing$. $G_3 = \{(5,4), (4,3)\}$; $G_4 = \{(5,4), \overline{(4,3)}\}$.

Проведем изменения в матрице весов:

$$G_3 : A=\begin{bmatrix} \infty & \infty & & & 0^{\infty} \\ 0^{\infty} & \infty & & & \infty \\ 5 & 0^{\infty} & & & \infty \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \\ \\ \end{matrix},$$
$$\begin{matrix} 0 & 0 & & & 0 \end{matrix}$$

$$F(G_3) = 51.$$

$$G_4 : A=\begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & & 0 \\ 0 & \infty & 0 & & \infty \\ 5 & 0 & \infty & & \infty \\ 9 & \infty & \infty & & \infty \\ & & & & \end{bmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ \\ \end{matrix}, \quad A=\begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & & 0 \\ 0 & \infty & 0 & & \infty \\ 5 & 0 & \infty & & \infty \\ 9 & \infty & \infty & & \infty \\ & & & & \end{bmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ \\ \end{matrix},$$
$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & & 0 \end{matrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & & 0 \\ 0 & \infty & 0 & & \infty \\ 5 & 0 & \infty & & \infty \\ 9 & \infty & \infty & & \infty \\ & & & & \end{bmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ \\ \end{matrix},$$
$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & & 0 \end{matrix}$$

$$F(G_4) = 66 + 9 = 75.$$

Для очередного разбиения выбираем подмножество с минимальной оценкой G_3.

Для разбиения выбираем дугу (1,5). Множество G_3 разбиваем на два подмножества: в первый включены гамильтоновы контуры, содержащие дугу (1,5), во втором эта дуга исключена $\overline{(1,5)}$. $G_3 = G_5 \cup G_6$, $G_5 \cup G_6 = \varnothing$. $G_5 = \{(5,4), (4,3), (1,5)\}$; $G_4 = \{(5,4), (4,3), \overline{(1,5)}\}$.

Проведем изменения в матрице весов:

$$G_5 : A = \begin{bmatrix} 0 & \infty \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix},\ A = \begin{bmatrix} 0 & \infty \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix},\ A = \begin{bmatrix} 0^{\infty} & \infty \\ 5 & 0^{5} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix}$$

$$F(G_5) = 51.$$

$$G_6 : A = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & \infty \\ 5 & 0 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix},\ A = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & \infty \\ 5 & 0 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix},\ F(G_6) = \infty.$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & \infty \end{matrix}$$

Для очередного разбиения выбираем подмножество с минимальной оценкой G_5.

Для разбиения выбираем дугу (2,1). Множество G_5 разбиваем на два подмножества: в первый включены гамильтоновы контуры, содержащие дугу (2,1), во втором эта дуга исключена $\overline{(2,1)}$. $G_5 = G_7 \cup G_8$, $G_7 \cup G_8 = \varnothing$. $G_7 = \{(2,1), (5,4), (4,3), (1,5)\}$; $G_4 = \{\overline{(2,1)}, (5,4), (4,3), (1,5)\}$.

Проведем изменения в матрице весов:

$$G_7 : A = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} 0$$

В G_7 осталась единственная нерассмотренная дуга (3,2) с весом 0.

$F(G_7) = 51$. Гамильтонов контур: (1,5) – (5,4) – (4,3) – (3,2) – (2,1). Длина контура равна 51. Нижние оценки остальных подмножеств больше чем 51, поэтому их можно исключить из рассмотрения.

Таким образом, контур минимальной длины, проходящий один раз через каждую вершину, имеет вид

(1,5) – (5,4) – (4,3) – (3,2) – (2,1).

Длина контура 51 ед.

Контрольные вопросы

1 Какие формы представления графов существуют?

2 Как найти кратчайшее расстояние между двумя вершинами? Каковы основные элементы (шаги) алгоритма?

3 Что собой представляет физически остовое дерево?

4 Как связаны минимальный разрез и максимальный поток в сети?

5 Какова основная суть метода ветвей и границ?

6 Какова роль функций нижней (и верхней) границы в методе ветвей и границ?

7 Каковы основные этапы метода ветвей и границ для задачи коммивояжера?

5 СКЛАДЫ В ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Задание 1. По данным табл. 5.1 и 5.2 выполнить следующие расчеты (см. теоретические сведения):

1 Определить $V_{безраз}$ по формуле (5.6).

2 Определить целесообразность использования наемного склада или собственного при объеме товара $V_{зад}$.

3 Построить графики зависимостей, аналогично представленным на рис. 5.1, определить $V_{безраз}$. Сравнить результаты аналитических расчетов из п. 1 задания с результатами графических расчетов.

Таблица 5.1

Параметр	Вариант – последняя цифра в номере варианта студента									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_{хр}^{наем}$, руб.	29	38	40	39	30	30	29	32	32	37
$C_{тр}$, руб.	11	9	9	10	9	10	11	11	9	9

Таблица 5.2

Параметр	Вариант – предпоследняя цифра в номере варианта сту-									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_{хр}^{соб}$, руб..	18	18	20	20	21	21	19	18	19	21
Z_n, тыс. руб.	144,3	145,2	143,9	146,7	147,6	143,5	156,1	148,4	151,0	144,9
$V_{зад}$	7000	6900	5800	5600	6700	6100	6500	5300	5200	6100

Задание 2. Определить месторасположение распределительного склада.

Пусть известны месторасположения (координаты (x_i, y_j)) производителей продукции – (x_i^0, y_i^0) и потребителей продукции – (x_j^n, y_j^n), $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$, объемы поставки продукции Q_i , $i = 1,2,\ldots,n$, объемы потребности продукции в пунктах получения R_j , $j = 1,2,\ldots,m$.

Определить координаты месторасположения склада для $n = 6$ пунктов поставки продукта и $m = 7$ пунктов потребления, координаты и объемы поставок которых приводятся в табл. 5.3 – 5.6.

Расчеты провести в трех вариантах: с учетом пунктов поставки продукции, с учетом пунктов потребления продукции, с учетом пунктов поставки и потребления продукта. Привести координаты расположения пунктов поставок и потребления, их объемы и координаты месторасположения распределительного склада в координатной сетке. Провести анализ координат расположения распределительного склада.

Таблица 5.3

i	Вариант – последняя цифра в номере варианта студента									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	(50,40)	(70,50)	(10,40)	(40,20)	(10,50)	(60,70)	(10,20)	(20,30)	(50,70)	(20,50)
2	(100,60)	(50,90)	(90,30)	(100,90)	(90,60)	(30,60)	(30,20)	(60,40)	(90,40)	(90,80)
3	(70,40)	(20,30)	(70,30)	(100,40)	(80,50)	(90,40)	(60,60)	(20,90)	(40,40)	(10,40)
4	(60,30)	(50,70)	(40,60)	(80,80)	(60,90)	(100,60)	(90,40)	(50,90)	(90,80)	(90,40)
5	(70,40)	(80,70)	(10,50)	(40,90)	(10,20)	(10,50)	(60,80)	(10,60)	(20,80)	(80,90)
6	(90,60)	(60,30)	(40,60)	(80,20)	(30,20)	(90,60)	(80,90)	(60,80)	(50,80)	(40,50)

Таблица 5.4

j	Вариант – предпоследняя цифра в номере варианта студента									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	(70,80)	(90,0)	(20,40)	(0,50)	(60,70)	(80,10)	(0,60)	(30,80)	(70,40)	(20,80)
2	(40,0)	(70,90)	(100,40)	(80,80)	(80,30)	(0,30)	(50,40)	(50,50)	(60,90)	(40,30)
3	(10,70)	(10,30)	(0,60)	(40,0)	(0,60)	(40,50)	(0,40)	(100,70)	(20,50)	(70,80)
4	(20,30)	(70,60)	(20,40)	(10,50)	(30,70)	(0,10)	(40,30)	(20,40)	(30,80)	(10,80)
5	(40,0)	(100,40)	(0,90)	(60,40)	(90,50)	(70,60)	(40,40)	(100,90)	(30,80)	(40,10)
6	(70,80)	(10,40)	(70,20)	(20,80)	(70,100)	(70,60)	(40,90)	(70,60)	(100,20)	(0,10)
7	(80,90)	(50,50)	(70,60)	(70,0)	(30,70)	(80,50)	(40,40)	(50,40)	(60,40)	(40,30)

Таблица 5.5

i	Вариант – последняя цифра в номере варианта студента									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	260	360	390	300	120	350	120	100	110	180
2	350	370	160	200	120	270	200	120	180	370
3	230	140	350	230	380	280	120	90	220	170
4	270	360	200	310	120	360	150	380	240	380
5	190	380	180	280	90	180	290	100	320	120
6	340	380	150	110	150	310	280	390	210	150

Таблица 5.6

j	Вариант – предпоследняя цифра в номере варианта студента									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	380	330	350	260	170	320	330	340	190	280
2	360	280	340	160	310	200	210	250	230	380
3	140	120	130	330	240	210	150	290	360	350
4	350	150	270	240	110	320	190	220	250	280
5	390	170	260	170	110	190	360	210	240	170
6	120	110	240	270	240	270	150	110	190	270
7	380	280	130	240	110	280	230	290	190	190

Задание 3. Определить месторасположение распределительного склада с учетом дополнительных расходов к тарифам на перевозку от пунктов поставки и (или) потребления, т.е. известны T_i (T_j) – коэффициенты изменения тарифа при организации перевозки от пункта поставки *i* (получения *j*), $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$ (табл. 5.7).

Таблица 5.7

i	1	2	3	4	5	6	
T_i	0,9	0,95	1,0	1,05	0,85	1,0	
j	1	2	3	4	5	6	7
T_j	0,95	1,1	0,85	0,9	0,95	1,05	0,8

Теоретические сведения к заданию 1

Развитие технологий и специализация видов деятельности предприятий постоянно ставят перед руководством предприятий вопрос о делегированной части функций сторонним организациям. Задача выработки решения о содержании собственного складского хозяйства или использовании наемного (арендованного) склада относится к этому классу.

Выбор между собственным или наемным складом зависит от:

– затрат на хранение товаров на собственном складе $Z_{хр}^{соб}$, руб/т,

– условно-постоянных затрат на содержание собственного склада Z_n, руб.,

– объема товаров, требующих хранения на складе, *V,* т,

– дополнительных расходов, связанных с доставкой товаров с наемного склада, зависящих от объема хранения, $Z_{тр}$, руб/т,

– затрат на хранение товаров на наемном складе $Z_{хр}^{наем}$, руб/т.

В общем случае зависимости затрат от объема товара являются нелинейными функциями (это связано с оптовыми скидками, размерами партий в перевозках и другими факторами). На рис. 5.1 приводятся линейные зависимости затрат от объема товаров (грузооборота) за определенный период времени (год, квартал, месяц).

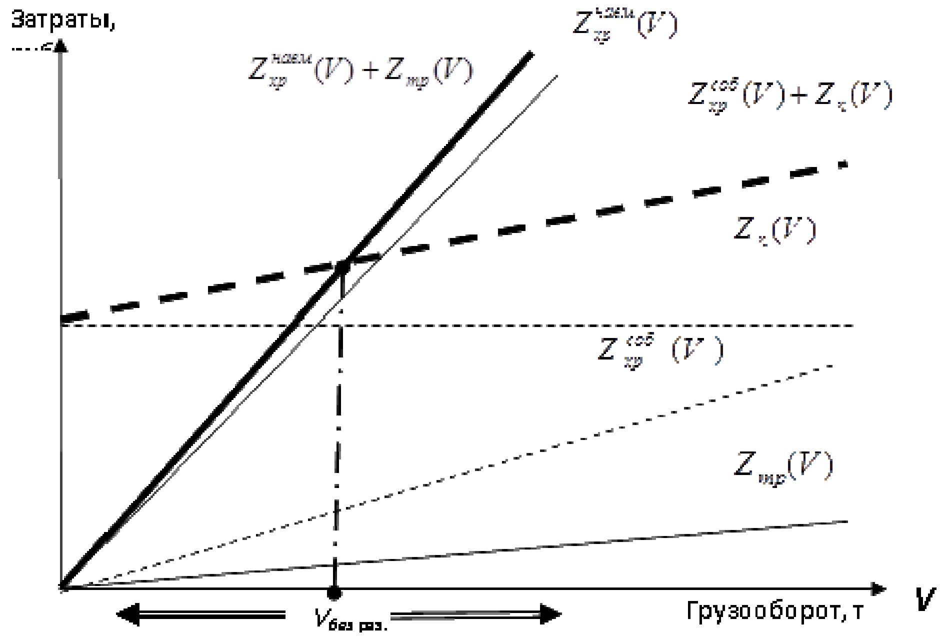


Рис. 5.1

Граничное значение объема грузооборота для принятия решения об использовании собственного или наемного склада определяется $V_{безраз}$ из условия

$$Z_{хр}^{наем}(V)+Z_{тр}(V)=Z_{хр}^{соб}(V)+Z_{п}(V)\,. \qquad (5.1)$$

Пусть

$$Z_{хр}^{наем}(V)=C_{хр}^{наем}V\,, \qquad (5.2)$$

$$Z_{тр}(V)=C_{тр}V\,, \qquad (5.3)$$

$$Z_{хр}^{соб}(V)=C_{хр}^{соб}V\,, \qquad (5.4)$$

$$Z_{п}(V)=Z_{п}=\text{const}\,, \qquad (5.5)$$

где $C_{хр}^{наем}$ – стоимость хранения 1 т товара в наемном складе, руб.;

$C_{тр}$ – стоимость транспортировки 1 т товара от наемного склада до предприятия, руб.;

$C_{хр}^{соб}$ – удельные расходы на хранение 1 т товара на собственном складе, руб.

Тогда, подставляя (5.2) – (5.5) в (5.1), получим значение $V_{безраз}$:

$$V_{безраз} = \frac{Z_n}{C_{хр}^{наем} + C_{тр} - C_{хр}^{соб}}. \tag{5.6}$$

Теоретические сведения к заданию 2

В соответствии с учетом объемов поставок и (или) получения и координат расположения пунктов поставок и (или) получения координаты расположения распределительного склада (x_S, y_S) определяют по формулам:

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} Q_i}, \quad y_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} Q_i}.$$

Например, для десятого варианта расчет координат расположения склада определяет месторасположение склада в географической точке с координатами (64,5; 57,6). Промежуточные расчеты представлены в табл. 5.8.

Таблица 5.8

i	Q_i	x_i^o	y_i^o	$Q_i \; x_i^o$	$Q_i \; y_i^o$
1	180	20	50	3600	9000
2	370	90	80	33300	29600
3	170	10	40	1700	6800
4	380	90	40	34200	15200
5	120	80	90	9600	10800
6	150	40	50	6000	7500
Сумма	1370			88400	78900

Координаты месторасположения пунктов поставки с учетом их объемов и координаты склада приведены на рис. 5.2.

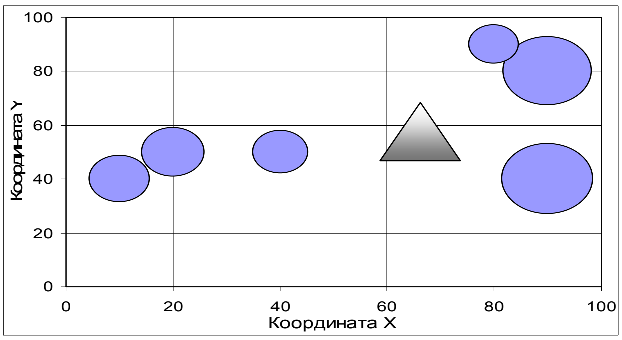


Рис. 5.2

С учетом объемов потребности потребителей продукции расчеты производят аналогично, добавляя к суммам объемы потребности и координаты потребителей продукции.

Расчеты выполняют в трех вариантах: с учетом пунктов поставки продукта, с учетом пунктов потребления продукта, с учетом пунктов поставки и потребления продукта. Указывают координаты расположения пунктов поставок и потребления, их объемы и координаты месторасположения склада в координатной сетке. Проводят анализ координат расположения распределительного склада.

Теоретические сведения к заданию 3

С учетом объемов поставок, координат расположения пунктов поставок и коэффициентов изменения тарифов при транспортировке груза от пунктов поставок координаты расположения склада (x_S, y_S) определяют по формулам:

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i Q_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} T_i Q_i}, \qquad y_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i Q_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} T_i Q_i}.$$

Контрольные вопросы

1 Какие факторы учитывают в решении вопросов складской логистики?

2 Относительно каких пунктов определяют месторасположения распределительных складов?

3 Перечислите основные виды услуг, осуществляемые складом.

4 Как влияют тарифы на перевозку груза на месторасположение распределительного склада?

5 Какие функции выполняет распределительный склад?

6 В чем преимущество реализации мелкооптовых складов?

7 Какие составляющие определяют и характеризуют систему складирования?

8 Каково значение упаковки в транспортно-складской логистике?

9 Как влияют потери груза на выбор варианта транспортировки?

6 МЕТОДЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НОМЕНКЛАТУРНЫХ ГРУПП. МЕТОДЫ *ABC* И *XYZ*

Задание 1. Для выбранной категории товаров выполнить группировку товаров по методу *ABC*. Для расчетов по конкретному варианту принять часть данных из табл. 6.1, но не менее трети данных.

Задание 2. Для выбранной категории товаров (в задании 1) выполнить группировку товаров по методу *XYZ*. Для расчетов по конкретному варианту принять часть данных категории товаров из табл. 6.2, но не менее трети данных. При выборе придерживаться выбранных номенклатурных позиций в задании 1.

Задание 3. По результатам группировки запасов, полученных при выполнении *ABC*- и *XYZ*-анализов в заданиях 1 и 2, расположить запасы в матрице *ABC*- и *XYZ*-анализов. Дать характеристику полученных номенклатурных групп товаров для управления ими.

Таблица 6.1

№ позиции	Средний запас, руб.	№ позиции	Средний запас, руб.	№ позиции	Средний запас, руб.
1	410	41	100	81	5860
2	30	42	60	82	40
3	160	43	11800	83	30
4	60	44	20	84	13840
5	12520	45	2070	85	20
6	14610	46	3510	86	2140
7	1250	47	20	87	3480
8	30	48	12100	88	3320
9	70	49	290	89	5030
10	20	50	14970	90	10
11	30	51	1380	91	14860
12	2560	52	10750	92	2550
13	12010	53	14530	93	14970
14	20	54	30	94	3260
15	10	55	250	95	10
16	3880	56	2610	96	20
17	1220	57	2090	97	10
18	70	58	8870	98	150
19	7550	59	10580	99	11560
20	750	60	13430	100	3480
21	90	61	30	101	140
22	40	62	8720	102	170

Окончание табл. 6.1

№ позиции	Средний запас, руб.	№ позиции	Средний запас, руб.	№ позиции	Средний запас, руб.
23	120	63	10	103	20
24	15000	64	7230	104	1780
25	27,210	65	0,056	105	13,367
26	1,091	66	27,803	106	2,811
27	0,141	67	23,535	107	80,321
31	13,360	71	96,937	111	6,276
32	14,019	72	6,372	112	25,327
33	4,629	73	86,668	113	18,644
34	17,464	74	76,012	114	18,960
35	7,503	75	10,008	115	66,414
36	41,169	76	51,446	116	87,610
37	6,262	77	6,132	117	84,113
38	40,773	78	14,959	118	18,950
39	99,379	79	4,376	119	8,005
40	5,738	80	46,735	120	19,604

Таблица 6.2

№ позиции	Коэффициент вариации, %	№ позиции	Коэффициент вариации, %	№ позиции	Коэффициент вариации, %
1	5,032	41	0,303	81	58,915
2	0,407	42	4,297	82	0,079
3	0,297	43	3,964	83	2,523
4	1,555	44	0,273	84	0,094
5	0,645	45	0,423	85	0,100
6	0,762	46	0,207	86	0,167
7	3,200	47	6,339	87	0,439
8	13,267	48	11,796	88	0,226
9	0,284	49	0,864	89	64,063
10	72,423	50	21,884	90	14,238
11	0,202	51	2,226	91	15,496
12	1,912	52	98,871	92	0,296
13	15,684	53	65,867	93	8,195
14	6,336	54	0,027	94	10,329
15	3,556	55	0,024	95	0,193
16	1,036	56	43,638	96	53,813
17	0,523	57	2,708	97	0,557
18	40,317	58	35,722	98	0,272
19	1,021	59	78,331	99	67,540

Окончание табл. 6.2

№ позиции	Коэффициент вариации, %	№ позиции	Коэффициент вариации, %	№ позиции	Коэффициент вариации, %
20	41,680	60	0,046	100	2,785
21	61,439	61	94,375	101	97,149
22	15,457	62	2,036	102	57,089
23	0,007	63	41,527	103	17,224
24	0,933	64	0,119	104	97,362
25	27,210	65	0,056	105	13,367
26	1,091	66	27,803	106	2,811
27	0,141	67	23,535	107	80,321
28	0,129	68	13,878	108	0,265
29	64,789	69	0,072	109	0,094
30	79,337	70	0,067	110	0,066
31	13,360	71	96,937	111	6,276
32	14,019	72	6,372	112	25,327
33	4,629	73	86,668	113	18,644
34	17,464	74	76,012	114	18,960
35	7,503	75	10,008	115	66,414
36	41,169	76	51,446	116	87,610
37	6,262	77	6,132	117	84,113
38	40,773	78	14,959	118	18,950
39	99,379	79	4,376	119	8,005
40	5,738	80	46,735	120	19,604

Методические указания по выполнению задания 1

Как правило, на предприятии используют запасы, перечень которых составляет сотни и тысячи наименований. В этом случае возникает задача управления запасами, временем и объемом пополнения заказа для каждого наименования. Выделение основных категорий запасов и управление ими – цель *ABC*- и *XYZ*-анализов.

Суть метода заключается в группировке всей номенклатуры запасов на три категории *A, B* и *C* по их значимости для организации деятельности предприятия. При этом доли категорий запасов могут быть разными (в зависимости от методологии реализации метода *ABC*).

В общем виде метод *ABC* требует выполнения следующих операций:

1) вычисление доли запаса каждой позиции в общих запасах предприятия;

2) упорядочение запасов в порядке убывания их доли;

3) вычисление долей позиций с нарастающим итогом в упорядоченном списке;

4) выделение категорий *ABC* в зависимости от определенных долей.

Пусть к категории *A* относится номенклатура запасов, составляющих 80 %, к категории *B* – 15 %, а к категории *C* – оставшиеся 5 % запасов.

Для небольшого списка запасов из 16 позиций, представленных в табл. 6.3, расчеты приводятся в табл. 6.4.

Таблица 6.3

№ позиции	1	2	3	4	5	6	7	8
Стоимость запасов, руб.	30	160	290	380	10780	12360	40	20
№ позиции	9	10	11	12	13	14	15	16
Стоимость запасов, руб.	8960	3230	370	2110	14200	6620	30	2190

Таблица 6.4

№ позиции	Средний запас, руб.	Доля, %	Доля с нарастающим итогом, %	Категория
1	2	3	4	5
13	14200	22,989	22,989	Категория *A*
6	12360	20,010	42,998	
5	10780	17,452	60,450	
9	8960	14,505	74,955	
14	6620	10,717	85,673	Категория *B*
10	3230	5,229	90,902	
16	2190	3,545	94,447	
12	2110	3,416	97,863	
4	380	0,615	98,478	Категория *C*
11	370	0,599	99,077	
3	290	0,469	99,547	
2	160	0,259	99,806	
7	40	0,065	99,870	
15	30	0,049	99,919	
1	30	0,049	99,968	
8	20	0,032	100,000	
Итого	61770	100,000		

Порядок расчетов: вычисление графы 3, сортировка строк в порядке убывания значений графы 3, вычисление графы 4, выделение категорий запасов в соответствии с выбранными пропорциями.

