

РОСЖЕЛДОР
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»
(ФГБОУ ВО РГУПС)

И.Р. Кирищева

ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы

Ростов-на-Дону
2017

ББК 65.2/4я7 + 06

Рецензент – доктор экономических наук, профессор М.М. Скорев

Кирищиева, И.Р.

Основы финансовых вычислений: учебно-методическое пособие для самостоятельной работы / И.Р. Кирищиева; ФГБОУ ВО РГУПС. – Ростов н/Д, 2017. – 30 с.

Учебно-методическое пособие содержит методические указания и задачи по расчету простых и сложных процентов эквивалентности ставок и потоков платежей, может быть использовано для самостоятельной работы обучающихся.

Предназначено для студентов различных специальностей и направлений подготовки бакалавриата и специалитета, а также магистратуры и аспирантуры, для формирования компетенций в соответствии с видами профессиональной деятельности, способствующих решению профессиональных задач.

Одобрено к изданию кафедрой «Экономика, учет и анализ».

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| 1. Введение в основы финансовых вычислений | 4 |
| 1.1. Методические указания..... | 4 |
| 1.2. Задачи для самостоятельного решения..... | 5 |
| 2. Начисление процентов по простым ставкам | 6 |
| 2.1. Методические указания..... | 6 |
| 2.2. Задачи для самостоятельного решения..... | 9 |
| 3. Начисление процентов по сложным ставкам | 17 |
| 3.1. Методические указания..... | 17 |
| 3.2. Задачи для самостоятельного решения..... | 20 |
| 4. Эквивалентность ставок. Потоки платежей | 26 |
| 4.1. Методические указания..... | 26 |
| 4.2. Задачи для самостоятельного решения..... | 26 |
| Библиографический список | 29 |

1 Введение в основы финансовых вычислений

1.1. Методические указания

Любая финансово-кредитная операция, инвестиционный проект или коммерческое соглашение предполагают наличие ряда условий их выполнения, с которыми согласны участвующие стороны. К таким условиям относятся следующие количественные данные: денежные суммы, временные параметры, процентные ставки и некоторые другие дополнительные величины. Следовательно, кредитная операция с количественной стороны характеризуется следующими временными параметрами и денежными величинами:

T_v – дата выдачи ссуды;

n – срок ссуды в годах;

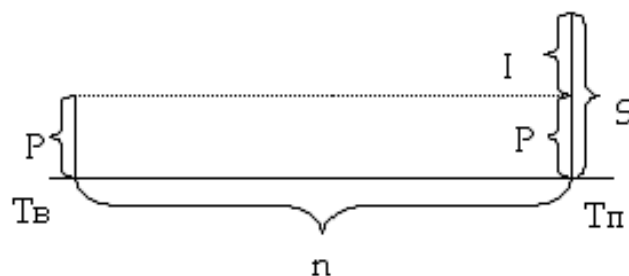
T_n – дата погашения ссуды;

P – первоначальная сумма или величина выданной ссуды;

I – плата за ссуду, процент, процентные деньги, процентный доход или абсолютное приращение начального капитала P ;

S – наращенная сумма или полная стоимость кредита: $S=P+I$

Эту формулу иллюстрирует следующий рисунок.



Основными показателями, характеризующими кредитную операцию являются следующие.

Первый показатель имеет несколько названий – ставка процента, эффективность вложений, интерес – это отношение приращения I ссуженной суммы за срок n к первоначальной сумме P :

$$i = \frac{I}{Pn} = \frac{S - P}{Pn}.$$

Второй показатель – учетная ставка, относительная скидка, дисконт – это отношение приращения I ссуженной суммы за срок n к наращенной сумме S :

$$d = \frac{I}{Sn} = \frac{S - P}{Sn}.$$

1.2. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Проверить, что между величинами i и d , P и S существуют следующие пары отношений при $n = 1$

$$S = P(1 + i)$$

$$P = S(1 - d)$$

$$i = \frac{d}{1 - d}$$

$$d = \frac{i}{1 + i}$$

Задача 2

Фирма приобрела в банке вексель, по которому через год должна получить 36 млн руб. (номинальная стоимость векселя). В момент приобретения цена векселя составила 30 млн руб. Определить все показатели кредитной операции.

Задача 3

Коммерческий банк приобрел на 20 млн руб. государственных краткосрочных облигаций (ГКО) со сроком погашения через 6 месяцев. Банк рассчитывает получить по облигациям 25 млн. руб. Определить показатели кредитной операции при покупке ГКО.

2 Начисление процентов по простым ставкам

2.1. Методические указания

Сущность простых процентов заключается в том, что они начисляются на одну и ту же величину капитала в течение всего срока ссуды.

Формула определения наращенной суммы с использованием простых процентных ставок имеет вид:

$$S = P(1 + in),$$

где S – наращенная сумма;
 P – первоначальная сумма, ден. ед.;
 i – ставка процентов, 1/ед. вр.;
 n – срок ссуды, ед. вр.;
 $(1+in)$ – коэффициент наращения.

При использовании простых процентов, когда срок финансовой сделки не равен целому числу лет, периоды начисления процентов выражают дробным числом, т. е. как отношение числа дней функционирования сделки к числу дней в году:

$$n = \frac{t}{K},$$

где t – число дней функционирования сделки (число дней, на которое предоставлен кредит);

K – временная база (число дней в году).

В этом случае формула определения наращенной суммы примет вид:

$$S = P\left(1 + \frac{t}{K} \cdot i\right).$$

Применяется три семьи начисления процентов:

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды. При этом методе определяется фактическое число дней (t) между двумя датами (датой получения и погашения кредита), продолжительность года принимается равной $K = 365$ дней, если год не високосный и $K = 366$ дней, если год високосный.

