РОСЖЕЛДОР

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»

(ФГБОУ ВО РГУПС)

М.Д. Линденбаум

НАДЕЖНОСТЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Учебно-методическое пособие
для практических и лабораторных работ

Ростов-на-Дону
2017

УДК 681.3(07) + 06

Рецензент – кандидат технических наук, доцент В.В. Жуков

Линденбаум, М.Д.

Надежность информационных систем: учебно-методическое пособие для практических и лабораторных работ / М.Д. Линденбаум; ФГБОУ ВО РГУПС. – Ростов н/Д, 2017. – 56 с.

Описаны надежностные структуры, марковские случайные процессы, изложены методы расчета надежности невосстанавливаемых и восстанавливаемых информационных систем, организации и проведения определительных испытаний на надежность, методы статистического моделирования. Приведены задания и методика выполнения практических работ.

Предназначено для студентов направления подготовки «Информационные системы и технологии» и «Информатика и вычислительная техника», а также для студентов всех специальностей, изучающих дисциплины «Надежность информационных систем» и «Надежность программно-аппаратных комплексов».

Одобрено к изданию кафедрой «Вычислительная техника и автоматизированные системы управления».

© Линденбаум М.Д., 2017
© ФГБОУ ВО РГУПС, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Математические модели процесса отказов-восстановлений системы с различными способами резервирования…… 4

2 Расчет надежности невосстанавливаемой системы с различными способами резервирования……. 7

3 Расчет показателей надежности восстанавливаемой системы и оценка эффективности различных способов резервирования с восстановлением 11

4 Оценка показателей надежности по плану *[NUN]* методом моментов … 15

5 Оценка показателей надежности по планам *[NUr]* методом максимального правдоподобия ……. 19

6 Построение эмпирической функции распределения и гистограммы и проверка гипотезы о законе распределения ……. 22

7 Задания …… 26

8 Примеры …….. 40

Библиографический список ……. 53

Приложение 1. Законы распределения …….. 54

Приложение 2. Коэффициенты закона распределения Вейбулла …… 55

1 Математические модели процесса отказов-восстановлений системы с различными способами резервирования

В простейшем случае каждый элемент в произвольный момент времени t находится в одном из двух состояний: работоспособном e_0 и неработоспособном (отказ) e_1. В общем случае состояний неработоспособности может быть несколько, например, e_1 – отказ скрытый; e_2 – отказ явный и ожидается прибытие ремонтной бригады либо доставки запасных деталей для ремонта; e_3 – отказ явный, происходит поиск неисправности; e_4 – отказ явный, происходит ремонт или замени элемента и т.д. Кроме того, особенность элементов и устройств ИВС состоит в том, что в них осуществляется передача, обработка и хранение двоичной информации, поэтому в ряде случаев приходится рассматривать два типа отказов: отказы, приводящие к искажению информации "0" $\rightarrow$ "1" и "1" $\rightarrow$ "0". Последствия этих отказов могут существенно различаться особенно в системах управления ответственными объектами, например, красный огонь светофора вместо зелёного и зелёный – вместо красного .

В простейшем случае двух состояний процесс отказов-восстановлений представляет собой последовательность случайных величин $\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2,...,\xi_j,\eta_j,...$, где ξ_j – длительность j-го периода работоспособности; η_j - длительность j -го периода неработоспособности (в течение этого периода производится восстановление, если оно возможно, иначе $\eta_j=\infty$). Состояние i -го элемента $x_i(t)$ в момент времени t равно

$$x_i(t)=\begin{cases} e_0^i, \ при \quad t\in\xi_j, \\ e_1^i, \ при \quad t\in\eta_j, \ j=1,2,\ ... \end{cases} \tag{1}$$

Если все величины ξ_j, η_j взаимно независимы и одинаково распределены $F(t)=\text{Вер}\{\xi_j\le t\}$, $F_в(\tau)=\text{Вер}\{\eta_j\le\tau\}$, то такой процесс называют альтернирующий процесс восстановления. Он описывается законами распределения случайных величин времени безотказной работы t и времени восстановления τ, с помощью функции распределения $F(t)$, функции надежности $P(t)$, плотности распределения $f(t)$, интенсивности отказов $\lambda(t)$, функции выработанного ресурса $\Lambda(t)$. Зависимости между перечисленными функциями приведены в табл.1.2.