Как видно из табл. 6.4, в первую группу *A* попадают 4 позиции запасов 13, 6, 5, 9 и частично 14 (при большой номенклатуре такие частичные включения в группу практически отсутствуют). В группу *B* попадают позиции 14, 10, 16 и 12. Остальные 8 наименований (позиций) относятся к группе *C*.

Таким образом, наибольшее внимание в управлении запасами требуют запасы, относящиеся к категории *A*. Диаграмма роста стоимости запасов для представленного примера приводится на рис. 6.1.

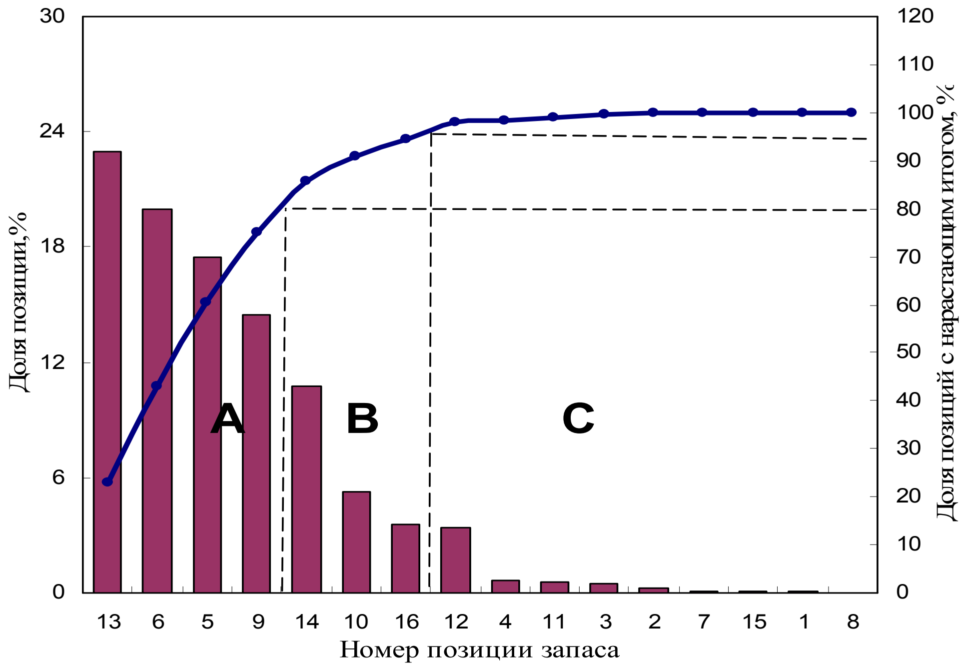


Рис. 6.1

Методические указания по выполнению задания 2

Метод *XYZ* основан на анализе частоты использования запасов разных позиций учета. Структурирование запасов на основе анализа частоты их использования и колебаний позволяет менеджменту концентрировать внимание (вести особый учет) важных для деятельности предприятия запасов. Для *XYZ*-анализа используются коэффициенты вариации, вычисляемые по формуле

$$V_i = \frac{\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_i)^2}{n}}}{\bar{x}_i},$$

где x_i – значение спроса за расчетный период позиции, руб.;

$\bar{x}_i$ – вычисленное по статистическим данным среднее значение спроса по той же позиции за расчетный период, руб.;

n – число расчетных периодов (статистических данных).

Так же как и в методе *ABC*, доли категорий запасов могут быть разными (в зависимости от методологии реализации). Например, распределение позиций запасов в зависимости от коэффициента вариации может быть следующим:

X – коэффициент вариации до 10 %,

Y – коэффициент вариации от 10 % до 25 %,

Z – коэффициент вариации свыше 25 %.

В общем виде метод *XYZ* требует выполнения следующих операций:

1) расчет коэффициентов вариации запаса каждой позиции в общих запасах предприятия;

2) упорядочение запасов в порядке возрастания коэффициента вариации;

3) группировка позиций в соответствии со значениями коэффициентов вариации.

В целом расчеты аналогичны расчетам метода *ABC*.

Методические указания по выполнению задания 3

Совмещение двух методов анализа (*XYZ* и *ABC*) позволяет построить матрицу распределяющие запасы на девять категорий (рис. 6.2).

В зависимости от категории управление запасами может строиться по специальному виду.

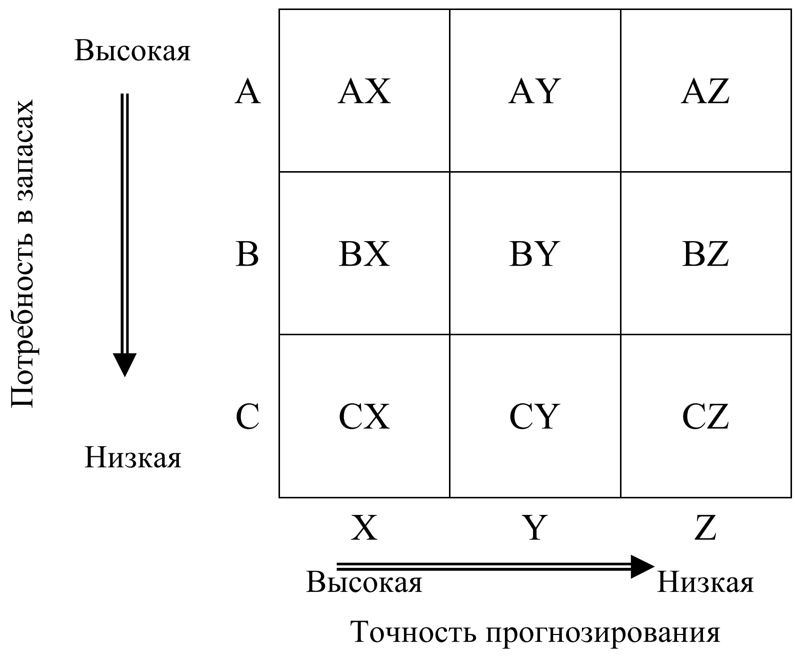


Рис. 6.2

Контрольные вопросы

1 Приведите определения запасов, их назначения и типологию.

2 С чем связана неравномерность использования запасов?

3 Какие издержки связаны с дефицитом запасов?

4 С чем связано многообразие моделей управления запасами?

5 В чем особенности постановки и решения многопродуктовой статической модели управления запасами?

6 Зачем нужна классификация *ABC*?

7 Что предприятию дает применение *ABC*- и *XYZ*-анализа?

7 СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО)

Задание

1 Построить гистограмму распределения и выдвинуть гипотезу о законе распределения по данным из табл. 7.1.

2 Выдвинуть гипотезу о законе распределения. Вычислить эмпирические показатели распределения случайной величины.

3 Определить теоретический закон распределения случайной величины. Проверить гипотезу.

4 Смоделировать имитационный (статистический) эксперимент на базе 100 случайно сгенерированных данных.

5 Рассчитать для вашего варианта по статистике нижеприведенные показатели.

Вариант 0. Определить среднее число резервного количества оборудования, если при нехватке оборудования предприятие в отчетном периоде теряет $Z = 1200 + 500*K$ тыс. руб/ед., а доходы от работы единицы составляют $D = 400 + 700*K$ тыс. руб/ед., где K – число работающего оборудования. Определить средние потери предприятия от отказов оборудования при выбранной стратегии резервирования.

Вариант 1. Определить потери предприятия в отчетном периоде, если предприятие теряет

$$R = \begin{cases} 2500, k \le 12, \\ 3000, k > 12, \end{cases}$$

где R – потери предприятия от отказов и нехватки транспортных средств, тыс. руб,

k – число требующих ремонта транспортных средств, ед.,

Вариант 2. Определить вероятность того, что величина неликвидных запасов за отчетный период превысит 125 тыс. руб.

Вариант 3. Определить вероятность того, что число заказов в отчетном периоде будет: а) меньше чем 35 ед.; б) больше чем 70 ед.

Вариант 4. Определить потери предприятия, если за отчетный период осуществляется 12 поставок и предприятие платит штрафы за срыв заказов при превышении времени поставки свыше чем на 170 ч.

Вариант 5. Определить потери транспортного предприятия, если предприятие платит штраф за срыв сроков доставки, которые не должны превышать 35 ч. За отчетный период транспортное предприятие обеспечивает 8 поставок, а за несвоевременную доставку платит штраф 120 тыс. руб.

Вариант 6. Определить целесообразность внедрения мероприятий по сокращению времени обработки заказов на складе на 2 ч, продолжительность которых превышает 17 ч, если затраты на мероприятие составляют 35 тыс. руб, затраты на обработку заказа составляют 0,12 тыс. руб, а среднее число отработанных заказов в отчетном периоде составляет 100 000 ед.

Таблица 7.1

Вариант, последняя цифра в списке группы									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Количество вышедшего из строя оборудования за отчетный период, ед.	Число требующих ремонта транспортных средств, ед.	Величина остатка неликвидного запаса за отчетный период, тыс. руб.	Число заказов в отчетном периоде, зак.	Средняя длительность поставки, ч	Время доставки заказа, ч	Время обработки заказа на складе, ч	Число транспортных средств, ожидающих обработки, ед.	Продолжительность работы оборудования, ч	Потери товара при переработке, тыс. руб/сут.
10	13	93	47	110	33	17	7	1229	50
6	11	153	37	165	29	19	6	1198	47
13	12	100	43	180	34	14	14	1197	55
11	11	47	49	130	34	14	11	1135	51
8	12	101	59	130	38	18	8	1195	55
8	10	148	49	165	27	18	8	1225	48
12	12	96	45	170	37	15	13	1195	54
10	11	76	50	130	35	16	11	1150	47
7	12	104	55	117	38	18	7	1169	56
7	9	147	46	164	27	17	7	1240	48
11	16	111	32	148	36	14	14	1253	49
10	13	63	41	113	33	19	11	1123	46
6	12	101	55	134	35	17	7	1204	56
7	11	143	48	150	28	21	7	1275	53
12	15	94	30	150	36	11	13	1226	55
13	12	76	37	101	32	21	12	1148	51
3	11	102	63	124	38	17	8	1200	60
9	9	159	47	162	24	18	8	1246	55
10	13	92	33	155	32	16	13	1291	55
12	9	81	42	93	29	21	12	1155	50
4	8	81	59	139	33	11	8	1229	54
9	8	146	44	149	25	18	8	1257	54
11	15	97	30	137	29	12	12	1261	55
15	9	65	34	110	28	23	13	1104	50
4	8	94	64	131	35	16	8	1256	56
12	8	141	42	155	26	16	8	1192	52
10	13	79	27	166	31	9	10	1243	51
12	8	86	39	109	26	20	14	1103	50
4	9	103	56	135	34	12	7	1250	55
10	9	153	41	152	25	17	7	1192	50
11	12	83	25	165	28	10	9	1222	52
13	11	59	43	101	30	17	14	1118	47
2	8	99	60	147	32	14	7	1273	60
12	7	141	46	159	26	15	7	1214	48
13	10	90	38	162	30	12	8	1198	55
13	11	91	48	108	28	16	12	1109	45
4	10	100	62	140	34	14	9	1232	58
10	8	127	44	160	24	15	8	1211	42
11	11	100	39	143	30	12	9	1241	47
10	14	72	43	118	32	15	11	1130	44

Вариант 7. Какие затраты имеет предприятие в отчетном периоде на содержание транспортных средств в ожидании, если предприятие располагает 8 местами ожидания транспортных средств. При нехватке мест транспортные средства ожидают обработки на платной стоянке, за которую предприятие платит 5 тыс. руб/сут. Отчетный период – 30 дней.

Вариант 8. Сколько единиц оборудования из 10 ед. простаивают в отчетном периоде, если в отчетном периоде 20 рабочих дней, а продолжительность рабочей смены составляет 8 часов. Определить потери предприятия, если расходы на содержание единицы незагруженного оборудования составляют 27 тыс. руб/мес.

Вариант 9. Определить вероятность того, что потери товара при переработке в отчетном периоде будет: а) меньше чем 42 тыс. руб/сут. б) будет больше чем 68 тыс. руб/сут.

Методические указания по выполнению задания

Процесс исследования методом статистического имитационного моделирования (метод Монте-Карло) включает в себя следующие этапы:

Определение стохастической природы объекта исследования, т.е.

– определение теоретических законов распределения случайных величин, статистическое исследование случайных процессов;

– подтверждение гипотез о теоретических законах распределения случайных величин.

Имитация движения входных переменных с помощью многократного генерирования случайных чисел, корректируемых с таким расчетом, чтобы иметь такое же распределение вероятностей, как и основная переменная. Это подразумевает преобразование случайных чисел с равномерным распределением, сгенерированных компьютером, в случайные переменные с таким же распределением, что и переменные, предназначенные для моделирования. Скорректированные случайные переменные являются входными переменными.

Осуществление моделирования – объединение входных переменных вместе в соответствии с логикой системы, описывающей, каким образом связаны входные переменные и как получаются выходные. С помощью многократного генерирования случайных чисел мы получаем будущее значение искомой переменной.

Многократное повторение этого процесса позволяет найти среднюю полученных значений. Эта средняя – будущее (ожидаемое) значение моделируемой переменной.

Применение техники контроля разбросанности – определение на основе полученной имитацией статистики о поведении процесса стохастической природы объекта исследования.

Рассмотрим пример выполнения задания.

1 Пусть дана статистическая выборка (число заявок на грузовые перевозки в отчетном периоде, ваг.).

28	35	41	43	46	49	52	54	28	35
31	37	41	43	47	49	52	55	31	37
32	37	41	44	47	50	53	55	32	37
34	38	41	44	48	50	53	58	34	38
34	40	42	45	48	51	54	58	34	40

Построим гистограмму распределения.

Разобьем интервал ($X_{мин}$, $X_{мах}$) на 10 частей ($X_{мин}$, $X_{мах}$) – (28, 58).

Определим число попаданий случайной величины в интервалы (графы 1 – 5 в табл. 7.2).

Таблица 7.2

i	Интервал		$X_{сер}$	$N_{i,эмп}$	$P_{i,\ эмп}$	$P_{i,\ теор}$	Отклонения $(P_{i,\ эмп} - P_{i,\ теор})^2 / P_{i,\ теор})$
1	2		3	4	5	6	7
1	28	31	29,5	2	0,0500	0,0210	0,0399
2	31	34	32,5	3	0,0750	0,0422	0,0255
3	34	37	35,5	2	0,0500	0,0729	0,0072
4	37	40	38,5	3	0,0750	0,1086	0,0104
5	40	43	41,5	6	0,1500	0,1392	0,0008
6	43	46	44,5	5	0,1250	0,1538	0,0054
7	46	49	47,5	5	0,1250	0,1463	0,0031
8	49	52	50,5	5	0,1250	0,1199	0,0002
9	52	55	53,5	6	0,1500	0,0847	0,0504
10	55	58	56,5	3	0,0750	0,0515	0,0107
				40			6,14917
Среднее значение					45		
Среднеквадратическое отклонение					7,7658		

Построим гистограмму эмпирических частот по графе 4 табл. 7.2 (рис. 7.1).

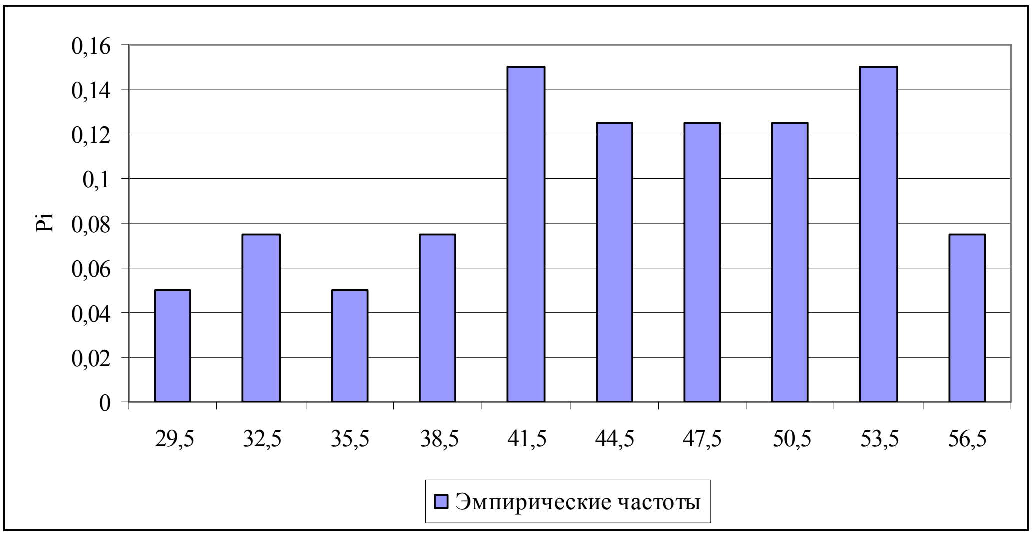


Рис. 7.1

2 По виду гистограммы выдвинем гипотезу о законе распределения. Соединяя вершины столбиков, мы предполагаем, что эта случайная величина имеет нормальный закон распределения.

Вычислим математическое ожидание (выборочное среднее) случайной величины. Используем функцию СРЗНАЧ (C5:C44) для данных выборки (C5:C44 – диапазон выборки), результат поместим в последние строки таблицы, и среднеквадратическое отклонение на основе функции =ДИСП (C5:C44)^0,5.

3 Вычислим теоретические частоты, используя встроенную функцию генерации нормально распределенных случайных величин НОРМРАСП (H12;$J$22;$K$22;ЛОЖЬ), H12 – значение графы 3, $J$22 – среднее значение, $K$22 – среднеквадратическое отклонение. Для сопоставимости значений граф 5 и 6, полученные вероятности умножаем на $\Delta = (X_{мах} - X_{мин})/10$.

Теоретические частоты приведены в графе 6 табл. 7.2 и на рис. 7.2.

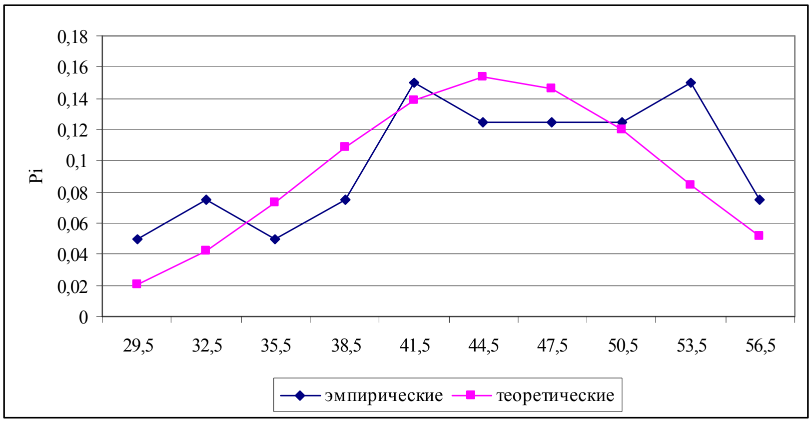


Рис. 7.2

Вычислим χ^2 – критерий для проверки соответствия эмпирического распределения теоретической. В графе 7 табл. 7.2 приведены результаты расчетов.

Выберем уровень значимости критерия 0,5 и сравним полученное отклонение с табличным (см. приложение) для числа степеней свободы 10–2 = 8. Полученное значение 6,14 меньше критического (из таблицы 7,34), поэтому мы можем принять гипотезу о нормальном законе распределения.

4 Сгенерируем нормально распределенные случайные числа со средним и среднеквадратическим отклонениями, полученными в расчетах.

Для этого воспользуемся встроенной функцией генерации равномерно распределенных чисел в интервале (0,1) – СЛЧИС(), преобразуем их в случайные числа с нормальным распределением по формуле

СЛЧИС()+СЛЧИС()+СЛЧИС()+СЛЧИС()+СЛЧИС()+СЛЧИС()+
+СЛЧИС()+СЛЧИС()+СЛЧИС()+СЛЧИС()+СЛЧИС()+СЛЧИС()-6

Обозначим полученное число через *R*.

Далее полученное случайное число умножаем на среднеквадратическое отклонение и складываем со средним, т.е. если M – среднее значение, S – среднеквадратическое отклонение, то $M + S \cdot R$ – случайная величина с нормальным распределением.

Сгенерируем 100 случайных чисел, представленных в нижеследующей таблице:

45	44	40	45	45	42	39	51	35	39
41	36	51	45	38	36	59	46	43	50
50	45	34	52	50	46	44	54	53	61
43	42	51	67	49	46	46	51	48	40
40	48	48	46	34	48	42	48	44	54
59	42	44	49	45	34	36	40	33	56
46	36	48	45	44	46	42	49	42	51
49	51	66	49	44	29	63	54	43	41
41	41	58	46	30	39	48	50	31	57
54	54	48	32	45	53	56	41	46	37

5 Пусть требуется определить вероятность превышения числа заявок наличного парка вагонов оператора, если число вагонов равно 55 единиц.

Упорядочим статистику и определим вероятность того что, число заявок будет выше числа вагонов:

29	36	40	42	44	46	48	49	51	56
30	36	40	42	44	46	48	49	51	56
31	36	41	42	45	46	48	50	52	57
32	37	41	43	45	46	48	50	53	58
33	38	41	43	45	46	48	50	53	59
34	39	41	43	45	46	48	50	54	59
34	39	41	44	45	46	48	51	54	61
34	39	42	44	45	46	49	51	54	63
35	40	42	44	45	46	49	51	54	66
36	40	42	44	45	48	49	51	54	67

$$P = \frac{M}{N} = \frac{10}{100} = 0{,}1.$$

Таким образом, каждая 10-я заявка не будет исполнена из-за отсутствия вагонов.

6 Определить целесообразность привлечения дополнительно 3 вагонов других компаний, если они обеспечивают дополнительный доход в сумме 2 тыс. руб., а в случае их простоя (неиспользования) компания теряет 5 тыс. руб.

Вычислим P_{i} вероятность того, что компании потребуется дополнительно i вагонов:

$$P_1 = 2/100 = 0{,}02,$$
$$P_2 = 1/100 = 0{,}01,$$
$$P_3 = 1/100 = 0{,}01,$$
$$P_{>3} = 6/100 = 0{,}06.$$

Тогда средний ожидаемый доход от привлечения 3 вагонов составит:

$$Z = P_1(1\times2 – 2\times5) + P_2(2\times2 – 1\times5) + P_3(3\times2 – 0\times5) + P_{>3}\times6= 0{,}02\times$$

$$\times (–8) + 0{,}01\times (–1) + 0{,}01\times6 + 0{,}06\times6 = – 0{,}16 – 0{,}01 + 0{,}06 + 0{,}36 = 0{,}25.$$

Так как значение Z положительное, рекомендуется привлечь дополнительно 3 вагона для обеспечения перевозок.

Приложение. Дополнительные сведения из математической статистики

χ^2 – критерий для проверки соответствия эмпирического закона теоретической.

Для проверки критерия вводится статистика:

$$\chi^2 = N \times \sum \frac{(P_i^{emp} - P_i^{theor})^2}{P_i^{theor}},$$

где $P_i^{theor} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ – вероятность попадания в i-й интервал,

$P_i^{emp} = \dfrac{n_i}{N}$ – соответствующее эмпирическое значение,

n_i – число элементов выборки из i-го интервала,

N – полный объём выборки.