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды, величина t рассчитывается как и в предыдущем случае, а $K=360$ дней.

3. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды, величина t определяется количеством месяцев по 30 дней в каждом, начиная с момента выдачи ссуды и до момента ее погашения, и точным числом дней ссуды в неполном месяце. Продолжительность года $K=360$ дней.

Во всех схемах день выдачи и день погашения ссуды принимается как один день.

В течение срока действия кредитного договора может устанавливаться переменная ставка. Пусть за период договора n происходили изменения годовой процентной ставки m раз в моменты

$$t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m.$$

В общем виде формула при использовании переменных процентных ставок имеет вид:

$$S = P(1 + \sum_{t=1}^m n_t i_t),$$

где i_t – ставка простых процентов в периоде t ;
 n_t – продолжительность начисления ставки i_t ;
 m – число периодов начисления процентов;
 $(1 + \sum_{t=1}^m n_t i_t)$ – коэффициент наращения на всем интервале n .

Расчет наращенной суммы при использовании простых учетных ставок осуществляется по формуле:

$$S = \frac{P}{1 - n \cdot d},$$

где P – капитал, предоставляемый в кредит;
 n – продолжительность кредита в годах;
 d – учетная ставка, выраженная десятичной дробью;
 $\frac{1}{1 - n \cdot d}$ – коэффициент (множитель) наращения.

Если срок ссуды задан в днях, формула наращенной суммы на основе простых учетных ставок будет иметь вид:

$$S = P \cdot \frac{1}{1 - \frac{t}{K} \cdot d}.$$

В случае использования переменной учетной ставки формула наращенной суммы принимает вид

$$S = \frac{P}{1 - \sum_{k=1}^m n_k d_k}.$$

Процесс, обратный наращению, в котором заданы ожидаемая в будущем к получению (возвращаемая) сумма и ставка называется дисконтированием.

Различают математическое и банковское дисконтирование.

При математическом дисконтировании решается задача, обратная определению наращенной суммы по простой процентной ставке.

Приведенная сумма определяется по формуле:

$$P = \frac{S}{1 + n \cdot i} = S \cdot \frac{1}{1 + n \cdot i},$$

где $\frac{1}{1 + n \cdot i}$ – дисконтный множитель.

Разность $S - P$ называется дисконтом суммы S и обозначается D .

Дисконтирование, осуществляемое по учетной ставке, называется банковским дисконтированием.

При банковском дисконтировании дисконтированная величина определяется по формуле

$$P = S(1 - n \cdot d),$$

где P – дисконтированная величина;

S – наращенная сумма долга;

d – учетная (дисконтная) ставка, выраженная в десятичных дробях;

n – временной интервал от момента учета финансового инструмента до даты уплаты по нему в годах.

Под средним уровнем инфляции за какой-то период времени понимается:

$$\alpha\% = \frac{\Delta A}{A} 100\%.$$

В расчетах обычно используют относительную величину уровня инфляции – темп инфляции:

$$\alpha = \frac{\alpha\%}{100\%} = \frac{\Delta A}{A}.$$

Индекс инфляции $I_{II} = \frac{A_t}{A}$; так как $A_t = A + \Delta A$, то

$$I_{II} = 1 + \alpha.$$

Рассмотрим случаи начисления процентов с учетом инфляции. Для простых процентных ставок получаем, когда срок ссуды задан в годах

$$S_{\alpha} = P(1 + ni_{\alpha})$$

В то же время должно выполняться равенство: $S_{\alpha} = P(1 + n \cdot i)I_{II}$

Если срок кредита, или депозита, составляет t дней при годовой процентной ставке i и годовом уровне инфляции α , то величина наращенной суммы:

$$S = P(1 + \frac{t}{K}i);$$

$$S_{\alpha} = P(1 + \frac{t}{K}i)(1 + \frac{t}{K}\alpha)$$

Погашенная сумма в условиях инфляции будет определяться выражением. $S_{\alpha} = S \cdot I_{II}$.

Подставляя формулу наращенной суммы в эту формулу, получаем

$$S_{\alpha} = \frac{P \times I_{II}}{1 - nd} = \frac{P \times I_{II}}{1 - \frac{t}{K}d}$$

С другой стороны, величину S_{α} в соответствии с формулой наращенной суммы можно представить в виде

$$S_{\alpha} = \frac{P}{1 - n \cdot d_{\alpha}},$$

где d_{α} – учетная ставка, компенсирующая потери от инфляции.

2.2. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Кредит выдан на сумму 3,5 тыс. руб. на срок 1 год под процентную ставку 6%. Какая сумма будет возвращена через год.

Задача 2

Вкладчик вложил в банк 15 тыс. руб. под 5 % на 9 месяцев. Какой доход он получит?

Задача 3

Фирма получила ссуду в банке в размере 8 млн руб. Сроком на полгода. Сумма погашения составляет 10 млн руб. Определить процентную ставку, применяемую банком.

Задача 4

Фирма планирует получение кредита в сумме 10 млн руб. Банк предоставляет кредит под 20 % годовых. На какой срок фирма может взять кредит с тем, чтобы подлежащая возврату сумма не превысила 15 млн руб.?

Задача 5

На сколько лет должен быть вложен капитал при 6 % годовых, чтобы процентный платеж был равен тройной сумме капитала.

Задача 6

За какое время капитал величиной 45 тыс. руб. вложенной под 2 % годовых, увеличится на такую же величину, как и капитал 60 тыс. руб. вложенный на полгода под 6 % годовых.

Задача 7

Между двумя капиталами разница 300 тыс. руб. Капитал большего размера вложен на 6 месяцев при ставке 5 %, а капитал меньшего размера – на 3 месяца при ставке 6 %. Процентный платеж за первый капитал равен двойному процентному платежу за второй капитал. Найти величину капиталов.