Для системы, состоящей из n элементов, ее состояние $X(t)$ в момент t полностью задается n-мерным вектором совокупности состояний всех элементов в этот момент

$$X(t)=(x_1(t), x_2(t),..., x_i(t),..., x_n(t)).$$

Вектор $X(t)$ задан на множестве состояний системы $E=\bigcup_{i=1}^{n} e_i$, которое принято называть *фазовым пространством состояний*. Его мощность даже в случае, если все элементы могут находиться только в двух состояниях, довольно велика $|E|=2^n$. Возникает так называемое проклятие размерности. Для системы со сравнительно небольшим числом элементов (n=10…20),

мощность множества имеет порядок 1000…1000000. а при увеличении числа состояний элементов еще больше возрастает, причем чрезвычайно быстро.

В зависимости от структуры системы для однофункциональных систем множество состояний разделяется на два подмножества E_0 – состояния работоспособности и E_1 – состояния неработоспособности, $E=E_0 \cup E_1$, $E_0 \cap E_1=\varnothing$. В частности, если работоспособны все элементы системы, то она заведомо работоспособна $(e_0^1, e_0^2, \dots, e_0^n) \in E_0$, а при отказе всех элементов система неработоспособна независимо от ее структуры $(e_1^1, e_1^2, \dots, e_1^n) \in E_1$. В сложных многофункциональных ИВС, кроме состояний полной работоспособности E_0 и полной неработоспособности E_1, могут существовать промежуточные состояния, при которых снижается эффективность работы системы по некоторым функциям, например, в сложной сети передачи данных при отказах некоторых линий или приемо-передающих устройств происходит дополнительная задержка в передаче информации или до восстановления передается только самая важная информация. Появляется необходимость рассматривать несколько подмножеств с отказами выполнения различных функций и их сочетаний; все это еще усложняет фазовое пространство состояний.

Процесс изменения состояний системы представляет собой наложение процессов отказов-восстановлений элементов на фазовое пространство E. В зависимости от режима работы ИС и от рассматриваемых показателей надёжности процесс может быть стационарным или нестационарным. Сложность описания процесса существенно зависит от законов распределения времени безотказной работы t и времени восстановления τ. Математическая модель существенно упрощается, если все времена пребывания процесса в различных состояниях подчиняются экспоненциальному закону распределения. Как указывалось, только при экспоненциальном законе распределения функция надёжности не зависит от того, сколько времени элемент уже проработал (1.29). Иначе в модели нужно учитывать, когда какой элемент пришёл в то или иное состояние. Но даже при экспоненциальном законе распределения процесс отказов-восстановлений может быть нестационарным.

На процесс отказов-восстановлений может также накладываться детерминированный или случайный процесс функционирования системы, например, поступления задач для решения, заявок на обмен информацией, возможны приоритеты решения задач и обслуживания заявок и т.п.

Из сказанного следует, что невозможно предложить универсальные модели описания надежности функционирования ИВС и общие методы решения. Вместе с тем, разработано достаточно много моделей и методов, практическое применение которых часто требует творческого подхода.

При расчетах надежности реальных сложных ИВС перечисленные трудности могут возникать одновременно. Однако, изучать модели и методы расчета надежности с учетом указанных проблем целесообразно порознь.

Как отмечалось, первая задача при расчете надежности состоит в построении фазового пространства состояний системы. Наиболее простым и

наглядным представлением фазового пространства состояний системы и возможных переходов с указанием их вероятностных характеристик является направленный размеченный граф переходов, разделённый на подграфы работоспособных и неработоспособных состояний. Узлами графа являются состояния системы, а дугами переходы. Для решения задачи используют соответствующую графу матрицу переходов. Однако, графы и матрицы применимы для сравнительно простых систем.

Другой вид моделей – надежностные структуры. Они могут соответствовать реальному соединению элементов, а могут условно отражать последствия их отказов для системы. Наиболее широко используются структуры в виде последовательно-параллельной схемы. В них отказы элементов мнемонически как бы означают обрывы в электрической схеме. Последовательное соединение элементов или групп элементов – это основное (функциональное) соединение, при котором отказ любого элемента или группы параллельно включенных элементов означает отказ системы (размыкание схемы). Параллельным – обозначается резервное соединение, при котором отказ наступает только в случае отказа всех параллельно включенных элементов (основного и всех резервных).

Такая схема часто не соответствует электрическому соединению элементов. Например, при параллельном включении источников питания на общую шину, короткое замыкание (к.з.) любого из них приводит к короткому замыканию всей группы, т.е. с точки зрения надежности по отношению к отказам типа к.з. в надежностной структуре их следует изображать включенными последовательно.