Правило. Если полученная статистика превосходит квантиль закона распределения χ^2 заданного уровня значимости α с $(k – 1)$ или с $(k – p – 1)$ степенями свободы, где k – число наблюдений или число интервалов (для случая интервального вариационного ряда), а p – число оцениваемых параметров закона распределения, то гипотеза H_0 отвергается. В противном случае гипотеза принимается на заданном уровне значимости α (табл. 7.3).

Таблица 7.3

№ п/п	Уровень значимости α						
	0,01	0,05	0,10	0,50	0,90	0,95	0,99
1	0,000157	0,00393	0,0158	0,455	2,71	3,84	6,64
2	0,0201	0,103	0,211	1,39	4,61	5,99	9,21
3	0,115	0,352	0,584	2,37	6,25	7,81	11,3
4	0,297	0,711	1,06	3,36	7,78	9,49	13,3
5	0,554	1,15	1,61	4,35	9,24	11,1	15,1
6	0,872	1,64	2,20	5,35	10,6	12,6	16,8
7	1,24	2,17	2,83	6,35	12,0	14,1	18,5
8	1,65	2,73	3,49	7,34	13,4	15,5	20,1
9	2,09	3,33	4,17	8,34	14,7	16,9	21,7
10	2,56	3,94	4,87	9,34	16,0	18,3	23,2
11	3,05	4,57	5,58	10,3	17,3	19,7	24,7
12	3,57	5,23	6,30	11,3	18,5	21,0	26,2
13	4,11	5,89	7,04	12,3	19,8	22,4	27,7
14	4,66	6,57	7,79	13,3	21,1	23,7	29,1
15	5,23	7,26	8,55	14,3	22,3	25,0	30,6
16	5,81	7,96	9,31	15,3	23,5	26,3	32,0
17	6,41	8,67	10,1	16,3	24,8	27,6	33,4
18	7,01	9,39	10,9	17,3	26,0	28,9	34,8
19	7,63	10,1	11,7	18,3	27,2	30,1	36,2
20	8,26	10,9	12,4	19,3	28,4	31,4	37,6
21	8,90	11,6	13,2	20,3	29,6	32,7	38,9
22	9,54	12,3	14,0	21,3	30,8	33,9	40,3
23	10,2	13,1	14,8	22,3	32,0	35,2	41,6
24	10,9	13,8	15,7	23,3	33,2	36,4	43,0
25	11,5	14,6	16,5	24,3	34,4	37,7	44,3

Контрольные вопросы

1 Перечислите основные этапы статистического моделирования.

2 Какие числовые характеристики случайной величины определяются для выборки?

3 Чем отличаются теоретический и эмпирические законы распределения случайной величины?

4 В каких случаях применяется статистическое моделирование (метод Монте-Карло)?

8 СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Задание 1. Задана одноканальная система массового обслуживания (СМО) с одним местом в очереди.

Вероятность поступления заявки за 5 мин равна $0{,}4+0{,}01\cdot k$, а вероятность обслуживания заявки за 5 мин – $0{,}6-0{,}01\cdot k$.

В начальный момент в системе

отсутствовали заявки для $k\le 10$,

одна заявка – для $10<k\le 20$,

две заявки – для $k>20$, где k – номер варианта (номер в списке группы).

Необходимо:

а) определить множество состояний СМО и граф состояний СМО;

б) вычислить матрицу переходных состояний;

в) найти вектор вероятностей состояний по истечении одного 1 ч и 2 ч;

г) найти стационарный режим работы СМО (вектор вероятностей состояния стационарного режима);

д) сравнить результаты, полученные в п. *в* и *г*. Сделать выводы.

Задание 2. На сортировочную станцию в среднем за сутки прибывает N составов. Среднее время обслуживания (сортировки) состава составляет t мин. В парке прибытия имеется m путей для ожидания сортировки прибывающих составов, а в случае занятости этих путей составы ожидают обслуживания на внешних путях.

Составить граф состояний СМО, дифференциальные уравнения Колмогорова – Чепмена, определить суммарный суточный штраф, который придется платить станции за ожидание составов на внешних путях станции, если за 1 ч простоя одного состава взимается штраф a руб.

Для расчетов принять $N = 45 + k$, $m = 3$, $t=\dfrac{50-k}{2}$, $a=500+50k$ руб., где k – номер варианта.

Задание 3. Ремонтное предприятие имеет N линий ремонта и M мест ожидания. Поток заявок для ремонта простейший с интенсивностью L ед. в час. Среднее время ремонта заявки составляет T ч. Предприятие платит штраф за ожидание заявки в очереди Z_2 руб. в час, штраф за отказ в обслуживании Z_3 руб., и имеет расходы с содержанием свободных каналов обслуживания Z_1 руб. в час. Исходные данные к заданию определяются по номеру варианта из табл. 8.1, 8.2.

Необходимо:

а) изобразить граф состояний СМО;

б) определить характеристики СМО;

в) определить, сколько линий ремонта должно иметь ремонтное предприятие, чтобы вероятность отказа не превышала G при неизменном числе мест ожидания в очереди;

г) определить рациональное число каналов обслуживания и мест ожидания в очереди, при которых суммарные затраты на штрафы были бы наименьшими.

Таблица 8.1

Параметр	Первая цифра номера варианта			
	0	1	2	3
N	5	4	3	6
M	3	4	5	5
G	0,005	0,007	0,004	0,006

Таблица 8.2

Пара-метр	Последняя цифра номера варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L	3	4	5	6	2	3	4	5	2	4
T	0,15	0,12	0,15	0,16	0,21	0,22	0,20	0,23	0,11	0,18
Z_1	35	30	38	42	33	40	44	45	32	37
Z_2	58	55	60	61	59	57	62	64	62	58
Z_3	62	60	65	70	71	68	66	72	73	68

Методические указания по выполнению заданий

Основные элементы системы массового обслуживания

Системой массового обслуживания (СМО) называется любая система, предназначенная для обслуживания каких-либо заявок, поступающих в неё в случайные моменты времени (например, телефонная станция, сортировочная станция, билетные кассы, ремонтная мастерская и т.д.).

СМО делятся на системы с отказами и системы с ожиданием (очередью).

В СМО имеются следующие основные элементы:

а) *входной поток* (поток поступающих требований или заявок на обслуживание); необходимо считать входной поток случайным, основными характеристиками его являются характеристики источника требований, тип требований и длина интервалов времени между поступлениями требований;

б) *механизмы обслуживания СМО* (различаются по числу каналов обслуживания, продолжительности и типу обслуживания).

Характеристики для данного случая обслуживания описываются случайными величинами;

в) *дисциплина очереди* (правила, по которым обслуживающий механизм принимает поступившую заявку на обслуживание: «первым пришёл – первым обслуживается», «последним пришёл – первым обслуживается», случайный отбор заявок на обслуживание или обслуживание с приоритетом).

В зависимости от этих характеристик СМО можно разбить на два больших класса:

1) СМО с дискретным состоянием и дискретным временем;

2) СМО с дискретным состоянием и непрерывным временем.

Показатели эффективности работы СМО

Задача анализа поведения СМО состоит в нахождении показателей эффективности работы системы, которые можно описать следующим образом:

A – среднее число заявок, обслуживаемое СМО в единицу времени, т.е. абсолютная пропускная способность СМО;

Q – вероятность обслуживания поступившей заявки, т.е. относительная пропускная способность СМО;

$P_{\text{отк}}$ – вероятность отказа, вероятность того, что поступившая в систему заявка не будет обслужена, тогда $P_{\text{отк}} = 1 - Q$;

L – среднее число заявок в СМО (на обслуживании и в очереди);

$L_{\text{о}}$ – среднее число заявок в очереди, если она есть (т.е. средняя длина очереди);

$W_{\text{сист}}$ – среднее время пребывания заявки в системе (как на обслуживании, так и в очереди);

$W_{\text{оч}}$ – среднее время пребывания заявки в очереди;

K – среднее число занятых каналов обслуживания.

Выбор показателей эффективности зависит от типа СМО.

Анализ работы СМО с дискретными состояниями и дискретным временем

Задача. Пусть имеем одноканальную СМО, в которую заявки могут поступать в определенные моменты времени t_1, t_2,…t_k с вероятностью P_1. Если в момент поступления очередной заявки канал обслуживания занят, то заявка занимает место в очереди. Если в очереди на обслуживание уже имеется две заявки, то вновь поступившая заявка в очередь не становится (все места заняты), не обслуживается и покидает систему (получает отказ). Обслуживание заявки, поступившей на обслуживание, завершается в каждый указанный момент времени с вероятностью P_2. (В момент времени t_k в систему поступает не более одной заявки и не более чем одна заявка может покинуть систему).

Исследуем работу такого вида системы массового обслуживания.

Решение

Пусть возможные состояния рассматриваемой СМО следующие:

S_0 – в очереди на обслуживание нет ни одной заявки;

S_N – в очереди на обслуживание имеется N заявок, $N = 1,2$.

Данная СМО может быть исследована с помощью теории марковской цепи, изложенной в [2], так как процесс, происходящий в СМО, представляет собой марковский процесс с дискретными состояниями (S_0, S_1, S_2) и дискретным временем (t_1, t_2,…t_k,…). Находим матрицу переходных вероятностей системы из одного состояния системы S_i в другое S_j:

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}; \tag{8.1}$$

где $p_{00} = 1 - p_1;$ $\quad p_{10} = p_2 q_1;$ $\quad p_{20} = 0;$

$p_{01} = p_1;$ $\quad p_{11} = q_1 q_2 + p_1 p_2;$ $\quad p_{21} = q_1 p_2;$

$p_{02} = 0;$ $\quad p_{12} = q_2 p_1;$ $\quad p_{22} = q_1 q_2 + p_1 p_2 + p_1 q_2.$

Следует помнить: вероятностью перехода или переходной вероятностью p_{ij} называют условную вероятность того, что из состояния i в итоге следующего испытания система перейдёт в состояние j. Таким образом, в обозначении p_{ij} первый индекс указывает номер предшествующего, а второй – номер последующего состояния. В каждую строку матрицы помещены вероятности событий, которые образуют полную группу, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$\sum_{j=1}^{k} P_{ij} = 1, \quad (i = 1,2,\ldots,\ k).$$

Пусть имеем граф состояний системы (рис. 8.1).

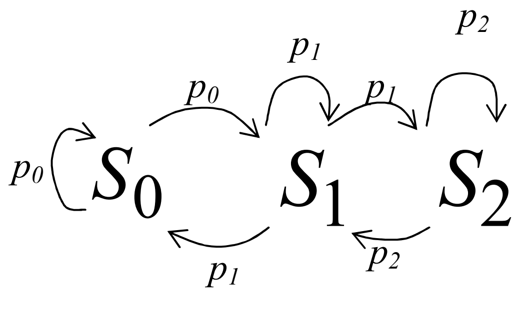


Рис. 8.1

$P_1 = 0{,}7$; $P_2 = 0{,}6$, тогда $q_1 = 0{,}3$, $q_2 = 0{,}4$, и, использовав предыдущие формулы (8.1), получим матрицу переходных вероятностей в данной СМО:

$$P=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3 & 0\\ 0{,}42 & 0{,}46 & 0{,}12\\ 0 & 0{,}42 & 0{,}58\end{pmatrix}.$$

Можно найти вероятности состояний очереди после n шагов по формуле

$$\overline{p}^{(n)}=\overline{p}^{(0)}P^{n} \text{ или } \overline{p}^{(n)}=\overline{p}^{(n-1)}P,$$

где $\overline{p}^{(0)}$ – вектор вероятностей состояний в начальный момент времени, для которого выполняется $\overline{p}^{(0)}=\left(p_1^{(0)},p_2^{(0)},\dots,p_n^{(0)}\right), \sum\limits_{i=1}^{n}p_i^{(0)}=1.$

Пусть в исследуемой СМО в начальный момент времени присутствовала одна заявка на обслуживании:

$$\overline{p}^{(0)}=(0;1;0),$$

тогда

$$\overline{p}^{(1)}=\overline{p}^{(0)}\cdot P=(0;\quad 1;\quad 0)\cdot\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3 & 0\\ 0{,}42 & 0{,}46 & 0{,}12\\ 0 & 0{,}42 & 0{,}58\end{pmatrix}=(0{,}42;\quad 0{,}46;\quad 0{,}12),$$

$$\overline{p}^{(2)}=\overline{p}^{(1)}\cdot P=(0{,}42;\quad 0{,}46;\quad 0{,}12)\cdot\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3 & 0\\ 0{,}42 & 0{,}46 & 0{,}12\\ 0 & 0{,}42 & 0{,}58\end{pmatrix}=(0{,}487;\quad 0{,}388;\quad 0{,}125).$$

По истечении определенного времени вектор вероятностей состояний не зависит от $\overline{p}^{(0)}$ и не изменяется. Такой режим СМО называется стационарным (установившимся, предельным) режимом. Для марковской цепи существует стационарный режим, если она не имеет поглощающих состояний, т.е. вероятность перехода из любого состояния в любое другое по истечении определенного времени не равно нулю.

Стационарный режим можно определить, вычисляя $\overline{p}^{(n)}$, при этом для достаточно большого n должно выполняться $\overline{p}^{(n)}\approx\overline{p}^{(n+1)}$.

Другой способ нахождения стационарного режима состоит в определении такого вектора вероятности $\overline{b}=(b_1,\quad b_2,\quad \dots,\quad b_n)$, для которого выполняется условие

$$\begin{cases}\overline{b}=\overline{b}\cdot P;\\ \sum\limits_{i=1}^{n}b_i=1.\end{cases}$$

Для рассматриваемого примера составим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} b_1 = 0{,}7b_1 + 0{,}42b_2\,; \\ b_2 = 0{,}3b_1 + 0{,}46b_2 + 0{,}42b_3; \\ b_3 = 0{,}12b_2 + 0{,}58b_3; \\ 1 = b_1 + b_2 + b_3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0{,}3b_1 + 0{,}42b_2\ 0; \\ 0{,}3b_1 - 0{,}54b_2 + 0{,}42b_3 = 0; \\ b_1 + b_2 + b_3 = 1. \end{cases}$$

Решение системы: $\overline{b} = (0{,}5213;\ 0{,}37;\ 0{,}1064)$.

Заметим, что $\overline{p}^{(0)} = (0{,}515;\ 0{,}374;\ 0{,}111)$, а $\overline{p}^{(10)} = (0{,}5207;\ 0{,}3724;$ $0{,}1068)$. Таким образом, можно считать, что в момент времени t = 10 система работает в стационарном режиме, т.е. вероятности состояний системы не зависят от вектора вероятностей состояний в начале работы.

Процесс гибели и размножения

Процессом гибели и размножения называется такой процесс, граф состояний которого приведён на рис. 8.2.

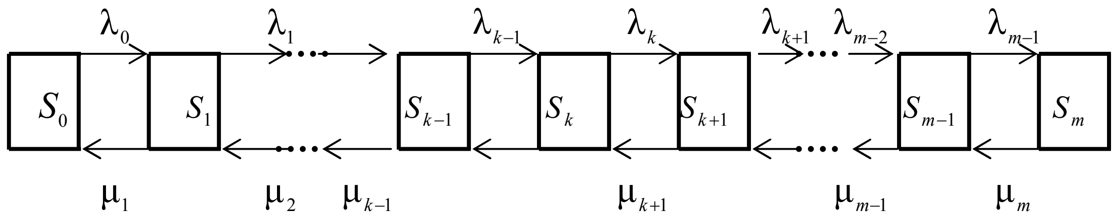


Рис. 8.2

Под воздействием пуассоновских потоков возможен переход из любого состояния S_k в соседние S_{k-1} или $S_{k+1}, \ldots$ Из состояния S_0 возможен переход только в S_1, а из состояния S_m – только в S_{m-1}.

Используя уравнения Колмогорова – Чепмена для каждого состояния системы, введя соответствующие вероятности состояний $P_0(t), P_1(t), \ldots, P_m(t)$, получим:

$$\frac{dP_0}{dt} = P_1\mu_1 - P_0\lambda_0;$$

$$\frac{dP_1}{dt} = P_0\lambda_0 + P_2\mu_2 - P_1(\lambda_1 + \mu_1);$$

$$\frac{dP_k}{dt} = P_{k-1}\lambda_{k-1} + P_{k+1}\mu_{k+1} - P_k(\lambda_k + \mu_k)$$

$$\frac{dP_m}{dt} = P_{m-1}\lambda_{m-1} - P_m\mu_m.$$

Рассмотрим установившийся (стационарный) режим развития процесса в системе $\left(P_0, P_1, \ldots, P_m = \text{const}\right)$, присоединяя к ней $\sum_{i=1}^{m} P_i = 1$, получаем систему

$$\begin{cases} P_1\mu_1 - P_0\lambda_0 = 0; \\ P_0\lambda_0 + P_2\mu_2 - P_1(\lambda_1 + \mu_1) = 0; \\ P_{k-1}\lambda_{k-1} + P_{k+1}\mu_{k+1} + P_k(\lambda_k + \mu_k) = 0; k = 2,3,\ldots,m-1;; \\ P_{m-1}\lambda_{m-1} - P_m\mu_m = 0; \\ P_0 + P_1 + P_2 + + P_m = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_1}P_0; P_2 = \dfrac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}P_0;\ P_3 = \dfrac{\lambda_0\lambda_1\lambda_3}{\mu_1\mu_2\mu_3}P_0; \\ P_k = \dfrac{\lambda_0\lambda_1\lambda_3\cdot\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\mu_3\cdot\mu_k}P_0; P_m = \dfrac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\cdot\lambda_{m-1}}{\mu_1\mu_2\mu_3\cdot\mu_m}P_0. \end{cases} \tag{8.2}$$

Подставляя выражения (8.2) в уравнение нормирования, находим значение P_0:

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} + \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3} + + \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\cdot\lambda_{\mathrm{m}-1}}{\mu_1\mu_2\mu_3\cdot\mu_{\mathrm{m}}}\right)^{-1}. \tag{8.3}$$

Подставляя найденное значение P_0 в предыдущие выражения для P_1, P_2, …, P_{m}, находим конечные значения вероятностей состояний системы при установившемся режиме развития процесса.

Данные формулы можно использовать при решении многих задач теории массового обслуживания.

Системы массового обслуживания с простейшим входящим потоком и показательным временем обслуживания

Будем рассматривать СМО, у которых входящий поток пуассоновский, а время обслуживания – показательное.

Многоканальная система обслуживания с отказами (*задача Эрланга*)

Пусть СМО содержит k каналов, входящий поток заявок имеет интенсивность λ, поток обслуживания заявки одним каналом имеет интенсивность μ. Пронумеруем состояния СМО по числу занятых каналов: A_0 – все каналы свободны; A_1 – один канал занят; …, $A_i - i$ каналов занято,

$(k-i)$ каналов свободны;…, A_k – все каналы заняты. Размеченный граф состояния имеет следующий вид (рис. 8.3).

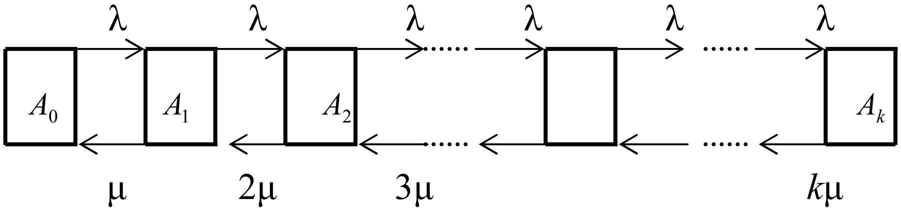


Рис. 8.3

Очевидно, что граф является графом процесса гибели и размножения, для которого

$$\lambda_i = \lambda, \quad \mu_i = i\mu. \tag{8.4}$$

Используя формулы (8.1), при обозначении через $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ и учитывая (8.4), можно получить предельное распределение вероятностей состояний:

$$\begin{cases} \rho_0 = \left[1 + \dfrac{\rho}{1!} + \dfrac{\rho^2}{2!} + + \dfrac{\rho^k}{k!}\right]^{-1}, \\ \rho_1 = \dfrac{\rho}{1!}\rho_0, \rho_2 = \dfrac{\rho^2}{2!}\rho_0, \rho_i = \dfrac{\rho^i}{i!}\rho_0, \rho_k = \dfrac{\rho^k}{k!}\rho_0 \end{cases} \tag{8.5}$$

С помощью формул (8.5) можно вычислить показатели эффективности СМО:

$$A = \lambda(1-\rho_k); Q = \frac{A}{\lambda} = 1 - \rho_k; P_{отк} = \rho_k; \bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho(1-\rho_k),$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ называется коэффициентом загрузки системы. Рассматривая подробно другие СМО с учетом теории, можно для них получить формулы, характеризующие работу СМО (табл. 8.3).

Контрольные вопросы

1 Каковы основные элементы систем массового обслуживания?

2 Перечислите типы и характеристики систем массового обслуживания.

3 Какие системы массового обслуживания формализуются процессами гибели и размножения?

4 В чем заключается суть оптимизации систем массового обслуживания?

Таблица 8.3

Показатели	Одноканальная СМО			Многоканальная СМО (*n* каналов)		
	с отказами	с очередью длиной *m*	без отказов	с отказами	с очередью длиной *m*	без отказов
Предельные распределения вероятностей состояний $\rho=\frac{\lambda}{\mu}, q=\frac{\rho}{\mathrm{n}}$	$P_0=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ $P_1=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$	$P_0=\frac{1-\rho}{1+\rho^{\mathrm{m}+2}}$ $P_i=\rho^i\cdot P_0$ $1\le i\le m+1$	$P_i=\rho^i(1-\rho)$ $i=0,1,2,\ldots$	$P_0=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}\right)^{-1}$ $P_i=\frac{\rho^i}{i!}\cdot P_0$	$P_0=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n}{n!}\cdot\frac{q-q^{m+1}}{1-q}\right)^{-1}$ $P_i=\frac{\rho^i}{n!}\cdot P_0,\quad для\quad 1\le i\le n,$ $P_{n+i}=q^i\frac{\rho^n}{n!}P_0,\quad для\quad 1\le i\le m$	$P_0=\left(\frac{\rho^n}{n!}\cdot\frac{q}{1-q}+\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}\right)^{-1}$ $P_i=\frac{\rho^i}{i!}\cdot P_0,\quad для\quad 1\le i\le n$ $P_{n+i}=\frac{\rho^n}{n!}q^iP_0,\quad для\quad 1\le i\ \infty$
А – абсолютная пропускная способность	$\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$	$\lambda\left(1-\rho^{m+1}P_0\right)$	λ	$\lambda\left(1-\frac{\rho^n}{n!}P_0\right)$	$\lambda\left(1-P_0\cdot\frac{\rho^n}{n!}\cdot q^m\right)$	λ
Q	$\frac{\mu}{\lambda+\mu}$	$1-\rho^{m+1}\cdot P_0$	1	$1-\frac{\rho^n}{n!}\cdot P_0$	$1-P_0\frac{\rho^n}{n!}\cdot q^m$	1
$P_{отк}$	$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$	$\rho^{\mathrm{m}+1}\cdot P_0$	0	$\frac{\rho^n}{n!}\cdot P_0$	$\frac{\rho^n}{n!}\cdot q^m\cdot P_0$	0
$L_{сист}$	$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$	$L_{оч}+\overline{K}$	$\frac{\rho}{1-\rho}$	$\rho\cdot\left(1-\frac{\rho^n}{n!}\cdot P_0\right)$	$\rho\left(1-P_0\cdot q^m\cdot\frac{\rho^n}{n!}\right)+P_0\frac{\rho^n}{n!}\cdot\frac{1-q^m-mq^m(1-q)}{(1-q)^2}q$	$\rho+\frac{P_0\cdot\rho^{n+1}}{n!\cdot n\cdot(1-q)^2}$
$L_{оч}$	0	$\frac{\rho^2\left(1-\rho^m(1+m-m\rho)\right)}{\left(\rho-\rho^{m+2}\right)(1-\rho)}$	$\frac{\rho^2}{1-\rho}$	0	$P_0\cdot\frac{\rho^n}{n!}\cdot\frac{1-q^m-mq^m(1-q)}{(1-q)^2}\cdot q$	$\frac{P_0\cdot\rho^{n+1}}{n!\cdot n\cdot(1-q)^2}$
$W_{сист}$	$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$	$\frac{L_{сист}}{\lambda}$	$\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$	$\frac{\rho}{\lambda}\left(1-\frac{\rho^n}{n!}\cdot P_0\right)$	$\frac{\rho}{\lambda}\left(1-P_0q^m\frac{\rho^n}{n!}\right)+\frac{P_0\rho^n}{\lambda n!}\cdot\frac{1-q^m-mq^m(1-q)}{(1-q)^2}$	$\frac{\rho}{\lambda}\left(1+\frac{P_0\cdot\rho^n}{n\cdot n!\cdot(1-q)^2}\right)$
$W_{оч}$	0	$\frac{L_{оч}}{\lambda}$	$\frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}$	0	$\frac{\rho^n\cdot P_0q}{\lambda\cdot n!}\cdot\frac{1-q^m-mq^m(1-q)}{(1-q)^2}$	$\frac{P_0\cdot\rho^{n+1}}{\lambda\cdot n!\cdot n\cdot(1-q)^2}$
$\overline{K}$	$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$	$1-P_0$	ρ	$\rho\left(1-\frac{\rho^n}{n!}\cdot P_0\right)$	$\rho\cdot\left(1-\frac{\rho^n}{n!}\cdot q^m\cdot P_0\right)$	$\rho\left(1-\frac{\rho^n}{n!}\cdot P_0\right)$

9 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

Задание 1. Найти решение игры в чистых стратегиях для игры, заданной платежной матрицей (*k* – номер варианта), рис. 9.1.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
А$_1$	42	–13 + к	$-k-10$	-35
А$_2$	$30-k$	1 + к	$10-k$	31
А$_3$	-27	-28	$13-2k$	$25-k$

Рис. 9.1

Задание 2. Найти решение игры в смешанных стратегиях для игры, заданной платежной матрицей (*k* – номер варианта), рис. 9.2.