Задача 8

Ссуда в размере 50 тыс. руб. выдана на 2 года под 8 % годовых. Определить проценты по этой операции и наращенную сумму долга.

Задача 9

Ссуда в размере 45 тыс. руб. выдана на 2 года под 8 % годовых. Определить проценты по этой операции и наращенную сумму долга.

Задача 10

На какой срок фирма может взять кредит в 15 тыс. руб. под 8 % годовых, чтобы сумма возврата не превышала 20 тыс. руб.

Задача 11

Банк выдал своему клиенту ссуду в размере 4 млн руб. сроком на два года по ставке простых процентов, равной 15 % годовых. Определить проценты и сумму накопленного долга (наращенную сумму).

Задача 12

На какой срок фирма может взять кредит в банке в размере 2 млн руб. с условием, чтобы сумма возврата долга не превышала 2,7 млн руб., если банк

применит ставку 19 % годовых. Расчет произвести в днях при а) $K=360$; б) $K=365$.

Задача 13

Капитал величиной 1000 руб. вложен в банк на 120 дней под 6 %. Найти какова будет величина капитала через 120 дней по обыкновенным и точным процентам.

Задача 14

Капитал величиной 2 тыс. руб. вложен в банк с 6.06. по 17.08 под 5 % годовых. Найти величину капитала на 17.08 используя обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды.

Задача 15

Кредит в размере 10 тыс. руб. выдан 2 марта по 11 декабря под 18 % годовых, год високосный. Определить размер наращенной суммы для различных вариантов расчета процентов.

Задача 16

Фирме необходим кредит в сумме 5 млн руб. Банк согласен на выдачу кредита на 3 месяца с возвратом в размере 6 млн руб. при расчете использовалась учетная ставка. Определить ее уровень.

Задача 17

Кредит выдан на 190 дней с условием возврата 3 млн руб. и учетной ставкой 20 %. Определить сумму, полученную дебитором временной базе $K=360$ дней.

Задача 18

Клиент обратился в банк за кредитом в сумме 8 млн руб. на срок 270 дней. Банк согласен предоставить кредит на следующих условиях: проценты (20 % годовых) должны быть начислены и выплачены из суммы предоставляемого кредита в момент его выдачи. Определить сумму полученного кредита и сумму, подлежащую уплате по истечении срока кредита на основе простой процентной ставке. Проценты обыкновенны если бы кредит выдавался по простой процентной ставке такого же уровня.

Задача 19

Вкладчик вложил в банк 15000 руб под 5% на 8 месяцев. Какой доход он получит?

Задача 20

Ссуда в размере 500 тыс. руб. выдана на срок 90 дней под 12 % годовых (проценты простые). Определить доход кредитора и проверить ее расчет по формуле простых процентов.

Задача 21

25 мая открыт сберегательный счет в сумме 200 тыс. руб. под процентную ставку 8 % годовых. 7 июля на счет было дополнительно внесено 50 тыс. руб. 10 ноября со счета была снята сумма 80 тыс. руб., а 1 декабря счет был закрыт. Определить общую сумму, полученную вкладчиком при закрытии счета. На основе обыкновенных процентов с приближенным числом дней ссуды.

Задача 22

За какое время капитал 50 тыс. руб., вложенный под 6 % годовых (проценты обыкновенные $K=360$), увеличится на такую же величину, как и капитал 70 тыс. руб., вложенный с 10.03 по 25.05 под 7 % (проценты точные $K=365$).

Задача 23

Известно, что разность между капиталом, помещенным в банк на 270 дней под 20 % годовых и суммой полученных процентов составляет: $P-I=4,25$ млн руб. Определить величину капитала, помещенного в банк, и сумму процентных платежей (проценты обычные «расчет меньше ста»).

Задача 24

В банк был помещен капитал под 20% годовых. По истечении 270 дней его величина составила 5,75 млн руб. Определить величину помещенного в банк капитала и сумму начисленных процентов (проценты обычные «расчет свыше ста»).

Задача 25

Заемщик получил кредит на 6 месяцев под 8 % годовых с условием вернуть 3 млн руб. Какую сумму получил заемщик в момент заключения договора и чему равен дисконт?

Задача 26

Какую сумму инвестор должен внести сегодня под простые проценты по ставке 5 % годовых, чтобы накопить 200 тыс. руб. а) за полгода; б) за два года; в) за пять лет? (проценты обыкновенные)

Задача 27

Через 1 год владелец векселя, выданного коммерческим банком, должен получить по нему 220 тыс. руб. Какая сумма была внесена в банк в момент приобретения векселя, если доходность векселя должна составить 12 % годовых?

Задача 28

Владелец векселя номинальной стоимостью 220 тыс. руб. и сроком обращения 1 год предъявил его банку – эмитенту для учета за 90 дней до даты

погашения. Банк его по ставке а) 12 %, б) 13 %. Определить дисконтированную величину, т. е. сумму, полученную владельцем векселя (P') и величину дисконта (D').

Задача 29

Вексель номинальной стоимостью 500 тыс. руб. был учтен в банке за 90 дней до срока погашения по ставке 16 % (учетной процентной). Определить дисконтированную величину векселя и величину дисконта двумя способами, используя банковское и математическое дисконтирование. Сравнить результаты.

Задача 30

Вексель номинальной стоимостью 5 млн руб. учтен за 15 дней до срока погашения по учетной ставке 18 % годовых. Определить дисконт и дисконтированную величину. Проверить расчет.