Надежностная схема с параллельным соединением является упрощенной моделью резервированной системы, так как при резервировании замещением в ней не отражен режим резервного элемента, отсутствует переключатель, который, как правило, нельзя считать абсолютно надежным. И даже при постоянном резервировании, например, при параллельной работе двух компьютеров, возникают вопросы контроля исправности, обмена информацией между ними и т.д. Все это не отражает надежностная структура, поэтому к надежностной структуре часто требуются ещё дополнительные пояснения. Вместе с тем последовательно-параллельные схемы широко используются для приближенных расчетов надежности на начальных стадиях проектирования систем.

Если для элементов рассматриваются только состояния работоспособности и неработоспособности, то составляющими множества E по существу являются n-мерные булевы вектора, тогда подмножества E_0 и E_1 для структур, не сводимых к последовательно-параллельным схемам можно задавать с помощью логических матриц или логических выражений.

Направленные графы используют также для представления иерархических многоуровневых структур, каковыми обычно являются вычислительные сети, некоторые сложные системы управления. Имеется центральная ЭВМ, сервер, концентратор информации, к ним подключаются компьютеры более низкого уровня, и т.д. На низшем уровне обычно находятся

терминалы или исполнительные органы систем управления. Элементы каждого из уровней могут быть резервированы любым способом, может использоваться и общее резервирование.

Если вероятностная картина процесса отказов-восстановлений достаточно проста: отказы всех элементов независимы, заданы вероятности безотказной работы и вероятности отказов элементов за время штатной работы или стационарные коэффициенты готовности и коэффициенты простоя, то расчет надежности системы по существу сводится к формированию фазового пространства состояний системы E и разбиению его на подмножества состояний работоспособности E_0 и состояний отказа E_1: $E_0 \cup E_1 = E$; $E_0 \cap E_1 = \varnothing$.

Под структурным элементом системы понимается набор физических ее элементов, последствия отказов которых не различимы для системы. Такие структурные элементы будем всюду в дальнейшем называть элементами или компонентами системы. Когда подмножества E_0, E_1 сформированы, то интересующие нас вероятности безотказной работы и отказа системы P_c, Q_c, $P_c+Q_c=1$ рассчитываются по формулам, представляющим собой полный перебор вероятностей работоспособных и неработоспособных состояний всех элементов

$$P_c = \sum_{E_0} \prod_{e_i = e_0} p_i \prod_{e_j = e_1} q_j, \qquad (2)$$

$$Q_c = \sum_{E_1} \prod_{e_i = e_1} q_i \prod_{e_j = e_0} p_j,$$

Очевидно, что достаточно сформировать любое одно из подмножеств, тогда другое подмножество и соответствующая вероятность определяются как дополнение. Естественно формировать то из подмножеств, мощность которого меньше и для которого проще алгоритм его построения. Например, для нерезервированной системы (последовательного соединения), в которой отказ любого элемента означает отказ системы, проще подмножество $E_0=\{e_0,e_0,...,e_0\}$. При постоянном общем резервировании (параллельном соединении) только отказ всех элементов означает отказ системы, т.е. $E_1=\{e_1,e_1,...,e_1\}$.

В общем случае возникает необходимость рассматривать процессы отказов-восстановлений элементов и систем во времени.

2 Расчет надежности невосстанавливаемой системы с различными способами резервирования

Общим описанием безотказности систем являются функция надежности $P(t)$ и функция отказов $Q(t)=1 - P(t)$. Показатели безотказности невосстанавливаемых систем – вероятность безотказной работы $P(t)$, вероятность отказа $Q(t)$ в течение заданной наработки (времени штатной работы) t, и средняя наработка до отказа T_0. Нерезервированную систему представляют в виде надежностной структуры с последовательным соединением элементов. В такой системе отказ любого элемента вызывает отказ системы, т.е. система работает безотказно, если все её элементы работоспособны. Параллельная структура соответствует резервному

включению элементов. При этом все элементы основные и резервные одинаковы, независимы и одинаково нагружены, т.е. имеют одинаковые функции надёжности. Резервирование может быть постоянным либо замещением. В случае резервирования замещением обнаружение отказов элементов и переключение на резерв происходит мгновенно или в пределах допустимого времени и абсолютно надежно, при этом никаких переходных процессов и искажения информации в информационных системах (ИС) не происходит.

По формуле умножения вероятностей независимых событий функция надежности для нерезервированной системы запишется:

$$P(t)=p_1(t)p_2(t)...p_n(t)=\prod_{i=1}^{n} p_i(t), \qquad (3)$$

где n – число последовательно соединенных элементов;

$P(t)$ – функция надёжности системы;

$p_i(t)$ – функция надёжности i-го элемента.

В нерезервированной системе (при последовательном соединении) функции надежности элементов перемножаются.