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	42	$-13+k$
A_2	$-5-k$	$1+k$

Рис. 9.2

Задание 3. Для игры $2\times n$, заданной платежной матрицей (рис. 9.3), найти решение.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	42	$-13+k$	$10-k$	-35	32
A_2	$30-k$	$1+k$	$-10-k$	31	$28-2k$

Рис. 9.3

Задание 4. Для игры $m\times 2$, заданной платежной матрицей (рис. 9.4), найти решение.

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	$32-k$	$-12-k$
A_2	$10-k$	$1+k$
A_3	-27	$15+k$
A_4	$22-k$	$15-k$
A_5	12	-10
A_6	$2k$	$10-2k$

Рис. 9.4

Задание 5. Для игры *m×n,* заданной платежной матрицей (рис. 9.5), найти решение.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	32	-12- к	12	15+ к
A_2	30 – *k*	1+к	-30-k	25
A_3	– 27	15+k	-27	-5+2k
A_4	22 – k	-15-к	20-k	35-2к
A_5	12	-10	-25+k	K+10
A_6	2k	10-2k	2k-20	10+2k

Рис. 9.5

Методические указания по выполнению заданий

В практической деятельности приходится сталкиваться с задачами, в которых необходимо принимать решение в условиях конфликта интересов, когда две или более стороны преследуют различные цели, а результаты любого действия каждой из сторон зависят от мероприятий партнера. В экономике конфликтные ситуации встречаются часто и имеют многообразный характер, например, взаимоотношения между поставщиком и потребителем, покупателем и продавцом, банком и клиентом. В этих примерах конфликтная ситуация порождается стремлением получить выгоду в ущерб противной стороне. Ситуация называется *конфликтной*, если в ней участвуют стороны, интересы которых полностью или частично противоположны.

Теория определения рационального решения участников конфликта называется *теорией игр.*

Допустимые действия каждого из игроков в рамках принятия решения определяют *правила игры*.

Если в игре участвуют два игрока, то она называется *парной* (*или двух игроков*), и *множественной* (*n игроков*)*,* если число игроков больше двух. Далее будем рассматривать только парные игры. В такой игре участвуют два игрока – *A* и *B*, интересы которых противоположны. Под игрой (процессом игры) будет понимать ряд действий со стороны *A* и *B*.

Количественная оценка результатов игры называется *платежом.*

Парная игра называется *игрой с нулевой суммой*, или *антагонистической*, если сумма платежей равна нулю, т.е. выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. В этом случае для полного задания игры достаточно указать одну из величин. Если, например, a – выигрыш одного из игроков, b – выигрыш другого, то для игры с нулевой суммой $b = -a$, поэтому достаточно рассматривать, например, a.

Будем рассматривать парные игры с нулевой суммой.

Выбор и осуществление одного из действий, предусмотренных правилами, называется ходом игрока.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор его действия при каждом ходе в зависимости от сложившейся ситуации.

Обычно в процессе игры при каждом ходе игрок делает выбор в зависимости от конкретной ситуации. Однако в принципе возможно, что решения приняты игроком заранее (в ответ на любую сложившуюся ситуацию). Это означает, что игрок выбрал определенную стратегию, которая может быть задана в виде списка правил или программы.

Игра называется *конечной*, если у каждого игрока есть конечное число стратегий, и *бесконечной* – в противном случае.

Стратегия игрока называется *оптимальной*, если она обеспечивает игроку максимальный выигрыш (или, что то же самое, минимальный проигрыш) при условии, что второй игрок придерживается своей стратегии.

Если игра повторяется много раз, то игроков может интересовать не выигрыш и проигрыш в каждой конкретной партии, а *средний выигрыш* (*проигрыш*) во всех партиях.

Для того чтобы решить игру или найти решение игры, необходимо для каждого из игроков выбрать оптимальную стратегию.

Таким образом, *предмет теории игр* составляют методы отыскания оптимальных стратегий игроков.

Рассмотрим конечную игру с нулевой суммой.

Пусть игрок A располагает m личными стратегиями: A_1, A_2, …, A_m. Пусть у игрока B имеется n личных стратегий. Обозначим их B_1, B_2, …, B_n. В этом случае игра имеет размерность $m\times n$. В результате выбора игроками любой пары стратегий (A_i, B_j), $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ однозначно определяется исход игры, т.е. выигрыш a_{ij} игрока A (положительный или отрицательный) и проигрыш ($-a_{ij}$) игрока B.

Предположим, что значения a_{ij} известны для любой пары стратегий (A_i, B_j).

Матрица $A = (a_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, элементами которой являются выигрыши, соответствующие стратегиям A_i и B_j, называется *платежной матрицей* или *матрицей игры*.

Общий вид платежной матрицы приведен ниже (рис. 9.6)

A_i \ B_j	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Рис. 9.6

Строки матрицы *A* соответствуют стратегиям первого игрока, а столбцы – стратегиям второго.

Эти стратегии называются *чистыми*.

Обозначим α_i – наименьший выигрыш игрока *A* при выборе им стратегии A_i для всех возможных стратегий игрока *B* (наименьшее число в *i*-й строке платежной матрицы), т.е. $\alpha_i = \min\limits_{j=1,n} a_{ij}$.

Среди чисел α_i ($i = \overline{1,m}$) выберем наибольшее $\alpha = \min\limits_{j=1,m} a_i$. Назовем α – *нижней ценой игры* или *максимальным выигрышем* (*максимином*). Это *гарантированный выигрыш игрока A при любой стратегии игрока B.*

Итоговую формулу можно записать следующим образом:

$$\alpha_i = \max_{i=1,m} \min_{j=1,n} a_{ij}.$$

Стратегия, соответствующая максимину, называется *максиминной стратегией*.

Аналогичные рассуждения могут быть выполнены и в отношении игрока *B*.

Игрок *B* заинтересован в том, чтобы уменьшить выигрыш игрока *A*. Выбирая стратегию B_j, он учитывает, что игрок *A* будет стремиться к максимальному выигрышу.

Обозначим $\beta_j = \max\limits_{i=1,m} a_{ij}$ – наибольший проигрыш игрока *B* при выборе им стратегии B_j для всех возможных стратегий игрока *A* (наибольшее число в *j*-й строке платежной матрицы).

Среди чисел β_j ($j = \overline{1,n}$) выберем наименьшее $\beta = \min\limits_{j=1,n} \beta_j$ и назовем β *верхней ценой игры* или *минимаксом*. Это *минимальный гарантированный проигрыш игрока B*.

Таким образом

$$\beta = \min_{j=1,n} \max_{\mathrm{i=1,m}} a_{ij}.$$

Стратегия, соответствующая минимаксу, называется *минимаксной стратегией*.

Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее «осторожных» максиминной и минимаксной стратегий, называется *принципом минимакса*. Этот принцип следует из разумного предположения, что каждый игрок стремится достичь цели, противоположной цели противника.

Игрок выбирает свои действия, предполагая, что противник будет действовать неблагоприятным образом, т.е. будет стараться «навредить».

Если же верхняя и нижняя цены игры совпадают, то общее значение верхней и нижней цены $v = \alpha = \beta$ называется *чистой ценой игры*, или просто *ценой игры*. Максиминная и минимаксная стратегии, соответствующие цене игры, являются *оптимальными стратегиями*, а их совокупность – *оптимальным решением*, или просто *решением игры*.

В этом случае игрок A получает максимальный гарантированный (не зависящий от поведения игрока B) выигрыш $\boldsymbol{v}$, а игрок B добивается минимального гарантированного (не зависящего от поведения игрока A) проигрыша $\boldsymbol{v}$. Говорят, что решение игры обладает *устойчивостью*, т.е. если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого не может быть выгодным отклоняться от своей оптимальной стратегии.

Пара чистых стратегий A_i и B_j дает оптимальное решение игры тогда и только тогда, когда соответствующий ей элемент a_{ij} является одновременно наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке.

Такая ситуация, если она существует, называется *седловой точкой* (по аналогии с поверхностью седла, которая искривляется вверх в одном направлении и вниз – в другом).

Пример. Определите нижнюю и верхнюю цену игры, которая задана следующей платежной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Выясним, имеет ли игра седловую точку. Решение удобно проводить в таблице, которая включает в себя платежную матрицу игры, а также дополнительные строку и столбец, которые иллюстрируют процесс поиска оптимальных стратегий (рис. 9.7).

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	$\alpha_i = \min\limits_{j=1,n} a_{ij}$
A_1	0,5	0,6	0,8	0,5
A_2	0,9	**0,7**	0,8	0,7
A_3	0,7	0,6	0,6	0,6
$\beta_j = \max\limits_{i=1,m} a_{ij}$	0,9	0,7	0,8	$\alpha = \max\limits_{i=1,m} \min\limits_{j=1,n} a_{ij} = 0{,}7$ $\beta = \min\limits_{j=1,n} \max\limits_{i=1,m} b_{ij} = 0{,}7$

Рис. 9.7

Итак, для игры с седловой точкой нахождение решения состоит в выборе максиминной и минимаксной стратегий, которые и являются оптимальными.

Если игра не имеет седловой точки, то применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. В этом случае можно получить оптимальное решение, чередуя чистые стратегии.

Смешанной стратегией игрока A называется применение чистых стратегий A_1, A_2, …, A_m с вероятностями $u_1, u_2, ..., u_m$.

Обычно смешанную стратегию первого игрока обозначают как вектор $U = (u_1, u_2, ..., u_m)$, а стратегию второго игрока – как вектор $Z = (z_1, z_2, ..., z_m)$.

Очевидно, что:

$$u_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}\ ,$$
$$z_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}\ ,$$
$$\sum_{i=1}^{m} u_i = 1,\ \sum_{j=1}^{n} z_j = 1.$$

Чистые стратегии можно считать частным случаем смешанных и задавать вектором, в котором единица соответствует чистой стратегии.

Оптимальное решение игры (или просто – *решение игры*) – это пара оптимальных стратегий U^*, Z^*, в общем случае смешанных, обладающих следующим свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому не может быть выгодно отступать от своей. Выигрыш, соответствующий оптимальному решению, называется *ценой игры* $\boldsymbol{v}$. Цена игры удовлетворяет неравенству

$$\alpha \leq \text{v} \leq \beta.$$

Справедлива следующая основная теорема теории игр.

Теорема Неймана. *Каждая конечная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях.*

Пусть $U^* = (u_1, u_2, ..., u_m)$ и $Z^* = (z_1, z_2, ..., z_n)$ – пара оптимальных стратегий. Если чистая стратегия входит в оптимальную смешанную стратегию с вероятностью, отличной от нуля, то она называется *активной.*

Теорема об активных стратегиях. *Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры v, если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.*

Данная теорема имеет большое практическое значение, она дает конкретные модели для нахождения оптимальных стратегий при отсутствии седловой точки.

Рассмотрим игру размером 2×2.

Такая игра является простейшим случаем конечной игры. Если такая игра имеет седловую точку, то оптимальное решение – это пара чистых стратегий, соответствующих этой точке.

Для игры, в которой отсутствует седловая точка в соответствии с теоремой Неймана, оптимальное решение существует и определяется парой смешанных стратегий $U^* = (u_1, u_2)$ и $Z^* = (z_1, z_2)$.

Для того чтобы их найти, воспользуемся теоремой об активных стратегиях. Если игрок A придерживается своей оптимальной стратегии U^*, то его средний выигрыш будет равен цене игры v, какой бы активной стратегией ни пользовался игрок B. Для игры 2×2 любая чистая стратегия противника является активной, если отсутствует седловая точка.

Выигрыш игрока A (проигрыш игрока B) – случайная величина, математическое ожидание которой является ценой игры. Поэтому средний выигрыш игрока A (при использовании оптимальной стратегии) будет равен v и для первой, и для второй стратегии противника.

Пусть игра задана платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Средний выигрыш игрока A, если он использует оптимальную смешанную стратегию $U^* = (u_1, u_2)$, а игрок B – чистую стратегию B_1 (что соответствует первому столбцу платежной матрицы), равен цене игры v, т.е.:

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 = v.$$

Тот же средний выигрыш получает игрок A, если противник применяет стратегию B_2, т.е. $a_{12}u_1 + a_{22}u_2 = v$. Учитывая, что $u_1 + u_2 = 1$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 = v, \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 = v, \\ u_1 + u_2 = 1. \end{cases}$$

Решая систему, можно найти оптимальную стратегию U^* и цену игры v.

Аналогичная система уравнений может быть получена для определения оптимальной стратегии игрока B:

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 = v, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 = v, \\ z_1 + z_2 = 1. \end{cases}$$

Пример. Найдите решение игры, заданной платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение

Прежде всего проверим наличие седловой точки. Для этого найдем минимальные элементы в каждой из строк (2 и 4) и максимальные в каждом из столбцов (6 и 5). Таким образом, нижняя цена игры α = max (2, 4) = 4, верхняя цена игры β = min (6, 5) = 5. Поскольку $\alpha \neq \beta$, решение игры следует искать в смешанных стратегиях, при этом цена игры находится в следующих пределах: $4 \leq v \leq 5$.

Предположим, что для игрока *A* стратегия задается вектором $U = (u_1, u_2)$. Тогда на основании теоремы об активных стратегиях можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} 2u_1 + 6u_2 = v, \\ 5u_1 + 4u_2 = v, \\ u_1 + u_2 = 1. \end{cases}$$

Решая систему из трех уравнений с тремя неизвестными, получим: $u_1 = 2/5, u_2 = 3/5, v = 22/5.$

Теперь найдем оптимальную стратегию игрока *B*. Пусть стратегия данного игрока задается вектором $Z = (z_1, z_2)$. Тогда система уравнений, основанная на использовании теоремы об активных стратегиях, запишется следующим образом:

$$\begin{cases} 2z_1 + 6z_2 = 22/5, \\ 6z_1 + 4z_2 = 22/5, \\ z_1 + z_2 = 1. \end{cases}$$

Решая систему, состоящую из любых двух уравнений, взятых из последней системы, получим $z_1 = 1/5, z_2 = 4/5$.

Следовательно, решением игры из примера 5.3 являются смешанные стратегии: $U^* = (2/5, 3/5)$, $Z^* = (1/5, 4/5)$, цена игры $v = 22/5$.

Рассмотрим решение игр $2 \times n$ и $m \times 2$.

Решение игр $2 \times n$ и $m \times 2$ в смешанных стратегиях сводится к решению игр 2×2 исключением доминируемых стратегий и выявления активных стратегий игрока.

Стратегия игрока *Ai* доминируемая, если существует стратегия *k,* для которого $a_{ij} \leq a_{kj}$ для всех $j = \overline{1,n}$. Другими словами, стратегия *i* первого игрока доминируема стратегией *k*, выигрыш игрока *A* будет выше при его стратегии *k*, независимо от того, какую стратегию выберет игрок *B*, $j = \overline{1,n}$.

Стратегия игрока *B l* доминируемая, если существует стратегия *m,* для которого $b_{im} \leq b_{il}$ для всех $i = \overline{1,m}$. Другими словами, стратегия *l* второго игрока доминируема стратегией *k*, если величина проигрыша игрока *B* будет ниже, чем при его стратегии m, независимо от того, какую стратегию выберет игрок A, $i=\overline{1,m}$.

На первом этапе решения игр $2\times n$ и $m\times 2$ следует исключить из рассмотрения доминируемые стратегии игроков.

Далее определяем две активные стратегии игрока B (для игр $2\times n$) или игрока A (для игр $m\times 2$).

Рассмотрим игру размерностью $2\times n$.

Пусть игра задана платежной матрицей (рис. 9.8).

A_i \ B_j	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}

Рис. 9.8

Исключим из матрицы доминируемые стратегии игрока B. Пусть после исключения остается k стратегий, т.е. платежная матрица имеет вид (рис. 9.9).

A_i \ B_j	B_1	B_2	...	B_k
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2k}

Рис. 9.9

Пусть решение игры в чистых стратегиях не существует, т.е. цена игры удовлетворяет неравенству

$$\alpha \le v \le \beta .$$

По теореме Неймана существует решение игры в смешанных стратегиях. Существует вектор $Z = (z_1, z_2)$. Тогда из условия

$$a_{1m}z_1 + a_{2m}z_2 \le v, \text{ для всех } m=\overline{1,k}$$

$$z_1 + z_2 = 1,$$

$$z_1 \ge 0,\ z_2 \ge 0.$$

Изобразим графически на плоскости изменение цены игры в зависимости от одного из переменных, z_1 или z_2. Пусть эта переменная будет z_2. На рис. 9.10 приводится область изменений z_2 и v.

Поскольку v – выигрыш первого игрока, игрок будет стремится увеличить свой гарантированный выигрыш за счет изменения z_2. Эта точка C_2 – точка пересечения прямых соответствующие стратегиям «2» и «3» (рис. 9.10). Именно, эти стратегии являются основными для нахождения смешанной стратегии игрока B. Далее для матрицы с двумя столбцами «2» и «3» находим смешанную стратегию аналогично вышеприведенной схеме для игр 2×2 (см. вышеприведенный пример).

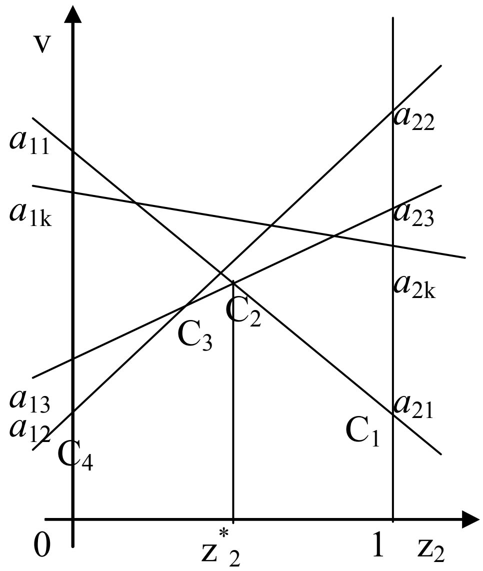


Рис. 9.10

Рассмотрим игру размерностью m×2, представленную платежной матрицей (рис. 9.11).

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}
...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}

Рис. 9.11

Исключим из матрицы доминируемые стратегии игрока A. Пусть после исключения остается k стратегий, т.е. платежная матрица имеет вид (рис. 9.12).

B_j / A_i	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}
...	...	...
A_k	a_{k1}	a_{k2}

Рис. 9.12

Пусть решение игры в чистых стратегиях не существует, т.е. цена игры удовлетворяет неравенству

$$\alpha \le v \le \beta .$$

По теореме Неймана существует решение игры в смешанных стратегиях. Существует вектор $U = (u_1, u_2)$. Тогда из условия

$$a_{1m}u_1 + a_{2m}u_2 \ge v, \text{ для всех } m = \overline{1,k}$$

$$u_1 + u_2 = 1,$$

$$u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0.$$

Изобразим графически на координатной плоскости изменение цены игры в зависимости от одной из переменных – u_1 или u_2. Пусть эта переменная будет u_2. На рис. 9.13 приводится область изменений u_2 и v.

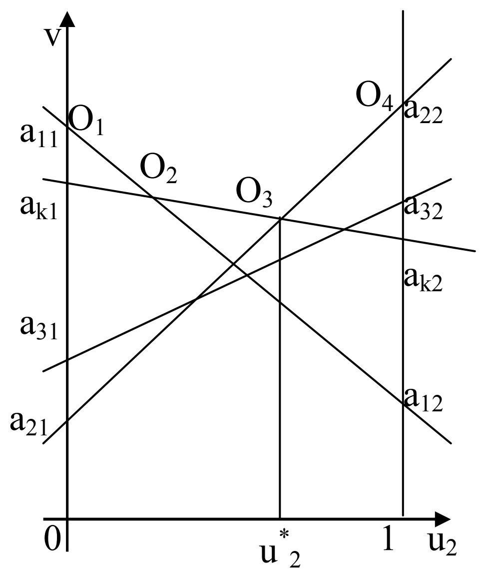


Рис. 9.13

Поскольку v – проигрыш второго игрока, он будет стремиться снизить свой проигрыш за счет изменения переменной u_2, которая определяется верхней ломаной на графике. Это точка O_3 – точка пересечения прямых, соответствующих стратегиям «4» и «2» (см. рис. 9.13). Именно эти стратегии являются основными для нахождения смешанной стратегии игрока B. Далее для матрицы с двумя строками «4» и «2» находим смешанную стратегию аналогично вышеприведенной схеме для игр 2×2 (см. вышеприведенный пример).

Решение игр *n* × *m*

В общем случае игры $n \times m$ могут решаться методами линейного программирования.

Пусть игра задана платежной матрицей (рис. 9.14).

B_j / A_i	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	$\underline{a}_{12}$	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Рис. 9.14

По теореме Неймана решение игры в смешанных стратегиях всегда существует.

Пусть $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ – стратегия второго игрока. Тогда целью игрока будет определение смешанной стратегии доставляющий минимум цены игры, т.е.

$$v - \min_z,$$

при ограничениях

$$a_{k1}z_1 + a_{k2}z_2 + \ldots + a_{kn}z_n \leq v \text{ для всех } k = \overline{1,m},$$

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 1,$$

$$z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, \ldots, z_n \geq 0.$$

Пусть $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ – стратегия второго игрока. Тогда целью игрока будет определение смешанной стратегии, доставляющей минимум цены игры, т.е.

$$v - \max_{u},$$

при ограничениях

$$a_{1k}u_1 + a_{2k}u_2 + \ldots + a_{mk}u_m \geq v \text{ для всех } k = \overline{1, n},$$

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_m = 1,$$

$$u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0, \ldots, u_m \geq 0.$$

Решение игры $n \times m$ можно найти путем использования стандартных пакетов оптимизационных программ или «поиска решения» в MS-Excel.