Задача 31

Вексель был учтен за 15 дней до срока погашения по ставке 18 % годовых. В результате учета владелец векселя получил 4,9625 млн руб. Определить номинальную стоимость векселя.

Задача 32

Фирма получила в банке ссуду, под обеспечение которой выдала вексель номинальной стоимостью 2 млн руб. Со сроком погашения 1.04. В день погашения векселя фирма обратилась в банк с просьбой об изменении порядка погашения долга. Банк дал согласие на следующих условиях: фирма выдает два векселя: первый на сумму 200 тыс. руб. со сроком погашения 8.06, второй – на сумму 400 тыс. руб. со сроком погашения 18.06. Одновременно должны быть выданы еще два векселя со сроком погашения 1.05 и 17.05. определить номинальную стоимость этих двух векселей, если все векселя выданы под 12 % годовых.

Задача 33

Фирма планирует получение кредита в сумме 10 млн руб. Банк предоставляет кредит под 12 % годовых. На какой срок фирма может взять кредит с тем, чтобы подлежащая возврату сумма не превысила 15 млн руб.?

Задача 34

На какой срок фирма может взять кредит в банке в размере 2 млн руб. с условием, чтобы сумма возврата долга не превысила 2,7 млн руб., если банк применит ставку 19 % годовых, при $K=365$ дней. Расчет произвести в днях.

Задача 35

Фирма получила ссуду в банке в размере 8 млн руб. сроком на полгода; сумма погашения составляет 10 млн руб. Определить процентную ставку, примененную банком.

Задача 36

Фирме необходим кредит в сумме 5 млн руб. Банк согласен на выдачу кредита при условии, что он будет возвращен через 90 дней в размере 6 млн руб. При расчете использовалась учетная ставка. Определить ее уровень.

Задача 37

Определить срок ссуды в годах, за который долг, равный 10 тыс. руб. возрастет до 11 тыс. руб., при простой ставке процентов 8 % годовых.

Задача 38

Определить по точным процентам ($K=365$) срок ссуды в днях, за который долг, равный 20 тыс. руб., возрастет до 21 тыс. руб., при ставке процентов 7 % годовых:

Задача 39

Контракт на выдачу ссуды предусматривает погашение долга в сумме 20500 руб. через 100 дней. Первоначальная сумма долга равна 20 тыс. руб. Определить ставку процентов. Год не високосный.

Задача 40

Ссуда в размере 10 тыс. руб. выдается по учетной ставке 8%. Определить срок ссуды в годах, если заемщик хочет получить 9,5 тыс. руб.

Задача 41

При выдаче ссуды в размере 15 тыс. руб. по учетной ставке 10% заемщику выдано 14 тыс. руб. Определить срок ссуды в днях по обыкновенным процентам ($K=360$).

Задача 42

Рассчитать учетную ставку которая обеспечивает доход в 6 тыс. руб., если сумма в 10 тыс. руб. выдается в ссуду на полгода.

Задача 43

Индекс инфляции за год равен 8,2. Определите уровень инфляции.

Задача 44

Фирма договорилась с банком о выделении кредита в 60 млн руб. на год под 10-процентную ставку простых процентов без учета инфляции. Ожидаемый годовой уровень инфляции 8 %. Определите процентную ставку с учетом инфляции, коэффициент наращения и дисконт банка.

Задача 45

Коммерческий банк принимает вклады населения на депозиты сроком на 90 дней, обещая доход 12 % годовых. Годовой уровень инфляции 15%. Определите процентную ставку банка с учетом инфляции, коэффициент наращивания. Принять $K = 365$.

Задача 46

Клиент оформляет вклад на срочный депозит сроком на 1 месяц в коммерческом банке. Процентная ставка банка 12 % годовых. Годовой уровень инфляции 10 %. Определите реальную годовую процентную ставку прибыли, по которой оформлен вклад.

Задача 47

Клиент внес в коммерческий банк 3 млн руб. под простые проценты «до востребования» с 1 февраля до 1 августа. Месячные уровни инфляции за этот период составили: февраль – 10 %, март – 12 %, апрель – 11%, май – 13 %, июнь – 9 %, июль – 8 %. Какой годовой процент должен дать банк, чтобы обеспечить уровень доходности 15 простых процентов в год? Какова при этом наращенная сумма за рассматриваемый период?

Задача 48

По оценкам уровень инфляции за год составит 8%. Определить ожидаемый индекс инфляции.

Задача 49

Ожидается, что цены за год вырастут в 5 раз. Определить ожидаемый годовой уровень инфляции.

Задача 50

Ссуда в размере 10 тыс. руб. выдана в начале года с погашением в конце года. Требуемая реальная доходность операции составляет 7% годовых, ожидаемый годовой уровень инфляции составляет 14%. Определить: а) множитель наращивания с поправкой на инфляцию; б) простую ставку процентов, учитывающую инфляцию; в) погашенную сумму с учетом инфляции.

Задача 51

Ссуда в размере 20 тыс. руб. выдана 12.03 до 25.12 включительно под 7% годовых, год високосный. При годовом уровне инфляции 40% определить: а) множитель наращивания с поправкой на инфляцию; б) простую ставку процентов, учитывающую инфляцию; в) погашенную сумму с учетом инфляции.

Задача 52

Среднемесячные темпы инфляции за год составляет не менее 20% . Определить в этих условиях ставку процентов при выдаче ссуды с учетом

инфляции и погашаемую сумму для ссуды в размере 10 тыс. руб., выдаваемой на три месяца при требуемой реальной доходности операции 8% годовых.

Задача 53

Ссуда в 10 тыс. руб. выдана на 1,5 года. Прогнозируемый годовой уровень инфляции в течение этого срока оценивается в 10%. Определить ставку процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции и погашаемую сумму, если требуемая реальная доходность операции составляет 8% годовых.