Выразим функции надёжности через интенсивности отказов $\lambda(t)$, тогда (1) примет виде

$$e^{-\int_0^t \lambda(t)dt} = e^{-\int_0^t \lambda_1(t)dt} ... e^{-\int_0^t \lambda_n(t)dt},$$

откуда следует:

$$\lambda(t)= \lambda_1(t)+ . . . + \lambda_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t), \qquad (4)$$

т.е. в нерезервированной системе интенсивности отказов суммируются. В частности, для экспоненциального закона распределения времени безотказной работы $F(t)=1–\exp(–\lambda t)$, $\lambda_i(t)= \lambda_i =1/T_i$ = const.

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} 1/T_i, \qquad (5)$$

$$T_o = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} 1/T_i}, \qquad (6)$$

$$P(t) = e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t} = e^{-\sum_{i=1}^{n} t/T_i}. \qquad (7)$$

Если все элементы имеют экспоненциальный закон распределения времени безотказной работы, то и система имеет экспоненциальный закон распределения времени безотказной работы.

Если $\sum_{i=1}^{n} q_i(t) << 1$, то можно пользоваться приближенной формулой

$$Q_c = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - q_i) \approx \sum_{i=1}^{n} q_i .$$

Расчет надежности при параллельном соединении тоже основан на теореме умножения вероятностей независимых событий. Так как отказ системы произойдет только в случае, если откажут все элементы, основной и резервные, то для вероятности отказа можно записать формулу:

$$Q(t)=F(t)=q_1(t)...q_m(t)=q^m(t)=[1-p(t)]^m, \qquad (8)$$

где $q_1(t)= ... =q_m(t)=q(t)$ – вероятности отказа основного и резервных элементов;

m - число параллельно соединенных элементов.

Вероятность безотказной работы резервированной схемы будет равна

$$P(t)=1-F(t)=1-[1-p(t)]^m. \qquad (9)$$

При экспоненциальном законе надежности элементов

$$P(t)=1-(1-e^{-\lambda t})^m, \quad T_0 = \int_0^\infty P(t)dt = \frac{1}{\lambda}(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}). \qquad (10)$$

Время безотказной работы резервированной системы даже при экспоненциальном законе распределения времени безотказной работы всех элементов не подчиняется экспоненциальному закону.

При $\lambda t<<1$ $P(t)\approx 1-(\lambda t)^m$; $Q(t)\approx(\lambda t)^m$.

При расчёте надежности систем с резервированием замещением, ненагруженным или облегчённым резервом метод параллельно-последовательных структур не применим, поэтому используют модель простого процесса гибели (рис.1.). Для учёта надёжности переключателя используется модель сложного процесса гибели (рис.2.).

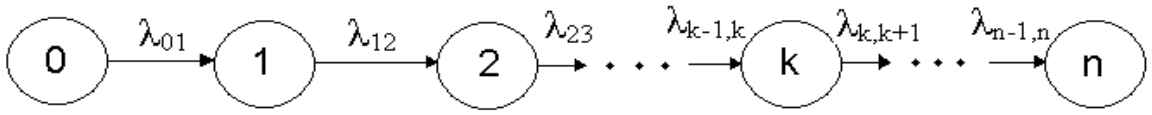


Рис. 1. Простой процесс гибели.

В случае ненагруженного резерва все интенсивности переходов одинаковы: $\lambda_k=\lambda$ и надёжность системы рассчитывается по формуле Эрланга

$$Q(t) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}; \qquad T_0 = \frac{m}{\lambda}. \qquad (11)$$

Рассмотрим случай резервирования замещения с ненадежным переключателем. Пусть переключатель может отказывать только в моменты переключений и вероятность успешного переключения α (вероятность отказа $1-\alpha$) не зависит от порядкового номера и момента переключения.

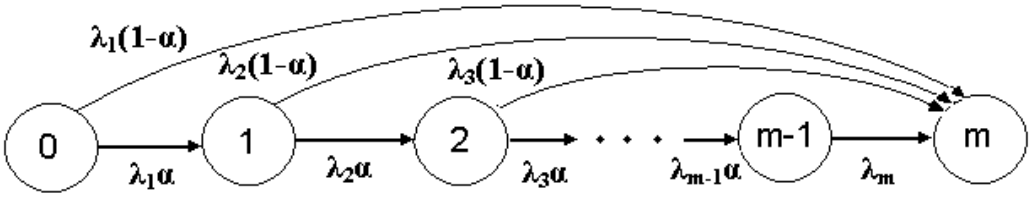


Рис. 2. Сложный процесс гибели.