Контрольные вопросы

1 Дайте определение игры, перечислите основные понятия, приведите примеры.

2 Когда игра двух игроков имеет решение в чистых стратегиях?

3 Поясните сущность седловой точки для игроков.

4 Как определяется решение игры в смешанных стратегиях?

5 В чем особенности решения игр $2 \times n$ и $m \times 2$?

6 Как определяется решение игры в смешанных стратегиях для игр $n \times m$?

10 ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Задание 1. Платежная матрица в игре с природой имеет вид (k – номер варианта), рис. 10.1

A_i \ S_j	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	42	$13+k$	$k+10$	25
A_2	30	$15+k$	$28–k$	31
A_3	$5+2k$	18	$15+k$	$3k$
A_4	$k+15$	$10+k$	24	20
A_5	$5+2k$	20	$15+k$	$32–k$

Рис. 10.1

1) Найти оптимальную стратегию игрока по критерию Вальда.
2) Найти оптимальную стратегию игрока по критерию максимума математического ожидания выигрыша при $P = (0{,}15;\ 0{,}5 – 0{,}01k;\ 0{,}18;\ 0{,}17 + 0{,}01k)$.
3) Найти оптимальную стратегию игрока по критерию Севиджа.
4) Найти оптимальную стратегию игрока по критерию Гурвица, если параметр $\gamma = 0{,}3 + 0{,}01k^2$?

Задание 2. Определить предельную стоимость эксперимента для установления истинного состояния природы при матрице выигрышей, представленной на рис. 10.1, и вероятностей состояний природы $P = (0{,}15;\ 0{,}5 – 0{,}01k;\ 0{,}18;\ 0{,}17 + 0{,}01k)$.

Стоит ли проводить эксперимент, если его стоимость равна $C = 1{,}3 + 0{,}2k – 0{,}01k^2$?

Методические указания по выполнению заданий

Задачи такого плана решаются в двух ситуациях: *в условиях неопределённости* – отсутствие полной или частичной информации о действиях противоположной стороны и *в условиях риска* – наличие информации о распределении вероятностей состояния противоположной стороны.

Отличие данных задач от рассмотренных ранее задач теории (статистических) игр состоит в том, что в первых игроки (противоположные стороны) имеют противоположные интересы и действуют разумно (рационально) для получения максимального для себя выигрыша. В этих задачах один из противников предлагает множество стратегий (с известными или неизвестными вероятностями). Такого «пассивного» игрока называют природой, а первого игрока – статистом.

На практике в качестве состояний природы выступает совокупность факторов, влияющих на эффективность принятия решений. Выделим n состояний природы по различным «комбинациям» совокупности факторов. Тогда можно определить функцию потерь (или функцию эффективности) принятых решений (стратегии). Далее будем оперировать функцией эффективности. Определим значение, функции эффективности как элементы некоторой матрицы:

$$A = \| a_{ij} \|_{mxn},$$

где a_{ij} – эффективность i-го решения (стратегии) игрока при j-м состоянии природы.

Пусть $p_1, p_2, ..., p_n$ – вероятности (априорные) состояния природы: $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Известны различные критерии определения стратегии с максимальным ожидаемый эффектом.

Критерий максимума математического ожидания

Критерий максимума математического ожидания используется при известных априорных вероятностных состояниях природы $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$.

$$p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1.$$

Выбирается та стратегия, которая отвечает ожидаемому максимуму выигрыша $\max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$, т.е.

$$i_{opt} = \arg\left(\max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \right).$$

В случае, когда $p_1 = p_2 = ... = p_n = \dfrac{1}{n}$ – состояния природы равновероятны, имеет место критерий Лапласа

$$L = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij},\ i_{opt} = \arg\left(\frac{1}{n} \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \right).$$

Максиминный критерий Вальда

Рассмотрим критерии, при которых вероятности состояния природы неизвестны. Одним из таких критериев является максиминный критерий Вальда

$$W = \max_i \min_j a_{ij},\ i_{opt} = \arg\left(\max_i \left(\min_j a_{ij} \right) \right).$$

По критерию Вальда выбирают стратегию, обеспечивающую нижнюю цену игры.

Критерий Севиджа (критерий минимального риска)

Определим матрицу риска следующим образом:

$$R = ||\, r_{ij}\, ||_{m\times n},\ r_{ij}=\beta_j - a_{ij},\ \beta_j=\max_i a_{ij},\ j=1,2,...,n,\ i=1,2,...,m.$$

r_{ij} определяет потери связанные с выбором i-й стратегии игроком, если природа оказалась в j-м состоянии (стратегии).

По критерию Севиджа выбирают стратегию, при которой величина риска наименьшая в самой неблагоприятной ситуации, т.е.

$$S = \min_i \max_j r_{ij},\ i_{opt} = \arg\left(\min_i\left(\max_j r_{ij}\right)\right),$$
$$i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n.$$

***Критерий Гурвица* (*критерий пессимизма-оптимизма*)**

Согласно критерию Гурвица игрок выбирает то действие, при котором имеет место

$$H = \max_i \left\{ \gamma \max_j a_{ij} + (1-\gamma)\min_j a_{ij} \right\},\ 0 \le \gamma \le 1.$$

При $\gamma = 1$ получаем критерий оптимизма, при $\gamma = 0$ получаем критерий крайнего пессимизма (максиминный критерий Вальда) $i = \arg\left(\max_i \max_j a_{ij}\right)$. Параметр γ называют коэффициентом доверия.

При $0 < \gamma < 1$ получаем некоторое серединное состояние между «оптимизмом» и «пессимизмом».

При решении задач теории игр выделялись доминируемые стратегии игроков, в задачах теории статистических решений это условие не теряет силу.

Определение. Стратегия k называется недопустимой, если существует некоторая стратегия l такая, что $a_{kj} \le a_{lj}$, $j=1,2,...,n,$ причем хотя бы одно неравенство выполняется как строгое.

При решении задач теории стратегических решений недопустимые стратегии исключаются из рассмотрения.

Пример 1. Возможны 3 состояния цен на рынке сбыта и 4 возможны варианта (планов) производства продукции. Известны прибыли от реализации планов при каждом уровне цен, которые заданы матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$i = 1, 2, 3, 4$ – варианты плана производства, $j = 1, 2, 3$ – уровни цен на рынке сбыта.

Принять решение о выборе варианта плана производства по критериям Вальда, Севиджа, Лапласа и критерию максимума математического ожидания, если $p_1 = \frac{1}{5}$, $p_2 = \frac{1}{5}$, $p_3 = \frac{3}{5}$.

1 Критерий Вальда

$$A=\begin{array}{c|c} & \alpha_i \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \end{array}$$

$$W=\max_i \min_j a_{ij} = \max_i \alpha_i;\ \alpha_i = \min_j \alpha_{ij};$$

$$W=\max_i(3,2,2,1)=3;$$

$$i_{opt}=1.$$

2 Критерий Севиджа

$$\begin{array}{cc} A= & \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}. \\ \hline \beta_j & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 \end{matrix} \end{array}$$

$$\beta_j = \max_i \alpha_{ij};$$

$$R=\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$

$$S=\min_i \max_j\ r_{ij} = \min_i(2,3,3,3)=3;$$

$$i_{opt}=1.$$

3 Критерий Лапласа

$$A=\begin{array}{cc} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 12 \\ 11 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{array}$$

$$L=\frac{1}{3}\max_i \sum_{i=1}^{3} a_{ij} = \frac{1}{3}\max_i(12,11,9,10)=\frac{12}{3}=4;$$

$$i_{opt}=1.$$

По всем трем критериям следует выбрать первый вариант плана.

4 Критерий максимума математического ожидания

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\| a_{ij} p_j \| = \left| \begin{matrix} 3/5 & 5/3 & 12/5 \\ 3/5 & 2/5 & 18/5 \\ 4/5 & 2/5 & 9/5 \\ 1/5 & 3/5 & 18/5 \end{matrix} \right) \quad \begin{matrix} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \\ 20/5 \\ 23/5 \\ 15/5 \\ 22/5 \end{matrix}$$

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j = \frac{23}{5};$$

$$i_{opt} = 2.$$

Если из прошлых лет известно, что вероятности состояния уровня цен равны $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{5}$, то по критерию максимума математического ожидания следует выбрать второй ($i_{opt} = 2$) вариант плана производства.

Принятие решений в условиях неопределенности с проведением эксперимента

Пусть известны вероятности состояния природы $p_1, p_2, \ldots, p_n$.,

$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$.

$A = \| a_{ij} \|_{mxn}$ – матрица эффекта (выигрышей). Для снижения неопределенности игрок (лицо, принимающее решение) может провести эксперимент стоимости C, направленный на установление действительного состояния природы.

Если эксперимент не проводят, надо выбрать действие, доставляющее максимум математического ожидания эффекта, т.е.

$$i_{opt} = \arg\left(\max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \right).$$

Определим максимальную стоимость эксперимента:

$$\beta_j = \max_i a_{ij};$$

$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$ – элементы матрицы риска.

Средний риск при i-й стратегии игрока

$$\overline{r_i} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j .$$

$$C_{пред} = \min_i \overline{r_i} .$$

Эксперимент следует проводить, если его стоимость не превышает среднего ожидаемого риска, т.е.

$$c < C_{пред} = \min_i r_i = \min_i \sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j .$$

После проведения эксперимента устанавливается действительное состояние природы, например j_0. Тогда, с учетом последнего, надо выбрать действие

$$i_{opt} = \arg\left(\max_i a_{ij_0} \right).$$

Пример 2. Пусть в условиях предшествующей задачи (см. пример 1), возможно производить эксперимент (научное исследование), направленное на установление ожидаемого уровня цен на рынке сбыта. Определить максимальную (предельную) стоимость эксперимента. Принять $p_1 = \frac{1}{5}$; $p_2 = \frac{1}{5}$; $p_3 = \frac{3}{5}$.

Решение. Воспользуемся расчётами из примера 1.

Вычислим

$$(r_{ij}p_j) \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{12}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j \\ \frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{12}{5} \\ \frac{5}{5} \end{array}$$

$$\min_i \sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j = \min_i \left(\frac{7}{5}; \frac{4}{5}; \frac{12}{5}; \frac{5}{5} \right) = \frac{4}{5}.$$

Таким образом, максимальная (предельная) стоимость эксперимента равна $C_{пред} = 4/5$.

Эксперимент проводится, если его стоимость менее 4/5, а если его стоимость более 4/5, то эксперимент не проводится и выбирается действие, доставляющее максимум математического ожидания выигрыша $i_{opt} = 2$ (см. пример 1, п. 4).

Контрольные вопросы

1 Каким образом выбирают критерий для нахождения оптимального решения в играх с природой?

2 Что выражает параметр в критерии Гурвица?

3 На что направлен эксперимент и что выражает предельная стоимость эксперимента?

11 СЕТЕВОЕ И КАЛЕНДАРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Задание. Перечень работ проектов представлен в табл. 11.1–11.10, номер варианта в журнале соответствует номеру таблицы. Для вариантов с номерами свыше 10 отсчет следует начать сначала, т.е. номер варианта будет на 10 меньше порядкового номера в списке группы.

1 Построить сетевой график выполнения работ.

2 Найти резервы событий, работ при минимальной продолжительности работ.

3 Определить максимальную продолжительность работ проекта, критический путь.

4 Построить диаграмму Ганта. Определить максимальную потребность в технике (ед.) и финансах (руб.).

5 Определить максимальную потребность в денежных средствах.

6 Определить вероятность превышения продолжительности работ на $(15 + 2k)$ %.

7 Определить максимальное снижение продолжительности работ, если можно дополнительно затратить для этих целей сумму в $S = 10 + 2*|k - 12|$.

Вариант 1

Таблица 11.1

Наименование работы	Нормальная длительность	Нормальная стоимость	Сокращенная длительность	Повышенная стоимость	Количество исполнителей
A	8	8	3	10	2
B	6	3	2	5	2
C	6	4	1	5	1
D	8	5	7	7	4
E	3	5	2	7	1
F	4	10	1	12	7
G	7	12	3	17	2
H	7	4	2	10	2
I	12	7	8	11	3
J	9	6	6	9	5
K	5	3	3	6	7
$N = 11$ человек		$C_0 = 99{,}00$ руб.		$C_к = 1{,}20$ руб/день	

Упорядочение работ

1) *A*, *E* и *F* – исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно;

2) работы *B* и *I* начинаются сразу по окончании работы *F*;

3) работа *J* следует за *E*, а работа *C* – за *A*;

4) работы *H* и *D* следуют за *B*, но не могут начаться, прежде чем не завершена *C*;

5) работа *K* следует за *I*;

6) работа *G* начинается после завершения *H* и *J*.

Вариант 2

Таблица 11.2

Наименование работы	Нормальная длительность	Нормальная стоимость	Сокращенная длительность	Повышенная стоимость	Количество исполнителей
A	3	7	1	8	5
B	4	5	2	8	7
C	1	8	1	8	1
D	4	8	1	12	3
E	5	9	3	11	2
F	7	10	2	13	3
G	6	10	2	12	6
H	5	8	2	9	1
I	8	10	4	22	5
N = 11 человек		C_0 = 100,00 руб.		C_k = 0,90 руб/день	

Упорядочение работ

1) *D* – исходная работа проекта;
2) работа *E* следует за *D*;
3) работы *A*, *G* и *C* следуют за *E*;
4) работа *B* следует за *A*;
5) работа *H* следует за *G*;
6) работа *F* следует за *C*;
7) работа *I* начинается после завершения *B*, *H*, и *F*.

Вариант 3

Таблица 11.3

Наименование работы	Нормальная длительность	Нормальная стоимость	Сокращенная длительность	Повышенная стоимость	Количество исполнителей
A	5	13	1	14	4
B	5	11	2	13	5
C	4	15	2	17	4
D	7	14	4	15	3
E	12	18	6	25	6

Окончание табл. 11.3

F	3	8	2	10	4
G	6	16	1	29	6
H	2	9	1	10	2
I	8	14	3	18	1
J	3	5	1	7	4
N = 10 человек		$C_0 = 143{,}00$ руб.		$C_к$ = 0,60 руб/день	

Упорядочение работ

1) *C*, *E* и *F* – исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно;

2) работа *A* начинается сразу по окончании работы *C*;

3) работа *H* следует за *F*;

4) работа *I* следует за *A*, а работы *D* и *J* – за *H*;

5) работа *G* следует за *E*, но не может начаться, прежде чем не завершены *D* и *I*;

6) работа *B* следует за *G* и *J*.

Вариант 4

Таблица 11.4

Наименование работы	Нормальная длительность	Нормальная стоимость	Сокращенная длительность	Повышенная стоимость	Количество исполнителей
A	12	5	8	7	1
B	8	15	3	17	4
C	15	20	10	23	5
D	9	12	5	13	2
E	14	9	8	12	3
F	9	10	2	11	3
G	15	8	10	9	5
H	10	12	7	13	5
I	11	13	5	18	2
J	13	10	9	14	6
N = 10 человек		$C_0 = 144{,}00$ руб.		C_k = 0,70 руб/день	

Упорядочение работ

1) *C*, *J* и *D* – исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно;

2) работа *A* следует за *D*, а работа *I* – за *A*;

3) работа *H* следует за *I*;

4) работа *F* следует за *H*, но не может начаться, прежде чем не завершена *C*;

5) работа G следует за I;
6) работа E следует за J, а работа B – за E.

Вариант 5

Таблица 11.5

Наименование работы	Нормальная длительность	Нормальная стоимость	Сокращенная длительность	Повышенная стоимость	Количество исполнителей
A	12	7	3	8	2
B	6	9	1	14	10
C	10	12	2	15	2
D	7	10	3	23	5
E	9	15	2	22	7
F	8	13	1	14	6
G	10	11	3	13	1
H	10	17	3	34	7
I	6	10	1	14	1
J	5	10	2	12	4
$N = 11$ человек		$C_0 = 162{,}00$ руб.		$C_к = 0{,}70$ руб/день	

Упорядочение работ

1) D – исходная работа проекта;
2) работы C, E и F начинаются сразу по окончании работы D;
3) работы A и J следуют за C, а работа G – за F;
4) работа I следует за A, а работа B – за G;
5) работа H начинается после завершения E, но не может начаться, прежде чем не завершены I и B.

Вариант 6

Таблица 11.6

Наименование работы	Нормальная длительность	Нормальная стоимость	Сокращенная длительность	Повышенная стоимость	Количество исполнителей
A	9	8	6	10	1
B	3	5	1	6	1
C	12	15	8	19	7
D	6	9	3	13	1
E	8	10	6	11	2

Окончание табл. 11.6

F	4	5	2	8	10
G	7	10	3	12	3
H	10	12	5	13	4
I	7	6	3	9	2
J	12	7	7	13	1
N = 10 человек		$C_0 = 122{,}00$ руб.		$C_к = 1{,}10$ руб/день	

Упорядочение работ

1) *F*, *C* и *B* – исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно;
2) работа *E* следует за *F*;
3) работа *A* следует за *B*, а работа *G* – за *A*;
4) работы *D* и *J* следуют за *E*;
5) работа *I* следует за *C*, но не может начаться, прежде чем закончатся *J* и *G*;
6) работа *H* следует за *D*.

Вариант 7

Таблица 11.7

Наименование работы	Нормальная длительность	Нормальная стоимость	Сокращенная длительность	Повышенная стоимость	Количество исполнителей
A	7	9	2	14	3
B	6	16	1	18	5
C	8	4	3	8	6
D	9	11	4	12	1
E	10	14	4	18	6
F	11	9	6	11	4
G	5	13	1	19	7
H	9	8	2	9	2
I	12	15	5	17	2
J	6	12	2	15	5
N = 13 человек		$C_0 = 149{,}00$ руб.		$C_к = 1{,}30$ руб/день	

Упорядочение работ

1) *G* – исходная работа проекта;
2) работы *A*, *I* и *D* следуют за *G* и могут выполняться одновременно;
3) работы *C* и J следуют за *A*, работа *F* – за *I*, а работа *B* – за *D*;
4) работа *E* следует за *C*;
5) работа *H* следует за *B*, но не может начаться, прежде чем не завершена *F*.

Вариант 8

Таблица 11.8

Наименование работы	Нормальная длительность	Нормальная стоимость	Сокращенная длительность	Повышенная стоимость	Количество исполнителей
A	9	14	3	17	8
B	10	9	6	12	3
C	6	8	1	9	6
D	5	7	3	8	4
E	16	10	12	12	5
F	12	8	3	11	2
G	14	7	2	18	1
H	15	9	5	35	3
I	11	10	2	28	5
J	3	4	2	9	7
$N = 11$ человек		$C_0 = 133{,}00$ руб.		$C_к = 1{,}50$ руб/день	

Упорядочение работ

1) *C*, *D* и *E* – исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно;

2) работа *A* следует за *C*, а работа *F* начинается сразу по окончании работы *A*;

3) работа *G* следует за *F*;

4) работа *B* следует за *D*, а работы *I* и *J* следуют за *B*;

5) работа *H* следует за *I* и *E*, но не может начаться, прежде чем не завершена *G*.

Вариант 9

Таблица 11.9

Наименование работы	Нормальная длительность	Нормальная стоимость	Сокращенная длительность	Повышенная стоимость	Количество исполнителей
A	9	20	4	23	3
B	15	30	7	34	2
C	12	42	6	50	6
D	5	13	1	16	2
E	10	36	3	37	1
F	6	18	1	19	9

Окончание табл. 11.9

G	5	28	1	39	3
H	11	27	3	39	4
I	7	17	2	18	5
J	8	22	3	24	1
N = 10 человек		C_0 = 305,00 руб.		$C_к$ = 1,70 руб/день	

Упорядочение работ

1) *A*, *I* и *D* – исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно;
2) работа *F* следует за *A*, работа *B* – за *I*, а работа *C* – за *D*;
3) работы *J* и *G* следуют за *F*;
4) работа *E* следует за *J*;
5) работа *H* начинается после завершения *E*, *G*, *B* и *C*.

Вариант 10

Таблица 11.10

Наименование работы	Нормальная длительность	Нормальная стоимость	Сокращенная длительность	Повышенная стоимость	Количество исполнителей
A	3	9	2	10	5
B	5	16	1	23	4
C	6	7	4	9	9
D	9	20	6	22	4
E	7	10	2	11	2
F	2	10	1	12	1
G	6	18	3	19	2
H	9	21	3	24	4
I	4	12	1	14	1
J	6	14	2	16	1
K	7	9	1	13	5
N = 11 человек		C_0 = 170,00 руб.		$C_к$ = 0,65 руб/день	

Упорядочение работ

1) *A*, *F* и *G* – исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно;
2) работы *H* и *B* начинаются сразу по окончании работы *F*;
3) работа *J* следует за *A*, а работа *I* – за *G*;
4) работа *E* следует за *H*;
5) работы *C* и *K* следуют за *B* и *I*, но не могут начаться, прежде чем не завершена *J*;
6) работа *D* следует за *E* и *C*.

Методические указания по выполнению задания

Планирование реализации проектов связано с выполнением ряда работ (действий, мероприятий, операций), которые выполняются параллельно и последовательно друг за другом. Прежде чем начать производство нового изделия, например, разрабатывают его конструкторскую документацию, технологию производства, а затем осуществляют четыре вида параллельных работ:

1) проектируют, заказывают, получают и монтируют необходимое оборудование;

2) планируют размещение оборудования, рассчитывают требуемые площади и строить помещения;

3) заключают договоры с другими предприятиями о поставках необходимых материалов, сырья и комплектующих деталей;

4) набирают и готовят кадры будущих работников.

При этом для руководителя (лица, принимающего решение) сложной задачей являются ответы на вопросы:

1 Какова общая продолжительность выполнения работ?

2 Каков график потребности ресурсов для выполнения работ?

3 Реализуем ли график работ при наличных объемах ресурсов на их выполнение?

4 Какие работы являются важными («критичными») при выполнении работ?

5 На сколько можно ускорить время выполнения проекта и за счет каких работ?

6 На каких работах необходимо сосредоточение ресурсов (денежные, человеческие, сырье и материалы, техника и т.д.), чтобы сократить время выполнения проекта?

7 Как найти оптимальный график использования ресурсов для выполнения проекта за заданное время?

8 Каковы риски выполнения проекта и способы их снижения и др.

Многообразие вопросов формирует и соответствующие задачи и методы их решения, определяемые как задачи сетевого и календарного планирования.

Сетевой моделью (другие названия – ***сетевой график***, ***сеть***) называется экономико-математическая модель, отражающая комплекс работ (операций) и событий, связанных с реализацией некоторого проекта (научно-исследовательского, производственного и др.), в их логической и технологической последовательности.

Математический аппарат сетевых моделей базируется на теории графов.

Сетевой график. Сетевой график представляет собой графическое изображение последовательности выполнения работ проекта, показывающее их взаимосвязь и взаимозависимость. Рассмотрим основные термины, применяемые при использовании сетевых графиков.

Работа характеризует конкретный этап процесса по выполнению определенной операции проекта, для чего требуются затраты рабочей силы, материальных ресурсов и времени.