Задача 54

Ссуда в размере 20 тыс. руб. выдана на 200 дней. Реальная доходность операции по простой ставке процентов составляет 6% годовых. Ожидается, что значение индекса инфляции за срок ссуды составит 2,5. Определить множитель наращения, ставку процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции и погашаемую сумму по точным процентам ($K=365$).

Задача 55

При выдаче ссуды должна быть обеспечена реальная доходность операции, определяемая учетной ставкой 8% годовых. Ссуда выдается на полгода, за которые предполагаемый индекс инфляции составит 1,5. определить значение учетной ставки, компенсирующей потери от инфляции.

Задача 56

Ссуда выдается 12.03 по простой учетной ставке, равной 7%. Заемщик должен 25.12 вернуть 20 тыс. руб. определить при годовом уровне инфляции 4% для точного числа дней ссуды и точным процентам для високосного года ($K=366$): а) учетную ставку, компенсирующую потери от инфляции; б) выдаваемую сумму.

3. Начисление процентов по сложным ставкам

3.1. Методические указания

Сложные проценты характеризуются тем, что база для начисления процентов меняется от одного расчетного периода к другому. Сумма начисленных процентов в каждом периоде добавляется к капиталу предыдущего периода, а начисление процентов в последующем периоде производится на эту, уже наращенную величину первоначального капитала. Присоединение начисленных процентов к их базовой сумме называется капитализацией процентов.

Рассчитаем наращенную за n лет сумму S при начислении сложных процентов по процентной ставке i , выраженной десятичной дробью.

Наращенная сумма будет равна:

$$S_n = P(1 + i)^n,$$

где S – наращенная сумма;

P – первоначальная сумма, ден. ед.;

i – ставка сложных процентов, 1/ед. вр.;

n – срок ссуды в годах, ед. вр.

$(1+i)^n$ – коэффициентом наращения сложных процентов.

В некоторых случаях в договоре предусматривается изменяющиеся от одного периода начисления к следующему, но заранее оговоренные процентные ставки. Если i_1, i_2, \dots, i_k – последовательные значения договорных процентных ставок, а n_1, n_2, \dots, n_k – продолжительность начисления по соответствующим ставкам, то наращенная сумма может быть определена по формуле:

$$S = P(1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} \dots (1 + i_k)^{n_k},$$

где i_1, i_2, \dots, i_k – последовательные значения ставок процентов;

n_1, n_2, \dots, n_k – периоды, в течение которых используются соответствующие ставки.

В общем виде наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = P \cdot \prod_{t=1}^K (1 + i_t)^{n_t}.$$

В контрактах на получение кредитов, в депозитных договорах условиями часто предусматривается капитализация процентов несколько раз в году – по полугодиям, кварталам, иногда ежемесячно. На практике же указывается не квартальная или месячная процентная ставка, а годовая ставка, которая называется номинальной.

При этом учитывается число периодов (m) начисления процентов в году. Тогда для начисления процентов m раз в году используется формула:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm}$$

где j – номинальная годовая процентная ставка;
 m – число периодов начисления процентов в году;
 n – число лет;
 $n \cdot m$ – число периодов начисления процентов за весь срок контракта.
 С ростом частоты m начислений в году коэффициент наращивания и, следовательно, абсолютный годовой доход растет.

Формула наращенной суммы при использовании учетной ставки может быть записана в виде:

$$S = P \frac{1}{(1-d)^n},$$

где $\frac{1}{(1-d)^n}$ – коэффициент наращивания;
 d – учетная ставка сложных процентов;
 n – число лет.

При использовании переменных учетных ставок наращенная сумма равна

$$S = \frac{P}{\prod_{t=1}^n (1-d_t)^{n_t}}$$

Начисление сложных процентов, как было указано выше, может осуществляться не один, а несколько раз в году. В этом случае оговаривается номинальная учетная ставка f – годовая учетная ставка, по которой определяется величина учетной ставки, применяемой на каждом интервале начисления.

При начислении процентов несколько раз в год (m раз), если срок ссуды составляет n лет, то получаем выражение для определения наращенной суммы по учетной ставке:

$$S = P \frac{1}{\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{m \cdot n}},$$

где f – номинальная учетная ставка;

m – число периодов начисления процентов в течение года;
 n – число лет;
 $m \cdot n$ – общее число интервалов начисления за весь срок ссуды.

Часто бывает необходимо знать, какую сумму P нужно вложить под фиксированную ставку сложных процентов сегодня, чтобы через определенный срок n лет получить желаемую сумму S . Процесс вычисления неизвестного P по известному S называется дисконтированием.

Дисконтирование с использованием сложной процентной ставки называется математическим дисконтированием. Найдем значение P :

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S \frac{1}{(1+i)^n} = S(1+i)^{-n},$$

где $\frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$ – дисконтный множитель.

При начислении процентов m раз в году получим:

$$P = S \frac{1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}} = S \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n},$$

где $\frac{1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}$ – дисконтный множитель.

В банковском дисконтировании применяется сложная учетная ставка:

$$S = P \frac{1}{(1-d)^n}.$$

В этом случае дисконтирование осуществляется по формуле:

$$P' = S(1-d_c)^n,$$

где d_c – сложная годовая учетная ставка.

Дисконт вычисляется как разность:

$$D' = S - P' = S - S(1-d_c)^n = S[1 - (1-d_c)^n].$$

При дисконтировании m раз в году используется номинальная учетная ставка. Расчет дисконтированной величины производится по формуле:

$$P' = S \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{nm}.$$

С учетом инфляции наращенная сумма:

$$S = P(1+i)^n (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_n)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – годовые уровни инфляции за первый год, второй и т.д.