Число успешных переключений подчиняется геометрическому закону распределения, и только при отказе последнего элемента отказ системы происходит независимо от исправности переключателя. Откуда

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{m-1} [(1-\alpha)\alpha^{k-1}\tilde{Q}_k(t)] + \alpha^{m-1}\tilde{Q}_m(t), \qquad (12)$$

где $\tilde{Q}_k(t)$ - вероятность отказа системы, состоящей из k элементов при абсолютно надежном переключателе (рассчитывается с помощью простого процесса гибели).

Для нагруженного резерва (параллельное соединение) $\tilde{Q}_k(t) = q^k(t)$, откуда

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{m-1} (1-\alpha)\alpha^{k-1} q^k(t) + \alpha^{m-1} q^m(t). \qquad (13)$$

При экспоненциальном законе распределения времени безотказной работы элементов средняя наработка до отказа системы T_c равна

$$T_c = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha^{k-1}}{k}, \qquad (14)$$

Для ненагруженного резерва при марковском процессе гибели

$$\tilde{Q}_k(t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i} e^{-\lambda t},$$

откуда

$$Q(t) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{[\lambda t \alpha]^k}{k!} e^{-\lambda t}. \qquad (15)$$

Для ненагруженного резерва средняя наработка до отказа системы независимо от закона распределения времени безотказной работы элементов равна

$$T_c = T_0[1-\alpha^m]/(1-\alpha), \qquad (16)$$

где T_o - средняя наработка до отказа элемента.

На практике обычно используется невысокая кратность резервирования (m=2). Тогда расчётные формулы для нагруженного резерва приобретают более простой вид: $Q(t)=(1-\alpha)q(t)+\alpha q^2(t)$.

Для дублированной системы (m=2) при экспоненциальном законе распределения функция отказов $Q(t)$ функция надежности $P(t)$ имеют вид для нагруженного резерва (8)

$$Q(t)=(1-exp(-\lambda t))^2,\ P(t)=1-Q(t), \qquad (17)$$

для ненагруженного резерва (10)

$$P(t)=(1+\lambda t)exp(-\lambda t),\ \text{функция отказов}\ Q(t)=1-P(t). \qquad (18)$$

В случае, если переключатель может отказывать, то

для нагруженного резерва (13)

$$Q_4(t)=(1-\alpha)(1-\exp(-\lambda t))+\alpha(1-\exp(-\lambda t))^2,\ P(t)=1-Q(t), \qquad (19)$$

для ненагруженного резерва (15)

$$P(t)=(1+\lambda t\alpha)\exp(-\lambda t), \quad Q(t)=1-P(t). \qquad (20)$$

3 Расчет показателей надежности восстанавливаемой системы и оценка эффективности различных способов резервирования с восстановлением

Показателями надежности восстанавливаемых ИС являются стационарные коэффициенты готовности $k_г$ или простоя $k_п$ ($k_г+k_п=1$) и наработка на отказ T_0 или (и) среднее время восстановления $T_в$

$$k_г= T_0/(T_{0+Tв}), \qquad k_п= T_в/(T_{0+Tв}). \qquad (21)$$

Процесс отказов-восстановлений элементов и систем представляет собой случайный процесс с непрерывным временем и конечным множеством состояний E.

Процесс является марковским, если дальнейший ход процесса зависит от его состояния в начальный момент (t=0) и не зависит от предыстории процесса. Это условие выполняется точно, если все времена безотказной работы и восстановления подчиняются экспоненциальному закону, и приближенно, если время безотказной работы подчиняется экспоненциальному закону и среднее время восстановления намного меньше средней наработки на отказ (быстрое восстановление).

Марковский процесс описывается с помощью матрицы переходов, имеющей следующий вид:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{Vmatrix} - & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1j} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & - & \dots & \lambda_{2j} & \dots & \lambda_{2n} \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ \lambda_{i1} & \lambda_{i2} & \dots & \lambda_{ij} & \dots & \lambda_{in} \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nj} & \dots & - \end{Vmatrix}, \qquad (22)$$

где $\lambda_{ij}(t)$ – интенсивность переходов из i-го в j-е состояние.

Интенсивность λ_{ii} не имеет смысла, поэтому на главной диагонали матрицы ставятся прочерки. Так как не все переходы возможны, многие значения интенсивностей равны нулю. Для наглядного представления возможных переходов пользуются графом переходов, на котором узлами (вершинами) изображают состояния, а дугами (ребрами) возможные переходы, их помечают соответствующими значениями интенсивностей переходов.