Работа **–** это любые действия, трудовые процессы, сопровождающиеся затратами ресурсов или времени и приводящие к определенным результатам. На сетевых графах или сетевом графике работы обозначают стрелками. Для указания того, что одна работа не может выполняться раньше другой, вводят ***фиктивные работы****,* которые обозначают пунктирными стрелками. Продолжительность фиктивной работы принимается равной нулю.

Событие является фактом окончания всех предшествующих данному событию работ либо началом работ, следующих непосредственно за данным событием. Для совершения события не требуется никаких затрат, а само событие не имеет продолжительности. На сетевом графе события изображают в виде вершин графа. Ни одна выходящая из данного события работа не может начаться до окончания всех работ, входящих в это событие.

При составлении сетевого графика необходимо обеспечить логическую последовательность наступления событий, которая определяется взаимосвязью и последовательностью выполнения соответствующих работ.

Операция – это сама работа или действие. Она обозначается (i, j), рис. 11.1.

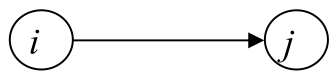


Рис. 11.1

Это означает, что начальное событие i происходит раньше конечного события j, а длительность операции (i, j), которая обозначается стрелкой, будет равна $t(i, j)$.

Продолжительность выполнения работы измеряется в единицах времени: часах, днях, неделях и т.д.

Первичный сетевой график составляют на основе исходных (первичных) данных, представленных ответственными исполнителями этапов комплексной работы до его оптимизации.

Правила построения сетевых графиков

1 В сетевой модели: не должно быть «тупиковых» событий, т.е. событий, из которых не выходит ни одна работа, за исключением завершающего события; каждое событие имеет связь хотя бы с двумя работами

(входящая и выходящая); исходное (начальное) событие лишь одно, которое имеет только исходящие работы.

2 Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой-стрелкой. Если два события связаны более чем одной работой, рекомендуется ввести дополнительное событие и фиктивную работу (рис. 11.2).

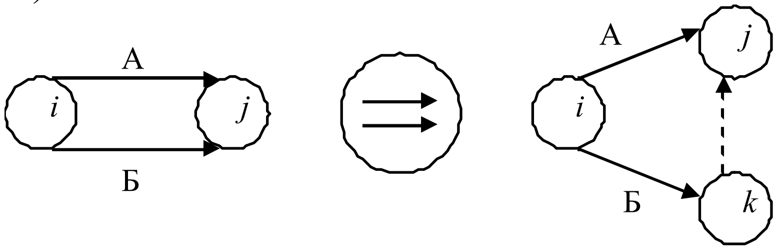


Рис. 11.2

3 В сети не должно быть замкнутых циклов (на рис. 11.3 показан пример замкнутого цикла).

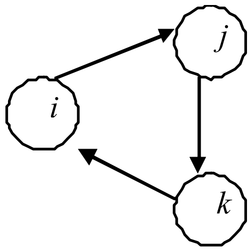


Рис. 11.3

4 Если для выполнения одной из работ необходимо получить результаты всех работ, входящих в предшествующее для нее событие, а для другой работы достаточно получить результат нескольких из этих работ, то нужно ввести дополнительное событие, отражающее результаты только этих последних работ, и фиктивную работу, связывающую новое событие с прежним. Продолжительность фиктивной работы равна нулю.

Например, для начала работы *D* достаточно окончания работы *A*. Для начала работы *C* нужно окончание работ *A* и *B* (рис. 11.4).

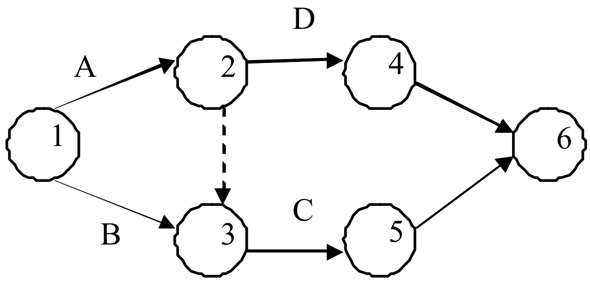


Рис. 11.4

5 События должны быть правильно пронумерованы, т.е. для каждой работы (i, j) $i < j$. При невыполнении этого требования необходимо исполь-

зовать алгоритм перенумерации событий, который заключается в следующем:

а) нумерация событий начинается с исходного события, которому присваивают № 1;

б) из исходного события вычеркивают все исходящие из него работы (стрелки) и на оставшейся сети находят событие, в которое не входит ни одна работа, ему присваивают № 2;

в) затем вычеркивают работы, выходящие из события № 2, и вновь находят событие, в которое не входит ни одна работа, ему присваивают № 3, так продолжают до завершающего события, номер которого должен быть равен количеству событий в сетевом графике;

г) если при очередном вычеркивании работ одновременно несколько событий не имеют входящих в них работ, то их нумеруют очередными номерами в произвольном порядке.

Любая последовательность работ в сети, в которой конечное событие каждой работы последовательности совпадает с начальным событием следующей за ней работы, называется ***путем***.

Следует различать два вида пути:

1) ***путем*** (L) называется непрерывная последовательность выполнения работ от исходного до завершающего события. Продолжительность пути (t) определяется суммой продолжительностей составляющих его работ;

2) ***критическим путем*** ($L_{кр}$) называется путь от исходного до завершающего события, который имеет максимальную продолжительность ($t_{кр}$).

Временные параметры сетей. Резервы времени

Основными временными параметрами сетей являются ранние и поздние сроки наступления событий. Зная их, можно вычислить остальные параметры сети – сроки начала и окончания работ и резервы времени событий и работ.

Обозначим $t(i,j)$ – продолжительность работы с начальным событием i и конечным событием j.

Ранний срок $t_{\text{р}}(j)$ наступления события j определяется величиной наиболее длительного отрезка пути от исходного до рассматриваемого события, причем $t_p(1) = 0$, а $t_p(N) = t_{кр}$ где N – номер завершающего события. Правило вычисления:

$$t_P(j) = \max\{t_P(i) + t(i,j)\},$$

где максимум берется по всем событиям i , непосредственно предшествующим событию j (соединены стрелками).

Поздний срок $t_n(i)$ наступления события i характеризует самый поздний срок, с которого должны начинаться работы с началом на данном событии, не вызывая при этом срыва срока наступления конечного события. Правило вычисления:

$$t_П(i) = \min\{t_П(j) - t(i,j)\},$$

где минимум берется по всем событиям j, непосредственно следующим за событием i.

Поздние сроки событий определяются «обратным ходом», начиная с завершающего события, с учетом соотношения $t_n(N) = t_p(N)$, т.е. поздний и ранний сроки совершения завершающего события равны между собой.

Резерв $R(i)$ события i показывает, на какой предельно допустимый срок могут задержаться работы, исходящие из события i, без нарушения срока наступления завершающего события:

$$R(i) = t_П(i) - t_P(i).$$

События, лежащие на критическом пути (критические события), резервов не имеют.

Существуют различные методы расчета параметров сети: табличный и графический.

Рассмотрим графический метод.

При расчетах сетевого графика каждый круг, изображающий событие, делим диаметрами на четыре сектора (рис. 11.5).

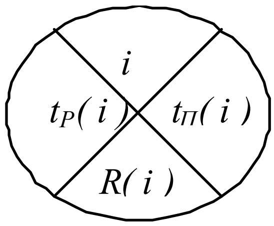


Рис. 11.5

Пример. Рассмотрим проект с работами, представленными в табл. 11.11.

Таблица 11.11

№ п/п	Работа	Предшествующие работы	Продолжительность, ч
1	*A*	-	5
2	*B*	-	3
3	*C*	*A*	7
4	*D*	*A*	6
5	*E*	*B*	7
6	*F*	*D, E*	3
7	*G*	*D, E*	10
8	*H*	*C, F*	8

Построить сетевой график, найти резервы событий, работ, критический путь. Сколько времени потребуется для завершения проекта? Можно ли отложить выполнение роботы *D* без отсрочки завершения проекта в целом? На сколько недель можно отложить выполнение работы *C* без отсрочки завершения проекта в целом?

Решение

Построим сетевой график (рис. 11.6).

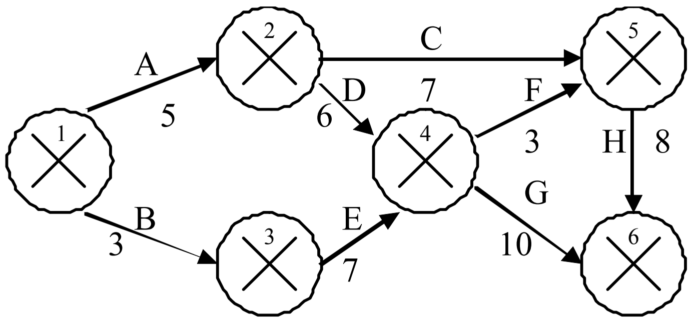


Рис. 11.6

На графике события представлены кругами, а работы – стрелками. Работа может обозначаться либо буквой, надписанной на графике рядом с соответствующей работе стрелкой, либо номером события, из которого начинается и заканчивается работа.

1-й этап. При вычислении раннего срока наступления события $t_p(i)$ перемещаемся от исходного события 1 к завершающему событию 6.

$t_P(1) = 0$.

В событие 2 входит только одна работа: $t_P(2) = t_P(1) + t(1,2) = 0 + 5 = 5$.

Аналогично $t_p(3) = t_p(1) + t(1,3) = 0 + 3 = 3$.

В событие 4 входят две работы →

$t_p(4) = \max\{t_p(2) + t(2,4), t_p(3) + t(3,4)\} = \max\{5 + 6 , 3 + 7\} = 11$.

$t_p(5) = \max\{t_p(2) + t(2,5) , t_p(4) + t(4,5)\} = \max\{5 + 7 , 11 + 3\} = 14$.

$t_p(6) = \max\{t_p(4) + t(4,6) , t_p(5) + t(5,6)\} = \max\{11 + 10 , 14 + 8\} = 22$.

Отсюда следует, что критическое время выполнения проекта $t = 22$.

Внесем соответствующие данные в сетевой график (рис. 11.7).

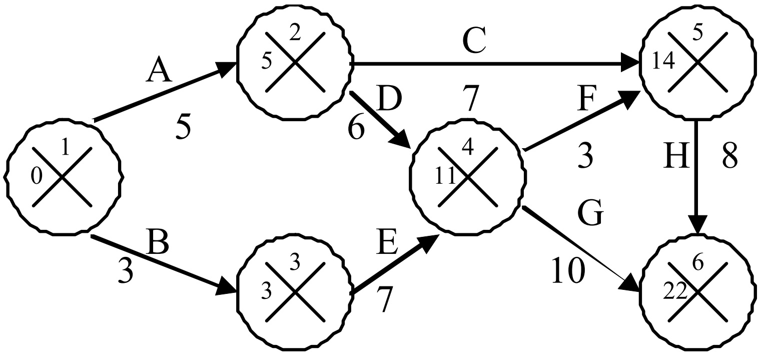


Рис. 11.7

2-й этап. При вычислении *позднего срока $t_n(i)$ свершения события I* перемещаемся от завершающего события 6 к исходному событию 1 по сетевому графику против направления стрелок.

$t_n(6)=t_p(6)=22$.

Далее рассматриваем непосредственно предшествующее событие 5, из которого выходит только одна работа (5, 6):

$t_n(5)=t_n(6)-t(5,6)=22-8=14$.

Из события 4 выходят две работы: (4, 5) и (4, 6), поэтому определяем поздний срок наступления события $t_n(4)$ по каждой из этих работ:

$t_n(4)=\min\{t_n(5)-t(4,5)\,,\,t_n(6)-t(4,6)\}=\min\{14-3\,,\,22-10\}=\min\{11\,,12\}=11$.

$t_n(3)=t_n(4)-t(3,4)=11-7=4$.

$t_n(2)=\min\{t_n(5)-t(2,5)\,,\,t_n(4)-t(2,4)\}=\min\{14-7\,,11-6\}=\min\{7\,,5\}=5$.

$t_n(1)=\min\{t_n(2)-t(1,2)\,,\,t_n(3)-t(1,3)\}=\min\{5-5\,,\,4-3\}=\min\{0\,,1\}=0$

Внесем полученные данные в сетевой график (рис. 11.8).

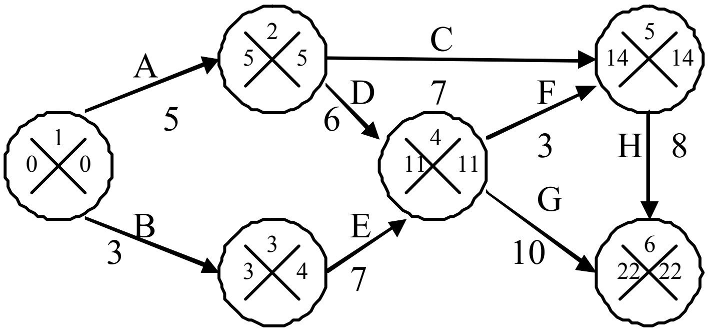


Рис. 11.8

3-й этап. Вычисляем *резерв* $R(i)=t_n(i)+t_p(i)$ события i , т.е. из чисел, полученных на этапе 2, вычитаем числа, полученные на этапе 1 (рис. 11.9).

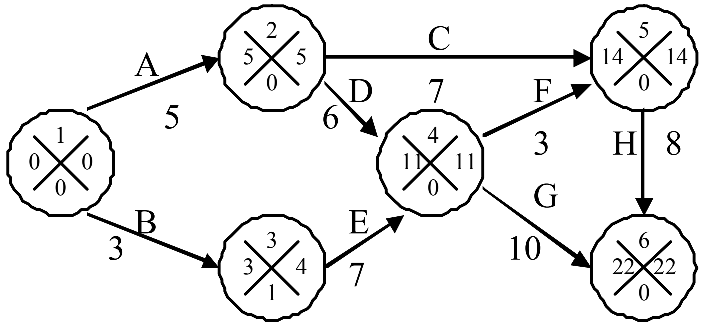


Рис. 11.9

4-й этап. У критических событий резерв времени равен нулю, так как ранние и поздние сроки их свершения совпадают. Критические события 1, 2, 4, 5, 6 и определяют критический путь 1-2-4-5-6, который по определению должен быть самым продолжительным по времени. На сетевом графике мы его покажем двумя чертами (рис. 11.10).

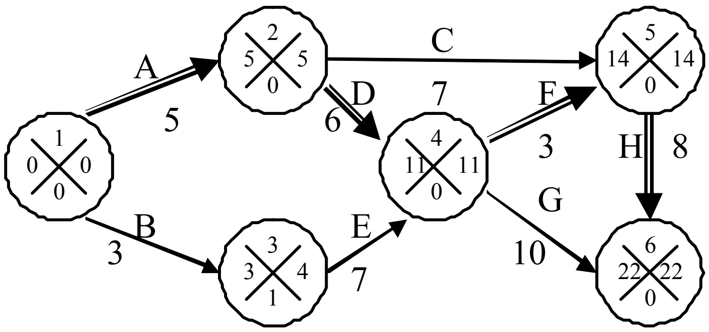


Рис. 11.10

Теперь можно ответить на вопросы задачи.

Для завершения проекта потребуется 22 недели. Работа *D* расположена на критическом пути, поэтому ее нельзя отложить без отсрочки завершения проекта в целом. Работа *C* не расположена на критическом пути, ее можно задержать на $t_n(5) - t_n(2) - t(2,5) = 14 - 5 - 7 = 2$ (недели).

Сетевое планирование в условиях неопределенности

Продолжительность выполнения работ часто трудно задать точно, поэтому в практической работе вместо одного числа (детерминированная оценка) задают две оценки – минимальную и максимальную. Минимальная (оптимистическая) оценка $t_{min}(i,j)$ характеризует продолжительность выполнения работы при наиболее благоприятных обстоятельствах, а максимальная (пессимистическая) $t_{max}(i,j)$ – при наиболее неблагоприятных. Продолжительность работы в этом случае рассматривается как случайная величина, которая в результате реализации может принять любое значение в заданном интервале. Такие оценки называются вероятностными (случайными), и их ожидаемое значение $t_{ож}$ оценивается по формуле (при бета-распределении плотности вероятности)

$$t_{ож} = \frac{(3 \times t_{\min}(i,j) + 2 \times t_{max}(i,j))}{5}.$$

Для характеристики степени разброса возможных значений вокруг ожидаемого уровня используется показатель дисперсии D^2:

$$D^2 = \frac{(t_{\max}(i,j) - \times t_{min}(i,j))^2}{5^2} = 0{,}04 \times (t_{\max}(i,j) - \times\, t_{min}(i,j))^2.$$

На основе этих оценок можно рассчитать все характеристики сетевого графика (СТ), однако они будут иметь иную природу, будут выступать как средние характеристики. При достаточно большом количестве работ можно утверждать (а при малом – лишь предполагать), что общая продолжительность любого, в том числе и критического, пути имеет нормальный закон распределения со средним значением, равным сумме средних значений продолжительности составляющих его работ, и дисперсией, равной сумме дисперсий этих же работ.

Кроме обычных характеристик СТ, при вероятностном задании продолжительности работ можно решить две дополнительные задачи:

1) определить вероятность того, что продолжительность критического пути $t_{кр}$ не превысит заданного директивного уровня T;

2) определить максимальный срок выполнения всего комплекса работ T при заданном уровне вероятности P.

Первая задача решается на основе интеграла вероятностей Лапласа $\Phi(z)$ с использованием формулы

$$P(t_{кр} < T) = 0{,}5 + 0{,}5\,\Phi(z),$$

где Z – нормированное отклонение случайной величины:

$$z = (T - t_{кр}) / S_{кр};$$

$S_{кр} = \sqrt{D^2(t_{кр})}$ – среднее квадратичное отклонение, вычисляемое как корень квадратный из дисперсии продолжительности критического пути $D^2(t_{кр})$. Дисперсия продолжительности критического пути равна сумме дисперсий работ, составляющих критический путь.

Соответствие между z и симметричным интегралом вероятностей приведено в табл. 11.12. Более точное соответствие между этими величинами (когда Z вычисляется более чем с одним знаком в дробной части) можно найти в специальной литературе.

Таблица 11.12

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0	0,0000	1,0	0,6827	2,0	0,9643
0,1	0,0797	1,1	0,7287	2,1	0,9722
0,2	0,1585	1,2	0,7699	2,2	0,9786
0,3	0,2358	1,3	0,8064	2,3	0,9836
0,4	0,3108	1,4	0,8385	2,4	0,9876
0,5	0,3829	1,5	0,8664	2,5	0,9907
0,6	0,4515	1,6	0,8904	2,6	0,9931
0,7	0,5161	1,7	0,9104	2,7	0,9949
0,8	0,5763	1,8	0,9281	2,8	0,9963
0,9	0,6319	1,9	0,9545	2,9	0,9973

При достаточно большой полученной величине вероятности (более 0,8) можно с высокой степенью уверенности предполагать своевременное выполнение всего комплекса работ.

Для решения второй задачи используют формулу

$$T = t_{\text{кр}} + z \times S_{\text{кр}}.$$

Кроме вышеописанного упрощенного способа расчета сетей с детерминированной структурой и вероятностными оценками продолжительности выполнения работ, используют метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). В соответствии с ним на компьютере многократно моделируют продолжительности выполнения всех работ и рассчитывают основные характеристики СТ. Большой объем испытаний позволяет более точно выявить закономерности моделируемой сети.

Задача. Произвести оптимизацию сетевого графика по ресурсам. Наличный ресурс равен 10 (рис. 11.11).

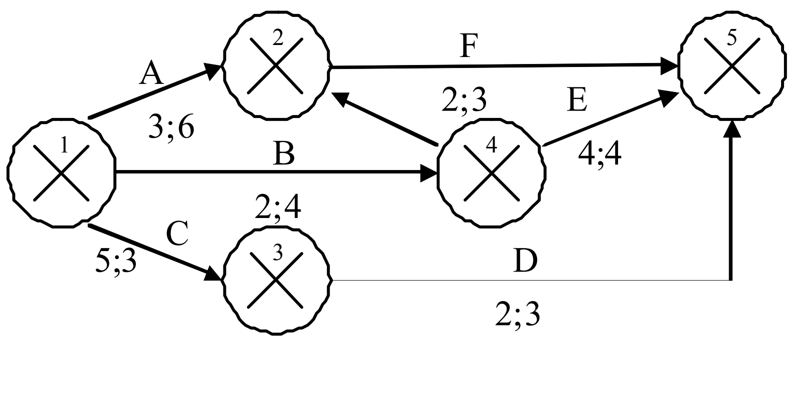


Рис. 11.11

Найдем критический путь (рис. 11.12).

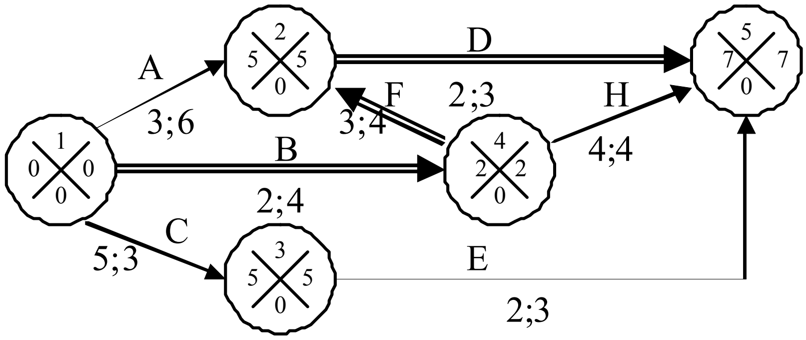


Рис. 11.12

Строим график Ганта. В скобках для каждой работы укажем требуемое количество ресурса (рис. 11.13).

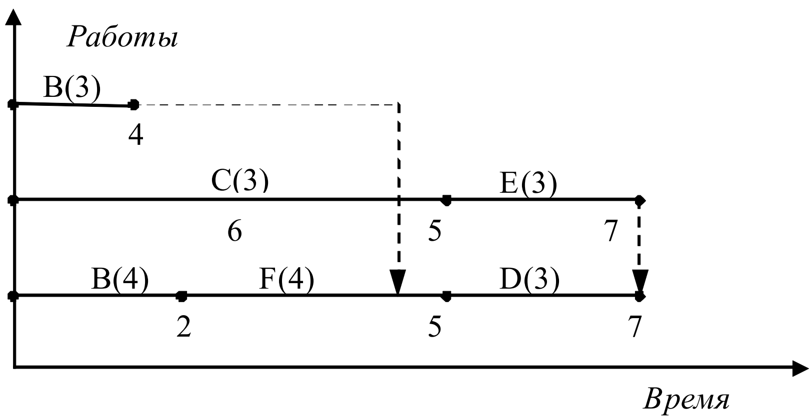


Рис. 11.13

По графику Ганта строим график ресурса. На оси абсцисс мы откладываем время, а на оси ординат – потребности в ресурсах (рис. 11.14). Считаем, что все работы начинаются в наиболее ранний срок их выполнения. Ресурсы складываются по всем работам, выполняемым одновременно. Также проведем ограничительную линию по ресурсу (в нашем примере это $y = 10$).