С другой стороны

$$S = P(1 + i_\alpha)^n$$

где i_α – ставка сложных процентов с учетом инфляции.

Коэффициент наращенная:

$$K_H = (1 + i)^n (1 + \alpha)^n = (1 + i_\alpha)^n$$

Если сложные проценты начисляются m раз в году и n лет по номинальной ставке сложных процентов j , то наращенная сумма с учетом инфляции равна:

$$S_\alpha = P \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} (1 + \alpha)^n = P \left(1 + \frac{j_\alpha}{m}\right)^{nm},$$

Коэффициент наращенная:

$$K_H = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} (1 + \alpha)^n,$$

α – годовой уровень инфляции.

Наращенная сумма по сложным учетным ставкам, учитывающая инфляцию:

$$S = P \frac{1}{(1 - d_\alpha)^n}$$

3.2. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Сравнить множители наращенная простых и сложных процентов при $i_n = i_c = 15\%$. Для сроков сделки 30 дней, 180 дней, 1, 5, 10, 20 лет. Как влияет срок финансовой сделки на величину множителя наращенная (наращенную сумму).

Задача 2

Вкладчик внес в банк 500 тыс. руб. под 40 % годовых. Определить наращенную сумму через 4 года по простым и сложным процентам.

Задача 3

В течение четырех лет клиент вкладывает в банк по 1 тыс. руб. под 50% годовых. Рассчитывать наращенную сумму двумя способами: 1) деньги вкладываются в конце каждого года; 2) деньги вкладываются в начале каждого года. Расчет произвести по общей и окончательной формуле.

Задача 4

Процентная ставка по ссуде составляет 30% плюс маржа (доплата за накладные расходы, комиссионные) 2% в квартал в первый год и 40% плюс маржа 3% за полугодие во второй год. Определить коэффициент наращивания за два года:

Задача 5

Банк взимает за выданную сроком на 5 лет ссуду в сумме 10 млн руб. 40% годовых по сложной ставке. Однако с учетом большого срока ссуды он, начиная со второго года, устанавливает премию, которая возрастает за каждый последующий год на 5%. Определить сумму, возвращаемую банку.

Задача 6

Банк выдает кредит в сумме 10 млн руб. сроком на 5 лет под годовую процентную ставку 50%. Определить возвращаемую сумму через 5 лет при ежегодном и ежеквартальном начислении процентов, а также дополнительный доход банка в зависимости от способа начисления процентов.

Задача 7

Депозит на сумму 10 млн руб. оформлен на срок 27 месяцев ($2,25=n$) под 50% годовых. Определить сумму денег, которую будет иметь клиент по окончании срока действия депозита при ежегодном, ежеквартальном и ежемесячном начислении процентов.

Задача 8

За какой срок (в годах) сумма 10 тыс. руб. увеличится до 15 тыс. руб., если на нее будут начисляться сложные проценты по ставке 8% годовых?

Задача 9

Какова должна быть ставка процентов для того, чтобы сумма долга удвоилась за 5 лет?

Задача 3

За какой срок (в годах) сумма 10 тыс. руб. увеличится до 15 тыс. руб., если на нее будут начисляться сложные проценты по ставке 8% годовых ежеквартально?

Задача 10

Какова должна быть ставка процентов, чтобы сумма долга удвоилась за 5 лет, если проценты начисляются по полугодиям.

Задача 11

Депозит в размере 500 тыс. руб. внесен в банк на 3 года, под 10% годовых (сложные проценты), начисление процентов производится: а) ежеквартально, б) ежемесячно. Определить наращенную сумму.

Задача 12

10 млн руб. инвестированы на 2 года по ставке 120% годовых. Найти наращенную за это время сумму и ее приращение при начислении: а) ежегодно, б) по полугодиям, в) ежеквартально, г) ежемесячно.

Задача 13

На сумму 600 тыс. руб. ежеквартально по ставке 12% годовых начисляются сложные проценты в течение 14 месяцев. Определить величину наращенной суммы двумя методами: 1) по формуле сложных процентов; 2) смешанным методом.

Задача 14

Определить эффективную ставку сложных процентов с тем, чтобы получить такую же наращенную сумму, как и при использовании номинальной ставки $j=18\%$, при ежеквартальном начислении процентов ($m=4$).

Задача 15

Срочный вклад в размере 800 тыс. руб. положен в банк на 2,5 года. По условиям договора начисление процентов производится по сложной учетной ставке $d=15\%$ годовых. Определить наращенную сумму на основе сложных антисипативных и сравнить с наращенной суммой на основе декурсивных процентов при $i=15\%$.

Задача 16

В условиях предыдущей задачи предположить, что наращение по учетной ставке производится не один, а два раза в год ($m=2$). Определить наращенную сумму.

Задача 17

На некоторую сумму P в течение 5 лет начисляются сложные проценты на основе учетной ставки 25% годовых. Определить коэффициент наращения: 1) если проценты начисляются за весь период; 2) если проценты начисляются 4 раза в год; 3) если проценты начисляются ежемесячно.

Задача 18

Первоначальная сумма долга 25 млн руб. Определить величину наращенной суммы через 3 года при применении декурсивного и антисипативного способов начисления процентов. Годовая ставка – 80%.

Задача 19

Определить современное значение суммы в 120 тыс. руб., которая будет выплачена через 2 года, при использовании сложной учетной ставки 60% годовых:

Задача 20

Определить современную величину 20,0 млн руб., которые должны быть выплачены через 4 года. В течение этого периода на первоначальную сумму начислялись сложные проценты по ставке 8% годовых. Определить также современную величину 20 млн руб., если начисление процентов производилось ежеквартально.