Интересующие нас показатели надежности системы могут быть найдены, если определена матрица-столбец $\boldsymbol{P(t)}$ вероятностей всех состояний

$$\boldsymbol{P(t)} = \begin{Vmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_k(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{Vmatrix},$$

где $P_k(t)$ – вероятность того, что в момент t процесс находится в состоянии k.

Если из каждого состояния за конечное число шагов можно перейти в любое другое состояние, то существуют отличные от нуля и единицы предельные вероятности состояний, причем они не зависят от начального состояния системы:

$$\lim_{t \to \infty} P_k(t) = p_k .$$

Будем называть вероятность p_k застать систему в состоянии k в произвольный достаточно удаленный от начала работы момент времени t стационарной вероятностью состояния k. Стационарный режим имеют только процессы, описывающие работу систем с восстановлением. Стационарные вероятности p_k вычисляются путем решения системы линейных алгебраических уравнений Колмогорова

$$\begin{cases} -p_1 \sum\limits_{j=2}^{n} \lambda_{1j} + \sum\limits_{i=2}^{n} p_i \lambda_{i1} = 0; \\ \dots \\ -p_k \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \lambda_{kj} + \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} p_i \lambda_{ik} = 0; \\ \dots \\ -p_n \sum\limits_{j=1}^{n-1} \lambda_{nj} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i \lambda_{in} = 0. \end{cases} \qquad (23)$$

Нормирующее условие $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$, которым необходимо заменить одно из уравнений системы (21), так как уравнения линейно зависимы.

Согласно эргодической теореме Хинчина стационарные вероятности p_k при $t \to \infty$ сходятся по вероятности к средней доле времени пребывания системы в k-м состоянии. Следовательно, интересующие нас показатели надежности: коэффициент готовности $k_г$ и коэффициент простоя $k_п$ можно вычислить по формулам:

$$k_г = \sum_{i \in E_0} p_i, \qquad k_п = \sum_{j \in E_1} p_j \qquad (24)$$

где E_0, E_1 – множества работоспособных и неработоспособных состояний системы.

Средняя наработка между отказами T_0 может быть рассчитана по формуле (19), но для этого нужно в начале рассчитать среднее время восстановления $T_в$.

$$T_в = \left(\sum_{j \in E_1} p_j / \mu_j\right) k_п, \qquad T_0 = T_в\,(1/k_п - 1), \qquad (25)$$

при $\mu_{1в}=\mu_{2в}=\ldots=\mu_в$ $T_{в=1/}\ \mu_в$, $T_0= T_в\ (1/k_п–1)/\ \mu_в$.

Коэффициент повышения надежности $W=\lambda/(\mu_в \cdot k_п)$.

Для составления уравнений Колмогорова по графу переходов пользуются следующими правилами:

1) в левой части уравнения стоит столько слагаемых, сколько дуг (стрелок) связывает данное состояние с другими состояниями, в правой части ноль;

2) каждое слагаемое представляет собой произведение вероятности состояния, из которого выходит дуга (стрелка), на интенсивность соответствующего перехода;

3) слагаемые, относящиеся к выходящим дугам (стрелкам), имеют знак минус, к входящим – плюс.

Системы линейных алгебраических уравнений выше четвёртого порядка обычно решаются численными методами, для чего их удобно представлять в матричной форме $\overline{\overline{A}\,|\,\overline{b}}$. Правила составления системы уравнений Колмогорова в виде расширенной матрицы коэффициентов:

1) слагаемые, относящиеся к выходящим дугам (стрелкам) со знаком минус, записываются на главной диагонали матрицы.

2) в остальных клетках матрицы записываются слагаемые, относящиеся к входящим дугам (стрелкам) со знаком плюс, причем в те клетки строки откуда дуга выходит, свободные клетки заполняются нулями:

3) значения свободных членов уравнений $\overline{b}$ – нули;

4) проверка правильности составления матрицы: число слагаемых в строках должно равняться числу дуг, соединяющих соответствующее состояние с другими состояниями, суммы во всех столбцах должны равняться нулю, так как каждая дуга из какого-то узла выходит и в какой-то входит;

5) строка нормирующего условия заполняется единицами.

В общем случае для каждой конкретной задачи строится модель марковского процесса с учётом особенностей системы, условий её работы, дисциплины обслуживания и восстановления. Задача решается в следующей последовательности:

1. Кодирование состояний элементов и составление множества состояний E, в которых может находиться система, и разбиение на подмножества работоспособных E_0 и неработоспособных состояний E_1.

2. Составление графа переходов марковского процесса.

3. Составление системы уравнений Колмогорова в матричной форме, проверка правильности уравнений.