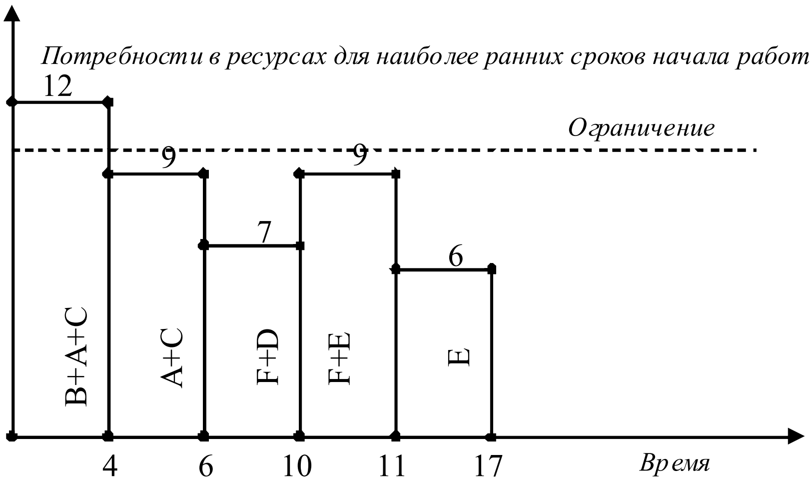


Рис. 11.14

Из графика видно, что на отрезке от 0 до 4, когда одновременно выполняются работы *B, A, C*, суммарная потребность в ресурсах составляет $3 + 4 + 5 = 12$, что превышает ограничение 10. Так как работа *C* критическая, то необходимо сдвинуть сроки выполнения или *A*, или *B* (рис. 11.15).

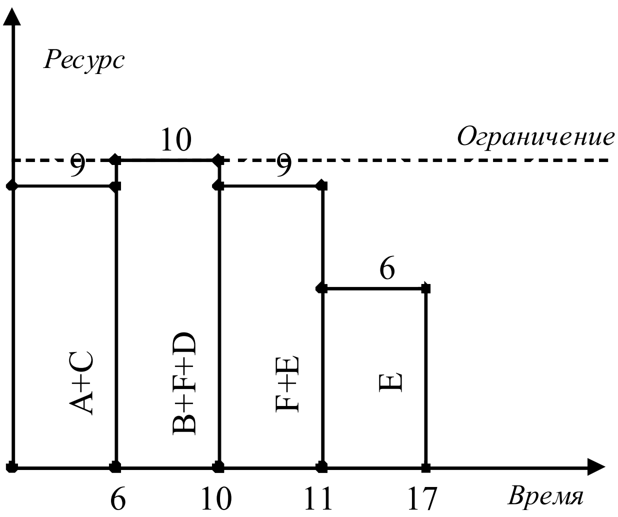


Рис. 11.15

Запланируем выполнение работы *B* с 6-го по 10-й день. На сроках выполнения всего проекта это не скажется и даст возможность остаться в рамках ресурсных ограничений.

Контрольные вопросы

1 Что собой представляют дуги и вершины в сетевом графе?

2 Каковы правила построения сетевых графов? Что не допускается в сетевых графах?

3 На какие вопросы дают ответы сетевые графы?

12 КЕЙС-ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

Строительный холдинг, включающий в себя две компании «Северный ветер» (компания **А**) и «Стройсервис» (компания **В**), занимается изготовлением и реализацией унифицированных строительных конструкций через четыре распределительных центра.

Рынок стройиндустрии стабильно развивается, и строительный холдинг стремится к увеличению своих мощностей за счет компании **А** (компания **В** работает на предельной загрузке мощностей). Холдинг занимает определенную долю рынка.

Задание 1. По ретроспективным (поквартальным) данным за четыре года выполнить прогноз объема спроса рынка на строительные конструкции (тыс. т) на один год. Исходные данные выбрать из табл. 12.1.

Таблица 12.1

Квартал	Вариант задания – последняя цифра в номере в списке группы									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	129	122	45	112	124	121	125	128	90	100
2	130	123	50	114	128	123	125	128	91	101
3	128	122	54	114	127	126	125	128	91	101
4	128	123	58	112	130	129	127	129	92	102
5	127	123	61	113	130	133	128	130	93	103
6	128	124	65	114	132	137	129	130	93	103
7	131	124	69	120	132	142	130	129	93	103
8	127	125	74	113	134	148	132	130	95	105
9	134	129	78	120	135	154	134	133	105	115
10	133	130	83	117	136	161	136	136	117	127
11	127	127	89	115	137	168	138	136	118	128
12	128	127	94	112	139	176	141	138	127	137
13	136	147	101	123	140	185	144	141	144	154
14	138	128	107	132	141	195	147	143	151	161
15	143	139	115	139	142	206	149	145	169	179
16	127	149	123	112	144	217	152	145	173	183

Объем производства строительных конструкций (тыс. т в год) компании **В** составляет … (выберите из табл. 12.2).

Таблица 12.2

Число букв в фамилии студента							
≤4	5	6	7	8	9	10	>10
252	256	260	252	260	248	240	252

В настоящее время объем производства компании **А** (тыс. т в год) составляет … (выберите из табл. 12.3).

Таблица 12.3

Последняя цифра в номере группы									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
232	200	240	232	240	208	240	232	236	244

Задание 2. Определить прогнозный объем компании **А** на следующий год с учетом перспектив освоения растущего объёма спроса. Холдинг занимает долю рынка строительных конструкций, равную … (выберите из табл. 12.4).

Таблица 12.4

Число букв в имени студента					
≤4	5	6	7	8	≥9
91	88	89	92	93	90

Известно, что на единицу продукции холдинга необходимы поставки сырья с нормативным коэффициентом использования в готовой продукции холдинга равным … (выберите из табл. 12.5).

Закупки сырья можно осуществлять у шести компаний (**П1** – «Межрегионпоставка», **П2** – «Все для стройки», **П3** – «Южстройматериал»), **П4** – «Югстройсервис», **П5** – «Мегапоставки», **П6** – «Мир»).

Таблица 12.5

Число букв в фамилии студента				
≤5	6	7	8	≥9
88	86	80	91	85

Задание 3. Выберите оптимального поставщика с учетом его мощностей, времени доставки сырья, цены, качества сервиса и других критериев, обоснуйте их ранжирование.

Исходные данные о поставщиках приведены в табл. 12.6.

Реализация продукции холдинга производится через четыре существующих распределительных центра. Схемы расположения и виды транспортных коммуникаций и расстояния приводятся на рис. 12.1–12.6. Распределительный центр № 5 перспективный и еще не реализован на практике.

Таблица 12.6

Критерий выбора	Поставщик					
	П1 – «Межрегион-поставка»	**П2** – «Все для стройки»	**П3** – «Южстрой-материал»	**П4** – «Югстрой-сервис»	**П5** – «Мегапос-тавки»	**П6** – «Мир»
1 Предельные поставки, тыс. т в год	442	528	500	620	700	550
2 Время доставки сырья с момента заказа, ч	45	38	42	47	34	40
3 Цена, тыс. руб./т	54,5	55,5	57	56	53	54
4 Качество сервиса, 1…10	5	8	6	6	4	7
5 Собственный парк грузовых автомобилей, ед.	30	40	55	35	60	25
6 Регулярность отгрузки партий, партий в неделю	4	5	4	4	3	6

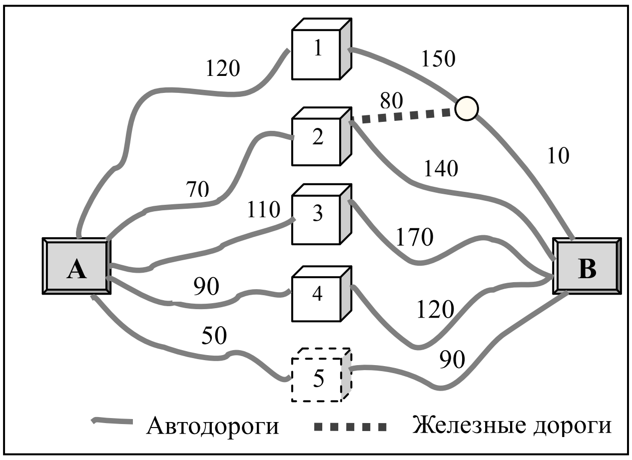


Рис. 12.1

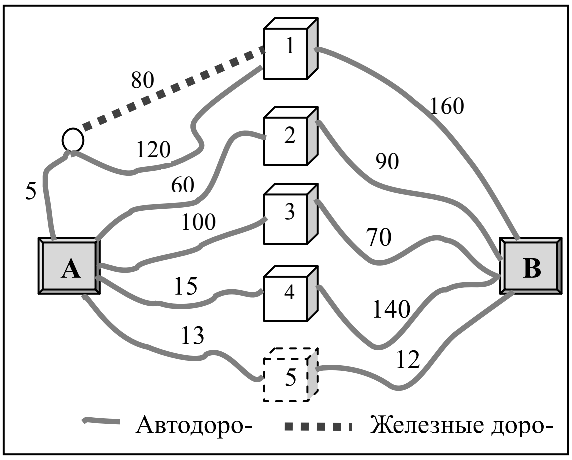


Рис. 12.2

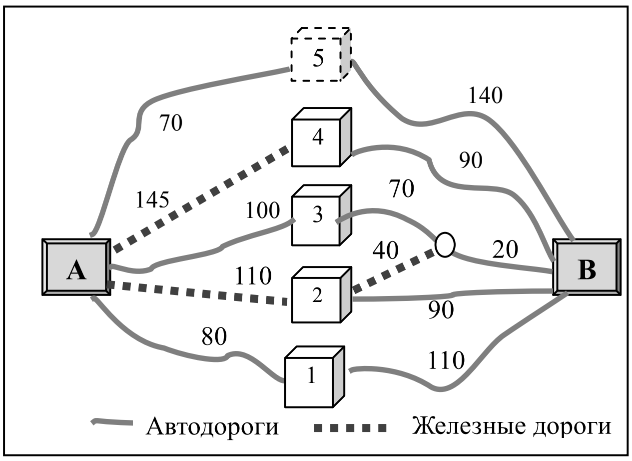


Рис. 12.3

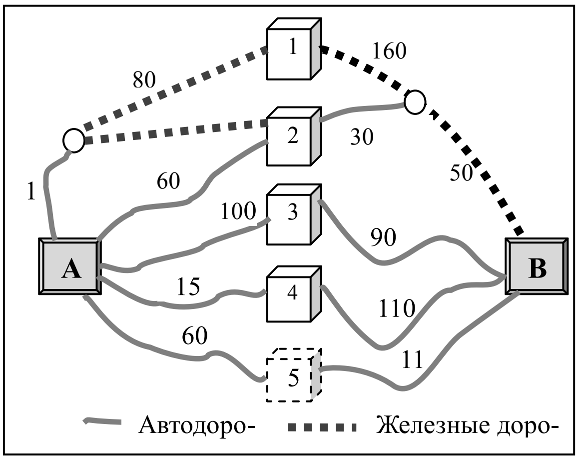


Рис. 12.4

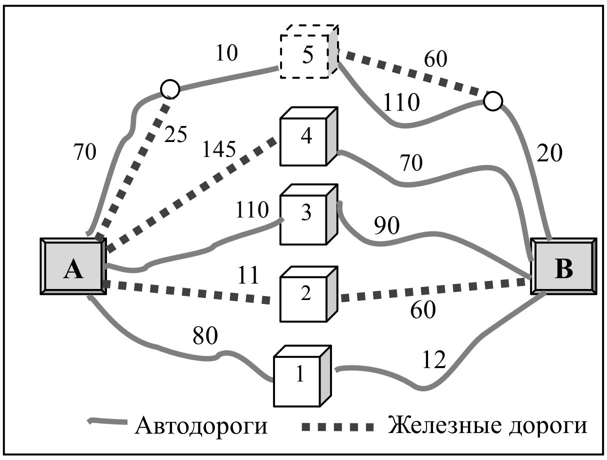


Рис. 12.5

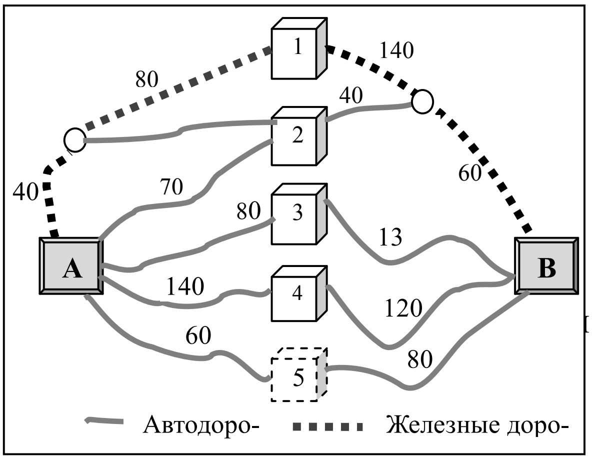


Рис. 12.6

По вариантам: рис. 12.1 – для вариантов от 1-го до 5-го; рис. 12.2 – для вариантов от 6-го до 10-го; рис. 12.3 – для вариантов от 11-го до 15-го; рис. 12.4 – для вариантов от 16 до 20; рис. 12.5 – для вариантов от 21 до 25, рис. 12.6 – для вариантов от 26 до 31.

Как видно из рисунков, к распределительным центрам могут быть два варианта доставки продукции: автотранспорт или железнодорожный транспорт, автотранспорт + железнодорожный транспорт.

Задание 4. Определить целесообразный вид транспортировки из компании **А** на распределительный центр № 1 с учетом затрат на погрузку, расстояние перевозки, скидки, предоставляемые железнодорожным транспортом в 10 % при ежесуточных отгрузках в объеме свыше 0,9 тыс. т. Исходные данные для расчетов:

– затраты на погрузку/выгрузку на автотранспорте – $z_{\text{пвА}}$ = 4 руб/т,

– затраты на погрузку/выгрузку на ж/д транспорте – $z_{\text{пвЖ}}$ = 2 руб/т,

– тариф на перевозку автотранспортом $\text{Т}_{\text{А}}$ = 0,2 руб/ткм,

– тариф на перевозку ж/д транспортом $\text{Т}_{\text{Ж}}$ = 0,3 руб/ткм.

В последующих расчетах использовать оптимальный тариф в комбинированных и вариантных схемах перевозки от компаний **А** и **В** до распределительных центров.

Задание 5. Решить задачу оптимального закрепления распределительных центров между компаниями **А** и **В** по данным объема производства компании А на плановый год, если мощности распределительных центров на плановый год составляют … (табл. 12.7).

Таблица 12.7

Номер распределительного центра	Число букв в имени студента							
	<=3	4	5	6	7	8	9	>=10
1	120	90	80	90	100	100	100	100
2	140	100	90	100	110	120	120	110
3	90	70	60	70	70	70	80	70
4	120	90	80	90	100	100	100	100

При нехватке мощностей распределительных центров предусмотреть возможность строительства нового распределительного центра № 5 или развития мощностей распорядительного центра № 1.

Приведенные расходы на строительство нового центра с указанным на рис. 12.1 местом расположения равны … (табл. 12.8).

Таблица 12.8

Номер студента в списке группы					
1–5	6–10	11–15	16–20	21–25	>25
6,5	15	18	10	9	7

Приведенные расходы на увеличение мощности распределительного центра № 1 составляют … (табл. 12.9).

Таблица 12.9

Последняя цифра номера студенческой книжки									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,1	3	2	2,5	3	4	2,2	1,5	2	2,4

Строительство и реконструкция распределительного центра требуют разработки сетевого графика выполнения работ и определения сроков начала работ для обеспечения мощностями распределительных центров на плановый год.

Задание 6. С учетом результатов предыдущего задания решить задачу определения срока начала строительства распределительного центра № 5 или развития существующего распределительного центра № 1 до требуемой мощности. Исходные данные представлены в табл. 12.10, 12.11.

Таблица 12.10

№ п/п	Наименование работы	Предшествующие работы	Продолжительность, нед.				Возможность сокращения, нед.				Доп. расходы
			Номер студента в списке группы				Число букв в имени студента				
			1…7	8…15	16…22	≥23	≤4	5…6	7…8	≥9	
1	Закупка площадей и оформление исходно-разрешительной документации	-	1	1	2	1	1	-	1	-	26
2	Проектирование и подготовка рабочей документации	1	5	4	3	4	-	2	1	1	34
3	Геолого-изыскательские работы	2	2	2	2	2	1	1	1	1	65
4	Строительно-монтажные работы, закупка и монтаж оборудования	2	14	16	12	15	2	2	1	3	55
5	Инженерные коммуникации, подъезды	3	3	4	3	4	-	1	-	1	45
6	Приемо-сдаточные работы основных объектов	4	1	2	1	2	-	1	-	1	35
7	Приемо-сдаточные работы инженерных коммуникаций и подъездов	5	1	1	1	1	-	-	-	-	-
8	Разрешительная документация на начало эксплуатации	6	2	1	1	1	-	-	-	-	-

Таблица 12.11

№ п/п	Наименование работы	Предшествующие работы	Продолжительность, нед.										Возможность сокращения, нед.				Дополнительные расходы
			Последняя цифра в номере в списке группы										Число букв в фамилии студента				
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	≤4	5…6	7…8	≥9	
1	Подготовка и оценка технологических решений развития мощностей центра	-	1	2	2	1	1	1	2	1	2	2	-	-	-	-	-
2	Исходно-разрешительная документация и имущественно-правовые вопросы	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	-
3	Проектно-изыскательские работы и подготовка рабочей документации	2	4	3	5	4	5	5	4	5	3	5	1	1	1	1	54
4	Модернизация существующих мощностей	1	3	4	5	3	4	3	5	4	3	4	1	1	1	1	33
5	Строительно-монтажные работы, закупка и монтаж оборудования	4	14	13	14	16	19	17	15	16	13	15	2	3	2	4	23
6	Инженерные коммуникации, подъезды	5	2	3	3	4	3	4	3	3	2	3	1	1	1	1	45
7	Приемо-сдаточные работы основных объектов	3	1	2	1	1	2	1	1	2	1	2	-	-	-	-	-
8	Приемо-сдаточные работы инженерных коммуникаций и подъездов	6	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	-	-	-	-	-
9	Разрешительная документация на начало эксплуатации	7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-

Определить целесообразный вариант ускорения выполнения работ на одну неделю за счет сокращения продолжительности работ критического пути и других работ.

13 ВАРИАНТ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Все нижеприведенные примерные варианты выполнения заданий могут отличаться *содержанием, полной детализацией расчетов, выводами*.

Постановки заданий, расчеты, результаты и выводы будем приводить мелким шрифтом и одинарным межстрочным интервалом. Нумерация таблиц и рисунков в разделе выполняется с № 1. Задание будет выполняться для студента: Космодемьянский Александр, номер студенческого билета 349607, порядковый номер 12 в списке группы ДОР-3-119.

Введение (вариант)

Актуальность использования математических методов и моделей в логистике определяется теоретическими основами и принципами логистики, которые требуют минимизации интегральных затрат в организации материальных потоков на всей цепи организации товародвижения, выбора эффективного варианта развития логистической системы, обеспечения надежности и качества ее функционирования, удовлетворения потребности потребителей и т.д.

В представленном задании рассматривается последовательность взаимосвязанных задач организации логистических процессов: прогнозирование рынка и объема логистических услуг, определение поставщика на основе многих критериев, решение задачи выбора оптимальной варианта доставки товаров, решение задачи оптимальной транспортировки в логистической системе и определение схемы развития распределительной сети, а также задач сетевого и календарного планирования.

Сценарий расчетов определили следующие исходные данные:

фамилия и имя студента: Космодемьянский Александр (15 букв в фамилии, 9 букв в имени);

номер студенческого билета: 349607 (последняя цифра в номере 7);

группа: ДОР-3-119 (последняя цифра в номере группы 9).

порядковый номер в списке группы: 12.

ВЫПОЛНЕНИЕ КЕЙС-ЗАДАНИЯ

Строительный холдинг включает в себя две компании «Северный ветер» (компания **А**) и «Стройсервис» (компания **В**). Холдинг выпускает унифицированные строительные конструкции для промышленного и гражданского строительства, которые реализуются на внутреннем рынке. Холдинг занимает 90 % рынка строительных конструкций и не собирается снижать свою долю на рынке. Для увеличения объемов реализации при растущем спросе политикой холдинга предусматривается увеличение мощностей компании «Северный ветер». Продукция компании реализуется через собственную сеть распределительных центров. В части распределительной логистики холдингом проработаны вопросы развития и модернизации существующего первого распределительного центра или строительства нового центра.

Рынок стройиндустрии стабильно развивается. Для формирования планов производства и реализации холдинг на базе ретроспективной информации прогнозирует спрос на свою продукцию.

Задание 1

По ретроспективным квартальным данным за четыре года, приведенным в табл. 13.1, выполнить прогноз объема спроса рынка на строительные конструкции на один год.

Таблица 13.1

№ квартала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Объем спроса	45	50	54	58	61	65	69	74	78	83	89	94	101	107	115	123

Для прогнозирования воспользуемся возможностями Excel.

Проанализируем вид зависимости спроса в графической форме (рис. 13.1).

Судя по графику основными видами зависимости спроса могут быть (гипотеза):

– линейная $y = a + bt$;

– параболическая $y = a + bt + ct^2$;

– модель авторегрессии второго порядка: $y(t) = a_1y(t\text{-}1)+a_2y(t\text{-}2)$.

Подберем модель прогноза из вышеперечисленных.

Используя возможности Excel «Поиск решения», найдем параметры трех зависимостей и выполним прогноз.

Сравнение точности прогноза выполним на базе коэффициента корреляции исходного (ретроспективного) ряда и теоретических результатов прогноза. Результаты приводятся в табличной и графической формах из Excel приводится на рис. 13.1, 13.2.

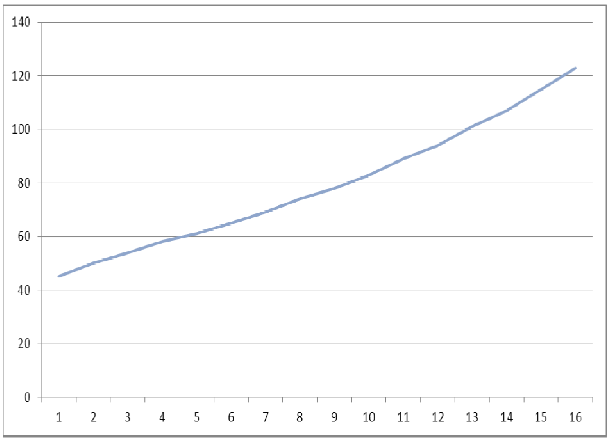


Рис. 13.1

Оценивая коэффициент корреляции исходных данных и прогнозных моделей, видим что наилучшей моделью является модель 3 – модель авторегрессии второго порядка:

$$y(t)= a_1 – y(t\text{-}1)+a_2y(t\text{-}2).$$

С рассчитанными параметрами модель имеет вид (расчеты произведены в Excel)

$$y(t) = 0{,}00001 \times y(t\text{-}1)+ 1{,}066036 \times y(t\text{-}2).$$

Сравнение результатов

	t	y_t	Модель 1	Модель 2	Модель 3
	1	45	42	47	45
	2	50	47	50	50
	3	54	52	53	53
	4	58	57	57	57
	5	61	62	60	61
	6	65	67	64	65
	7	69	72	69	69
	8	74	77	74	73
	9	78	82	78	78
	10	83	87	84	83
	11	89	92	89	89
	12	94	97	95	95
	13	101	102	101	101
	14	107	106	108	108
	15	115	111	115	115
	16	123	116	122	122
	17		121	129	130
	18		126	137	139
	19		131	145	148
	20		136	153	158
Коэффициент корреляции			0,9915	0,9993	0,9997

Рис. 13.2

Графическое сравнение рассматриваемых моделей приводится на рис. 13.3.

Таким образом, спрос на строительные конструкции в плановом году составит 575 тыс. т, в том числе по кварталам: 1-й квартал – 130; 2-й квартал – 139; 3-й квартал – 148; 4-й квартал – 158.