Задача 21

Найти современное значение долга, полная сумма которого через 3 года составит 7 млн руб. проценты начисляются по следующим ставкам: а) 14% в конце каждого года; б) 20% в конце каждого квартала; в) 12% годовых в конце каждого месяца.

Задача 22

Определить какую сумму необходимо поместить на депозит, чтобы через три года владелец депозита получил 4 млн руб. Применяются процентные ставки: а) 8% годовых; б) 12% годовых. Расчет произвести по сложным и простым процентам.

Задача 23

Инвестиционный фонд предоставил кредит строительной фирме в сумме 20 млн руб. под 20% годовых (проценты сложные) на срок 4 года. Определить сумму, полученную фондом (дисконтированную величину) и сумму дисконта, если инвестиционный фонд учел свой кредитный контракт в банке также под 20% годовых до срока погашения долга за: а) три года; б) два года; в) полгода.

Задача 24

Капитал в сумме 5 млн руб. предоставлен в кредит на 5 лет под 20% годовых (сложные проценты). Определить значение наращенной суммы и дисконтированной величины на конец третьего года ($t=3$).

Задача 25

Владелец долгового обязательства, равного 6 млн руб., со сроком погашения через 2 года сразу же после заключения этого контракта учел его в банке по сложной учетной ставке 9%. Определить сумму, полученную владельцем обязательства, и дисконт, полученный банком на основе сложной учетной и процентной ставки.

Задача 26

Первоначальная сумма $P=10$ млн руб., помещенная в банк на два года, в конце срока выросла до 12,0758 млн руб. Нарращение производилось по сложной учетной ставке. Определить величину этой ставки.

Задача 27

Долговое обязательство на сумму 6 млн руб. со сроком погашения через 2 года было передано в банк для учета. Дисконтирование производилось по

номинальной учетной ставке $f=9\%$, при $m=4$ и $N=4*2=8$. Определить величину дисконта.

Задача 28

Кредитное обязательство, равное 40 млн руб. со сроком погашения через 4 года, было учтено в банке по учетной ставке 8% годовых, начисление дисконта по полугодиям. Определить современную величину обязательства и эффективную учетную ставку.

Задача 29

Какую первоначальную сумму должен вложить клиент в банк под 50% годовых на 4 года по сложной процентной ставке, чтобы она обеспечивала ему ежегодные выплаты в размере 1000 руб.? Рассмотреть случай, когда $n = \infty$, т. е. Выплаты будут производиться бессрочно.

Задача 30

Предприятию выделен банковский кредит в 2 млн руб. сроком на 3 года под 5 % годовых. Проценты сложные и начисляются один раз в год. Определите процентную ставку с учетом инфляции, коэффициент наращивания и наращенную сумму. Средний годовой уровень инфляции равен 36 %.

Задача 31

Предприятию выделен банковский кредит в 2 млн руб. сроком на 3 года. Проценты сложные и начисляются ежемесячно. Номинальная ставка сложных процентов равна 5 %. Определите процентную ставку с учетом инфляции, коэффициент наращивания и наращенную сумму. Средний годовой уровень инфляции равен 36 %.

Задача 32

Предприятие взяло кредит 800 млн руб. на срок с 1 февраля по 1 августа. Номинальная процентная ставка $j = 12\%$. Месячные уровни инфляции за этот период: февраль – 11 %, март – 8,2 %, апрель – 8,5 %, май – 7,9 %, июнь – 6,7 %, июль – 5,4 %. Определите коэффициент наращивания, номинальную годовую ставку процентов и наращенную сумму с учетом инфляции. Начисление процентов ежемесячное.

Задача 33

Месячные уровни инфляции 3 %. Какой процент за годовой кредит должна взять финансовая компания, чтобы обеспечить доходность не менее 24 %? Проценты сложные и начисляются ежемесячно. При $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m$.

Задача 34

Банк принимает рублевые вклады от населения под процентную ставку сложных процентов – 6 %. Уровень инфляции ожидается 2,5 % в месяц.

Определите истинную процентную ставку доходности вклада с учетом инфляции. Начисление процентов ежемесячное.

Задача 35

Ссуда в размере 50 тыс. руб. выдана на три года. Реальная доходность операции должна составить 8% годовых по сложной ставке процентов. Ожидается, что индекс инфляции за срок ссуды будет равен 2,5. Определить множитель наращивания, ставку процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции и погашаемую сумму.

Задача 36

Ссуда в размере 20 тыс. руб. выдана на два года. Реальная доходность операции должна составить 8% годовых по сложной ставке процентов. Ожидаемый уровень инфляции составляет 20% в год. Определить множитель наращивания, ставку процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции и погашаемую сумму.

Задача 37

Первоначальный капитал в размере 20 тыс. руб. выдается на три года. Проценты начисляются в конце каждого квартала по номинальной ставке 80% годовых. Определить номинальную ставку процентов и наращенную сумму с учетом инфляции, если ожидаемый годовой уровень инфляции составляет 90%.

Задача 38

Определить реальную доходность финансовой операции, если при уровне инфляции 8% в месяц выдается кредит на 2 года по номинальной ставке сложных процентов 180% годовых. Проценты начисляются ежеквартально.

4 Эквивалентность ставок. Потоки платежей

4.1. Методические указания

Часто при расчетах, проводимых по различным финансовым операциям, возникает необходимость в определении эквивалентных процентных ставок. Ставки, обеспечивающие равноценность финансовых результатов, называются эквивалентными или релятивными (относительными).

Для нахождения эквивалентных процентных ставок используют уравнения эквивалентности, принцип составления которых заключается в следующем. Выбирается величина, которую можно рассчитать при использовании различных процентных ставок. Обычно это наращенная сумма S . На основании равенства двух выражений для данной величины составляется уравнение эквивалентности, из которого путем соответствующих преобразований получается соотношение, выражающее зависимость между процентными ставками различного вида.