4. Замена одного из уравнений нормирующим условием, целесообразно последнего уравнения.

4. Решение системы уравнений Колмогорова.

5. Расчет показателей надежности и анализ полученных результатов.

Для решения системы используется матричный метод, основанный на нахождении обратной матрицы. Другими словами для нахождения вектора неизвестных $\overline{p}$ из системы линейных уравнений

$$\overline{\overline{A}} \cdot \overline{p} = \overline{b}, \qquad (26)$$

где $\overline{\overline{A}}$ - матрица коэффициентов системы, $\overline{b}$ - вектор свободных членов, необходимо найти обратную матрицу $\overline{\overline{A}}^{-1}$ и умножить её на вектор свободных членов $\overline{b}$

$$\overline{p} = \overline{\overline{A}}^{-1} \cdot \overline{b}$$

Для нахождения обратной матрицы в среде MS Excel:

1. Выделить диапазон свободных ячеек размером ($n \times n$), где n – количество неизвестных или количество состояний. Выделенный диапазон ячеек для нахождения обратной матрицы:

$\overline{\overline{A}}^{-1} =$

2. Вызвать «**мастер функций**» MS Excel командой: **Вставка →** ***f*$_x$Функция..**

3. Выбрать категорию « **Математические**»

4. В появившемся списке выбрать функцию: **МОБР** которая вычисляет обратную матрицу.

5. Выделить диапазон ячеек исходной матрицы $\overline{\overline{A}}$, для того чтобы её адрес появился в строке ввода аргументов функции **МОБР.**

6. Для завершения работы «мастера функций» нажать клавишу **F2**, а затем вместе клавиши **CTRL+SHIFT+ENTER**

7. После этих действий появиться обратная матрица:

$\overline{\overline{A}}^{-1} =$

...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

8. Далее необходимо умножить обратную матрицу на вектор свободных членов $\overline{p} = \overline{\overline{A}}^{-1} \cdot \overline{b}$, с помощью функции **МУМНОЖ.** Но так как вектор $\overline{b}$ имеет в нашем случае тривиальный вид $\overline{b}$={0, 0,…, 0, 1}, то результатам умножения на него всегда окажется последний столбец матрицы $\overline{\overline{A}}^{-1}$. В среде MS Excel числа могут быть представлены в виде с плавающей запятой (на пример 7E-06), где символ E отделяет мантиссу числа от порядка числа. Другими словами число в виде 7E-06 можно перевести в число с фиксированной запятой следующим образом 7E-06=$7 \cdot 10^{-06}$=0.000007. Также можно получить другой вид записи числа, увеличив ширину столбца Excel.

4 Оценка показателей надежности по плану *[NUN]* методом моментов

Как правило, нет возможности так организовать испытания, чтобы получить данные о надёжности в удобном для обработки виде и в достаточном объёме. Приходится оценивать показатели надёжности по тому статистическому материалу, какой смогли получить. На характер статистического материала существенное влияние оказывает стратегия организации испытаний, а именно следующие факторы:

- число изделий, подвергаемых испытаниям;
- порядок контроля работоспособности изделий;
- порядок восстановления (замены) изделий;
- порядок поступления изделий на испытания;
- условие окончания испытаний.

Множество возможных сочетаний этих факторов является причиной большого разнообразия стратегий испытаний. В соответствии с существующими стандартами в настоящее время приняты следующие условные обозначения факторов: N – число изделий; U – отсутствие замены или восстановления; R – замена отказавших изделий такими же новыми; M – восстановление отказавших изделий; T – испытания завершаются по истечению фиксированного отрезка времени (наработки); r – испытания оканчиваются по достижению фиксированного числа отказов (восстановлений). Обычно принято считать, что стратегии R и M идентичны, т.е. восстановление является полным

Каждый конкретный план испытаний в этих обозначениях записывается сочетанием соответствующих трёх символов, заключённых в скобки, например [NUT], [NMr] и т.д. При этом предполагается, что изделия испытываются одновременно и контроль осуществляется непрерывно. Эти условия не всегда удаётся выполнить. Если изделия поступают на испытания не одновременно или могут быть сняты с испытаний в произвольные моменты времени по каким-либо посторонним причинам, то стратегии считаются нестрогими и для них используются не квадратные, а круглые скобки. В случае периодического контроля работоспособности обозначения плана заключается в двойные скобки квадратные или круглые. В предельном случае, если контроль производится только в конце испытаний, при этом восстановление естественно отсутствует, ставятся фигурные скобки {NUT}.