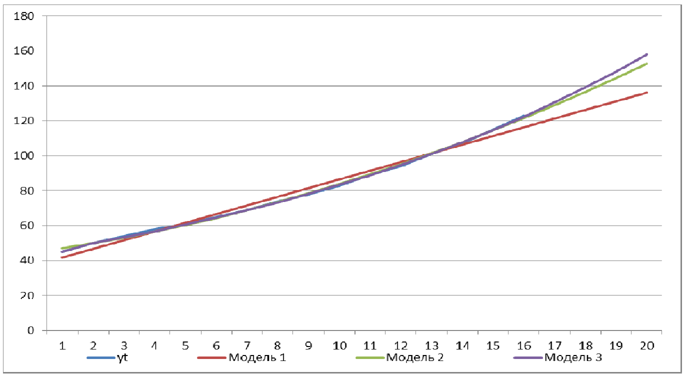


Рис. 13.3

Задание 2

Определить прогнозный объем компании **А** на следующий год с учетом перспектив освоения растущего объёма спроса.

Объем выпуска, приходящийся на холдинг (90 % рынка):

$$575 \times 0{,}9 \approx 518 \text{ тыс. т.}$$

Объем производства строительных конструкций в год компании **В** составляет 252 тыс. т. В настоящее время объем производства компании **А** составляет 244 тыс. т.

Суммарный объем производства холдинга составит:

$$252 + 244 = 496 \text{ тыс. т.}$$

Поскольку прирост объема выпуска холдинг может обеспечить только за счет компании **А**, определим плановый объем его выпуска:

$$518 - 252 = 266 \text{ тыс. т.}$$

Дополнительная потребность в приросте мощностей компании **А** составит:

$$266 - 244 = 22 \text{ тыс. т.}$$

Задание 3

Определить оптимального поставщика сырья для холдинга. (*Для сокращения представления расчетов в данном задании ограничимся тремя предприятиями и четырьмя критериями.*)

Известно, что на единицу продукции холдинга необходимы поставки сырья с нормативным коэффициентом использования в готовой продукции холдинга, равным 0,85. Закупки сырья можно осуществлять у трех компаний (**П1** – «Межрегионпоставка», **П2** – «Все для стройки», **П3** – «Южстройматериал»).

Общая потребность сырья для холдинга составит:

$$518 \times 0{,}85 = 440 \text{ тыс. т.}$$

Данные о поставщиках приводятся в табл. 13.2.

Таблица 13.2

Показатель/Критерий выбора	**П1** – «Межрегионпоставка»	**П2** – «Все для стройки»	**П3** – «Южстрой–материал»
1 Предельные поставки, тыс. т в год	442	528	500
2 Время доставки сырья с момента заказа, ч	45	38	42
3 Цена, тыс. руб/т	54,5	55,5	57
4 Качество сервиса (рейтинг), 1...10	5	8	6

Определим поставщиков, которые не удовлетворяют нашим требованиям. Предельный объем поставок на год у всех поставщиков выше годовой потребности холдинга (440). По этому критерию ни один из поставщиков не может быть исключен из числа наших потенциальных контрагентов.

Остальные показатели требуют ранжирования по значимости.

Для определения ранга и веса каждого критерия проведем парные сравнения остальных показателей. Расчеты представлены в табл. 13.3.

Таблица 13.3

i/*j*	2 Время доставки сырья	3 Цена	4 Качество сервиса (рейтинг)	Сумма (ранг)	Вес
2 Время доставки сырья	0	0	0,5	0,5	1
3 Цена	1	0	0,5	1,5	3
4 Качество сервиса (рейтинг)	0,5	0,5	0	1	2

Для определения интегральной оценки поставщика проведем нормирование значений критериев к шкале [0,1]. Результаты расчетов представлены в табл. 13.4.

Таблица 13.4

Показатель	Min	Max	Фактические значения			Нормированные значения		
			П1	П2	П3	П1	П2	П3
2 Время доставки сырья с момента заказа, ч	38	45	45	38	42	0	1	0,43
3 Цена, тыс. руб/т	54,5	57	54,5	55,5	57	1	0,6	0
4 Качество сервиса (рейтинг), 1...10	5	8	5	8	6	0	1	0,33

Используя нормированные значения и вес, определим интегрированную оценку поставщика (табл. 13.5).

Таблица 13.5

Показатель	Вес	Взвешенное значение критерия		
		П1	П2	П3
2 Время доставки сырья с момента заказа, ч	1	0	1	0,43
3 Цена, тыс. руб/т	3	3	1,8	0
4 Качество сервиса (рейтинг), 1...10	2	0	2	0,67
Итого		**3**	**4,8**	**1,10**

Таким образом, холдингу рекомендуется заключить договор о поставке сырья с поставщиком П2 – «Все для стройки».

Реализация продукции холдинга производится через четыре существующих распределительных центра. Расположение и виды транспортных коммуникаций, а также расстояния между компаниями холдинга и распределительными центрами приведены на схеме (рис. 13.4).

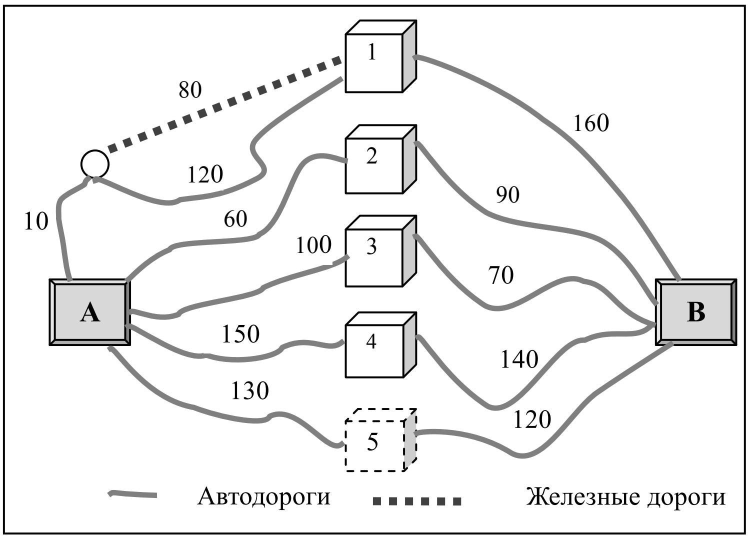


Рис. 13.4

Задание 4

Определить целесообразный вариант транспортировки продукции компании **А** в распределительный центр № 1 (автотранспортом или автотранспортом и железнодорожным транспортом) с учетом затрат на погрузку, расстояния перевозки, скидок, предоставляемых железнодорожным транспортом в 10 % при ежесуточных отгрузках в объеме свыше 0,9 тыс. т, если:

– затраты на погрузку-выгрузку на автотранспорте – $z_{\text{пвА}} = 4$ руб/т,

– затраты на погрузку-выгрузку на железнодорожном транспорте – $z_{\text{пвЖ}} = 2$ руб/т,

– тариф на перевозку автотранспортом $Т_А$ = 0,2 руб/ткм,

– тариф на перевозку железнодорожным транспортом $T_Ж$ = 0,3 руб/ткм.

Первый вариант – перевозки автотранспортом:

$$2 \times z_{пвА} + T_А \times 10 = 2 \times 4 + 0{,}2 \times (10 + 120) = 34 \text{ руб/т}.$$

Второй вариант – перевозки автотранспортом и железнодорожным транспортом:

$2 \times z_{пвА} + 2 \times z_{пвЖ} + T_А \times 10 + T_Ж \times 80 = 2 \times 4 + 2 \times 2 + 0{,}2 \times 10 + 0{,}3 \times 80$ = 38 руб/т.

Таким образом, для транспортировки выгоден первый вариант – автотранспортом, с ценой доставки 34 руб/т**.**

Определим затраты на транспортировку по остальным направлениям, результаты представлены в табл. 13.6.

Таблица 13.6

Затраты	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
A	34	20	28	38	34
B	40	26	22	36	32

Задание 5

Решить задачу оптимального закрепления распределительных центров между компаниями **А** и **В**, если мощности распределительных центров на плановый год составляют (табл. 13.7).

Таблица 13.7

Распределительные центры					
№	1	2	3	4	5
Объем	100	120	80	100	-

Суммарная мощность распределительных центров равна 400 тыс. т и превышает объем выпуска холдинга на величину

514 – 400= 118 тыс. т.

Решим задачу распределения для двух вариантов.

Первый вариант – увеличение мощности распределительного центра № 1 на 118 тыс. т.

Тогда суммарная мощность перевозки из **А** в распределительный центр № 1 будет равна

100 + 118 = 218 тыс. т.

Среднесуточный объем поставок составит: 216 / 365 = 0,6 тыс. т.

В железнодорожном тарифе скидка не предусматривается, поэтому вариант перевозки из **А** в распределительной центр № 1 автотранспортом останется без изменений.

План закрепления компаний к распределительным центрам имеет следующий вид (рис. 13.5).

Решение транспортной задачи							
		1	2	3	4	5	
		218	120	80	100	0	518
A	266	218	48	0	0	0	266
B	252	0	72	80	100	0	252
	518	218	120	80	100	0	
		7412	960	0	0	0	
		0	1872	1760	3600	0	

Рис. 13.5

Суммарные затраты составили **15604 тыс. руб.**

Суммарные затраты на транспортировку и усиление мощности центра № 1 составят:

$$15604 + 118 \times 2 = \mathbf{15840\ тыс.\ руб.}$$

Второй вариант – строительство нового распределительного центра № 5 на 118 тыс. т.

План закрепления компаний к распределительным центрам имеет следующий вид (рис. 13.6).

Решение транспортной задачи							
		1	2	3	4	5	
		100	120	80	100	118	*518*
A	266	100	120	0	0	46	*266*
B	252	0	0	80	100	72	*252*
	518	100	120	80	100	118	
		3400	2400	0	0	1564	
		0	0	1760	3600	2304	

Рис. 13.6

Суммарные затраты составили **15028 тыс. руб.**

Суммарные затраты на транспортировку и строительство центра № 5 составят:

$$15028 + 118 \times 4 = \mathbf{15500\ тыс.\ руб.}$$

Таким образом, выгоден вариант строительства нового распределительного центра № 5.

Строительство и реконструкция распределительного центра требует разработки сетевого графика выполнения работ и определения сроков начала работ для обеспечения мощностями распределительных центров на плановый год.

Задание 6

Определить сроки начала строительства распределительного центра № 5 на базе анализа сетевого графика выполнения работ (табл. 13.8).

Таблица 13.8

№ п/п	Наименование работы	Предшествующие работы	Продолжительность, нед.	Сокращение, нед.	Дополнительные расходы
1	2	3	4	5	6
1	Закупка площадей и оформление исходно-разрешительной документации (*A*)	-	1	-	56
2	Геолого-изыскательские работы (*B*)	1	2	-	65
3	Строительно-монтажные работы, закупка и монтаж оборудования (*C*)	2	16	3	25
4	Инженерные коммуникации, подъезды (*D*)	2	4	1	45
5	Приемо-сдаточные работы основных объектов (*E*)	3	2	1	55
6	Приемо-сдаточные работы инженерных коммуникаций и подъездов (*F*)	4	1	-	-
7	Приемо-сдаточные работы телекоммуникаций (*G*)	5	6	-	-
8	Разрешительная документация на начало эксплуатации (*H*)	6	1	-	-

В табл. 13.8 столбце 6 представлены дополнительные расходы на сокращение продолжительности работ на одну неделю, тыс. руб.

Построим сетевой график выполнения работ и определим ранние, поздние сроки наступления событий, резервы событий, результаты представлены на рис. 13.7. Для удобства на рисунке работы обозначены буквами от *A* (работа 1) до *H* (работа 8). Рядом с работой приводятся продолжительность, возможность сокращения.

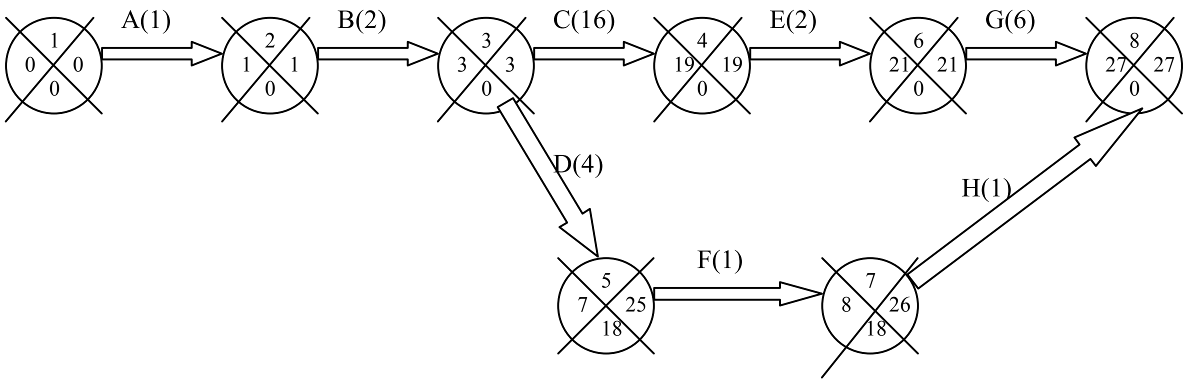


Рис. 13.7

Как видно из расчетов, продолжительность выполнения работ составит **27 недель.**

Определим раннее и позднее начало и окончание работ и полный резерв работ (табл. 13.9).

Таблица 13.9

№ п/п	Обозначение работы	Раннее начало работы	Позднее окончание работы	Продолжительность, нед.	Полный резерв работы	Возможность сокращения, нед.	Дополнительные расходы
1	*A*	0	1	1	0	-	56
2	*B*	1	3	2	0	1	65
3	*C*	3	19	16	0	1	25
4	*D*	3	7	4	18	3	45
5	*E*	19	21	2	0	1	55
6	*F*	25	26	1	18	1	-
7	*G*	21	27	6	0	-	-
8	*H*	26	27	1	0	-	-

График выполнения работ с выделенными работами без резерва представлен на рис. 13.8.

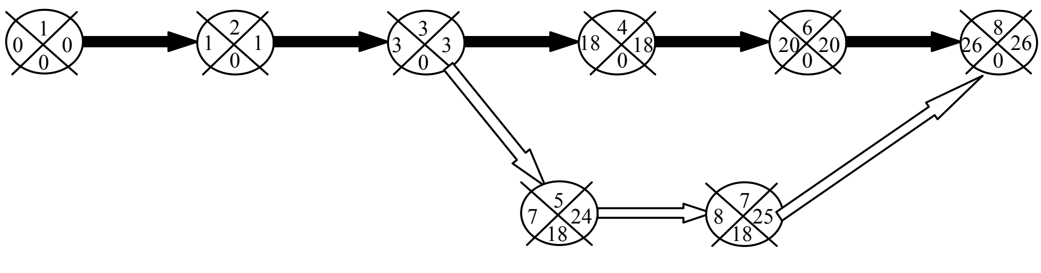


Рис. 13.8

Рассмотрим возможность сокращения общей продолжительности выполнения работ на одну неделю за счет дополнительно выделяемых средств.

Среди работ критического пути с возможностью сокращения находятся:

C с потребностью 25 тыс. руб.

D с потребностью 45 тыс. руб.

При сокращении любой их этих работ на одну неделю критический путь не меняется, поскольку остальные работы имеют резерв больший чем 1 неделя.

Следовательно, для ускорения выполнения работ рекомендуется выделить средства работе *C* – строительно-монтажные работы, закупка и монтаж оборудования.

Общая продолжительность выполнения работ по строительству распределительного центра № 5 составит 26 недель.

График начала работ и резервы представлены в табл. 13.10.

Таблица 13.10

№ п/п	Наименование работы	Начало работы	Резерв работы
1	Закупка площадей и оформление исходно-разрешительной документации (*A*)	0	0
2	Проектирование и подготовка рабочей документации (*B*)	1	0
3	Геолого-изыскательские работы (*C*)	3	0
4	Строительно-монтажные работы, закупка и монтаж оборудования (*D*)	3	17
5	Инженерные коммуникации, подъезды (*E*)	19	0
6	Приемо-сдаточные работы основных объектов (*F*)	25	17
7	Приемо-сдаточные работы инженерных коммуникаций и подъездов (*G*)	21	0
8	Разрешительная документация на начало эксплуатации (*H*)	26	0

Заключение (вариант)

В процессе выполнения работы получены навыки формализации и решения задач логистики с использованием математических моделей и методов оптимизации, а также использования стандартного программного обеспечения для решения оптимизационных задач.

Библиографический список

1 **Бауэрсокс, Д.Дж.** Логистика: интегрированная цепь поставок / Д.Дж. Бауэрсокс, Д.Дж. Клосс. – М. : Олимп-Бизнес, 2008. – 640 с.

2 **Беспалов, Р.С.** Транспортная логистика. Новейшие технологии построения эффективной системы доставки / Р.С. Беспалов. – М. : Вершина, 2007. – 384 с.

3 **Борисова, В.В.** Логистический менеджмент в межрегиональном товарообмене / В.В. Борисова. – Ростов н/Д : Изд. центр ГРЭУ «РИНХ», 2008. – 225 с.

4 **Бродецкий, Г.Л.** Моделирование логистических систем. Оптимальные решения в условиях риска / Г.Л. Бродецкий. – М. : Вершина, 2006. –376 с.

5 **Гаджинский, А.М.** Логистика : учеб. для вузов. – 16-е изд., пераб. и доп. / А.М. Гаджинский. – М. : Дашков и К, 2008. – 228 с.

6 **Григорьев, М.Н.** Управление запасами в логистике: методы, модели, информационные технологии / М.Н. Григорьев, А.П. Долгов, С.А. Уваров. – СПб. : Бизнес, 2006 – 368 с.

7 **Дыбская, В.В.** Логистика складирования для практиков / В.В. Дыбская – М. : Альфа-Пресс, 2005. – 208 с.

8 Корпоративная логистика. 300 ответов на вопросы профессионалов / под ред. В.И. Сергеева. – М. : ИНФРА-М, 2006. – 976 с.

9 **Курганов, В.М.** Логистика. Управление автомобильными перевозками: практ. опыт / В.М. Курганов. – М. : Книжный мир, 2007. – 448 с.

10 **Курганов, В.М.** Транспорт и склад в цепи поставок товаров: учеб.-практ. пособие / В.М. Курганов. – М. : Книжный мир. 2006. – 432 с.

11 **Курганов, В.М.** Логистические транспортные потоки / В.М. Курганов. – М. : Дашков и К, 2003. – 250 с.

12 **Моисеева, Н.К.** Экономические основы логистики / Н.К. Моисеева. – М. : ИНФРА-М, 2008. – 528 с.

13 **Никифоров, В.В.** Логистика. Транспорт и склад в цепи поставок / В.В. Никифоров. – М. : ГроссМедиа : РОСБУХ, 2008. – 192 с.

14 **Николайчук, В.Е.** Транспортно-складская логистика / В.Е. Николайчук. – М. : Дашков и К, 2005. – 452 с.

15 **Лебедев, Ю.Г.** Логистика. Теория гармонизированных цепей поставок. – 2-е изд., испр. и доп. / Ю.Г. Лебедев. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 448 с.

16 Логистика. Управление потоками: бизнес-энцикл. : в 2 т. / под общ. ред. К.А. Бебекина. – СПб. : Бонниер Бизнес Пресс, 2007. – 181 с.

17 Логистика : учебник / под ред. проф. Б.А. Аникина. – М. : ИНФРА-М, 2008. – 368 с.

18 **Горячева, Н.А.** Логистикоориентированный риск-менеджмент корпоративных финансов железнодорожного транспорта : монография / Н.А. Горячева, Э.А. Мамаев, С.Г. Шагинян. – Ростов н/Д : РГУПС, 2007. – 155 с.

19 **Мамаев, Э.А.** Управление региональными транспортными системами в условиях изменений: проблемы и модели / Э.А. Мамаев. – Ростов н/Д : РГУПС, 2005. – 195 с.

20 **Мамаев, Э.А.** Практикум по логистике : учеб.-методич. пособие / Э.А. Мамаев. – Ростов н/Д : РГУПС, 2009. – 74 с.

21 **Мамаев, Э.А.** Динамическое программирование : методические указания / Э.А. Мамаев, А.И. Филоненков, Т.В. Кречет. – Ростов н/Д : РГУПС, 1998. – 19 с.

22 **Мамаев, Э.А.** Моделирование финансовых процессов : методические указания / Э.А. Мамаев, Б.А. Мамаева. – Ростов н/Д : РГУПС, 2004. – 31 с.

23 **Миротин, Л.Б.** Современный инструментарий логистического управления / Л.Б. Миротин. – М. : Экзамен, 2005. – 496 с.

24 Модели и методы теории логистики : учеб. пособие – 2-е изд / ред. В.С. Лукинский. – СПб. : Питер, 2008. – 448 с.

25 Основы логистики / под ред. В.В. Щербакова. – СПб. : Питер, 2009. – 432 с.

26 Практикум по логистике : учеб. пособие. – 2-е изд. / под ред. Б.А. Аникина. – М. : ИНФРА-М, 2006. – 276 с.

27 Прогнозирование экономических показателей : методические указания / Э.А. Мамаев [и др.]. – Ростов н/Д : РГУПС, 1999. – 25 с.

28 **Просветов, Г.И.** Математические методы в логистике: задачи и решения : учеб.-методич. пособие / Г.И. Просветов. – М. : Альфа-Пресс, 2008. – 304 с.

29 **Родников, А.Н.** Логистика: терминологический словарь / А.Н. Родников. – М. : ИНФРА-М, 2005. – 350 с.

30 **Рыжиков, Ю.И.** Теория очередей и управление запасами / Ю.И. Рыжиков. – СПб : Питер, 2001. – 384 с.

31 **Саркисов, С.В.** Управление логистическими цепями поставок / С.В. Саркисов. – М. : Дело, 2006. – 368 с.

32 **Сковронек, Ч.** Логистика на предприятии : учеб.-методич. пособие : пер. с польск. / Ч. Сковронек, З. Сариуш-Вольский. – М. : Финансы и статистика, 2004. – 400 с.

33 **Смехов, А.А.** Основы транспортной логистики : учебник для вузов / А.А. Смехов, Е.Б. Васюкевич. – М. : Транспорт, 1995. – 197 с.

34 **Сток, Дж.Р.** Стратегическое управление логистикой / Дж.Р. Сток. – М. : ИНФРА-М, 2005. – 797 с.

35 **Стерлигова, А.Н.** Управление запасами в цепях поставок : учебник / А.Н. Стерлигова. – М. : ИНФРА-М, 2008. – 430 с.

36 **Уотерс, Д.** Логистика. Управление целью поставок / Д. Уотерс. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 503 с.

37 Управление цепями поставок : справочник изд-ва Gower / под ред. Дж. Готторны . – М. : ИНФРА-М, 2008. – 670 с.

38 **Таха, Х.А.** Введение в исследование операций / Х.А. Таха. – М. : Вильямс, 2001. – 912 с.

39 **Шрайбфедер, Дж.** Эффективное управление запасами / Дж. Шрайбфедер : пер. с англ. – 2-е изд. – М. : Альпина Бизнес Букс, 2006. – 304 с.

Учебное издание

Мамаев Энвер Агапашаевич
Порицкий Игорь Александрович
Годованый Кирилл Александрович

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЛОГИСТИКЕ

Редактор Т.В. Бродская
Корректор Т.В. Бродская

Подписано в печать 30.12.16. Формат 60×84 /16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 7,9.
Тираж экз. Изд. № 105. Заказ

Редакционно-издательский центр ФГБОУ ВО РГУПС.

Адрес университета:
344038, г. Ростов н/Д, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, 2.

ISBN 978-5-88814-483-1
9 785888 144831