Равноценность финансовых последствий может быть обеспечена в том случае, если наблюдается равенство коэффициентов наращения или дисконтных множителей.

4.2. Задачи

Задача 1

Предприятие в течение года получило два равных по величине кредита – 10 млн руб. каждый. Первый кредит получен на срок 3 месяца под 10 % годовых, а второй на 9 месяцев под 16 %. Определить наращенную сумму.

Задача 2

Фирма получила два кредита. Первый – 10 млн руб. на 3 месяца под 10 % годовых. Второй – 8 млн руб. на 9 месяцев под 14 % годовых. Определить среднюю процентную ставку, а также наращенную сумму.

Задача 3

Долгосрочный кредит предоставлен на 6 лет на следующих условиях: первые два года – под 5 % (проценты сложные). Следующие три года ставка возрастает на 2 %, а последний год – еще на 1 %. Определить среднюю ставку.

Задача 4

Фирма получила кредит на сумму 900 тыс. руб. под 10 % годовых (простые проценты). Кредит должен быть погашен двумя платежами: первый – 500 тыс. руб. с процентами через 90 дней, второй – 400 тыс. руб. с процентами через 120 дней. Впоследствии фирма договорилась с кредитором об объединении платежей в один со сроком погашения через 150 дней.

Определить размер консолидированного платежа ($K = 360$ дней).

Задача 5

Фирма в погашение задолженности банку за предоставленные по 15 % годовых кредит (проценты простые), полученный 01.01, должна произвести три платежа – 2 млн руб.; 2,7 млн руб.; 3,3 млн руб. в сроки 20.04, 25.05, 15.06. Фирма предложила банку объединить все платежи в один и погасить его 01.06.

Определить величину консолидированного платежа.

Задача 6

Должник обратился к своему кредитору (владельцу векселей) с просьбой об объединении двух векселей в один с одновременным продлением срока оплаты. Первый вексель выдан на сумму 1,5 млн руб. со сроком уплаты 20.07, второй на сумму 2,1 млн руб. со сроком уплаты 01.09. При консолидации векселей используется учетная ставка 10 %.

Определить сумму, проставленную в новом векселе.

Задача 7

Три векселя по срокам уплаты 15.03 (500 тыс. руб.), 10.04 (800 тыс. руб.) и 01.06 (900 тыс. руб.) заменяются одним со сроком погашения 15.05. При консолидации векселей используется учетная ставка 9 %.

Определить сумму по консолидированному векселю.

Задача 8

Два платежа $S_1 = 1,7$ млн руб. и $S_2 = 1,3$ млн руб. со сроками погашения 1 год 30 дней и 1 год 45 дней, отсчитываемыми от одной даты, заменяются одним платежом со сроком 1 год 75 дней. Стороны согласились на консолидацию платежей при использовании ставки сложных процентов 9 % годовых. Определить консолидированную сумму.

Задача 9

Фирма имеет ряд финансовых обязательств перед одним кредитором – 2,5 млн руб., 3,1 млн руб. и 2,7 млн руб., которые должна погасить через 40, 70 и 160 дней после 01.01 текущего года. По согласованию сторон решено заменить их одним платежом, равным 9 млн руб. с продлением срока оплаты, используя процентную ставку 12 %.

Определить срок уплаты консолидированного платежа.

Задача 9

Платежи в размере 2,5 млн руб., 3,1 млн руб. и 2,7 млн руб. должны быть внесены через 40, 70 и 160 дней после 10.01 текущего года. Достигнуто соглашение на объединение этих платежей без увеличения итоговой суммы. Определить срок уплаты консолидированного платежа.

Задача 10

Предстоящие платежи и сроки их уплаты, исчисленные от одной даты, равны: $S_1 = 1,2$ млн руб., $n_1 = 35$ дней, $S_2 = 1,5$ млн руб., $n_2 = 55$ дней и $S_3 = 2,3$

млн руб., $n_3 = 75$ дней. Достигнуто соглашение об объединении трех платежей в один, равный 5.5 млн руб., используя для этого учетную ставку 7 %. Определить срок уплаты консолидированного платежа.

Задача 11

Два платежа $S_1 = 1,4$ млн руб. и $S_2 = 1,9$ млн руб. со сроками погашения $n_1 = 1$ года и $n_2 = 3$ года объединяются в один $S_0 = 4$ млн руб. с использованием сложной процентной ставки – 6 %.

Определить срок уплаты консолидированного платежа.

Библиографический список

1. Копнова Е.Д. Финансовая математика. Учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры. – М.: Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" (НИУ ВШЭ), 2017. – 413 с. (ЭБС Юрайт)
2. Мардас А.Н. Основы финансовых вычислений. 2-е изд., пер. и доп. Учебное пособие для академического бакалавриата. – С-Пб.: Санкт-Петербургский государственный университет путей сообщения, Санкт-Петербургский государственный университет, 2017. – 127 с. (ЭБС Юрайт)
3. Шиловская, Н. А. Финансовая математика : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / Н. А. Шиловская. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 202 с. (ЭБС Юрайт)

Учебное издание

Кирищиева Ирина Рафаэлевна

ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ:

Печатается в авторской редакции
Технический редактор Н.С. Федорова

Подписано в печать 20.10.17. Формат 60×84/16.
Бумага газетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,86.
Тираж экз. Изд. № 90256. Заказ .

Редакционно-издательский центр ФГБОУ ВО РГУПС.

Адрес университета: 344038, Ростов н/Д, пл. Ростовского Стрелкового
Полка Народного Ополчения, д. 2.