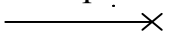
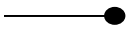
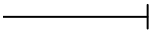
Несмотря на большое разнообразие планов испытаний, различных видов получаемого статистического материала значительно меньше, так как некоторые организационно разные стратегии дают выборки с одинаковой структурой, к которым применимы одни и те же методы статистической обработки. С точки зрения характера статистического материала при любых стратегиях испытаний получаются три типа реализаций случайных наработок:

1) наработки до отказов или между отказами (полные реализации);

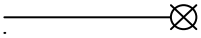
2) безотказные наработки (усечённые или неполные реализации);

3) наработки между моментами контроля, при которых обнаружены отказы (условные реализации).

К ним применяются следующие обозначения:

1)  2)  3) 

Если испытания завершаются в момент возникновения определённого по счёту отказа, то соответствующая наработка обозначается

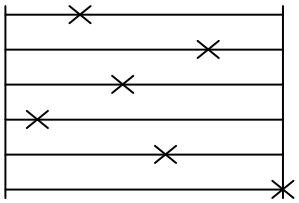
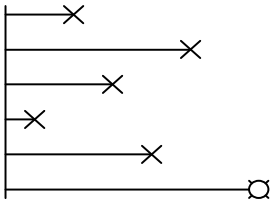
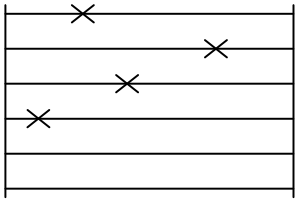
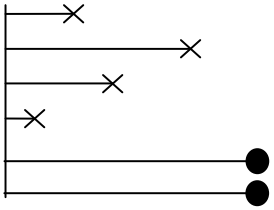


В принятых обозначениях каждому плану испытаний можно сопоставить диаграмму реализаций, наглядно представляющую специфику получаемых статистических данных. При этом возникает возможность выявить ряд типовых диаграмм, к которым сводятся результаты многих различных планов. В таблице 1 приведены типы диаграмм реализаций для планов с непрерывны контролем работоспособности. Планы с периодическим контролем работоспособности и планы типа *M* с неполным восстановлением здесь не рассматриваются, так как они более характерны для статистики, получаемой в результате подконтрольной эксплуатации.

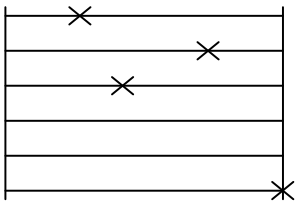
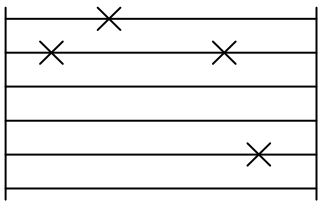
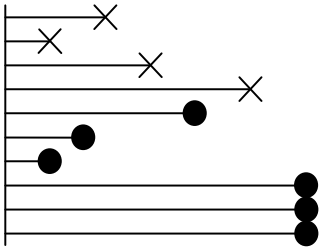
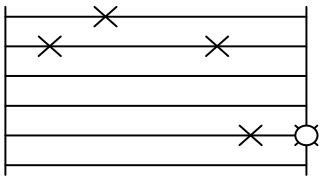
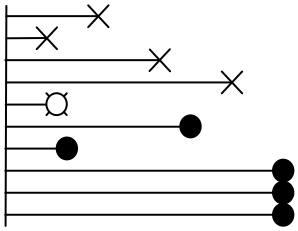
При плане [*NUN*] результаты испытаний содержат только полные наработки, причём момент последнего отказа является моментом окончания испытаний. При плане [*NUT*], если n_1 изделий за время *T* отказали, то результаты испытаний содержат N_1 полных наработок и $n_2 = N - n_1$ одинаковых неполных наработок длительностью *T*. Такой же тип выборки получается при плане испытаний [*NUr*] эти выборки называют однократно усечёнными.

Таблица 1

Планы испытаний и диаграммы реализаций
(непрерывный контроль)

План испытаний	Схема процесса испытаний	Диаграмма реализаций
[*NUN*]		
[*NUT*]		

Окончание табл. 1

[*NUr*]		
[*NRT*]		
[*NRr*]		

В остальных случаях (планы испытаний [*NRT*] и [*NRr*]) выборки также содержат полные и неполные наработки и отличаются от однократно усеченных выборок только тем, что в них усечённые сверху наработки имеют как одинаковые, так и разные длительности; это многократно усечённые выборки. С точки зрения планирования и организации испытаний планы типа *T* проще и удобней планов типа *r*, так как заранее известно время их окончания, но при этом, как правило, невозможно предсказать число полных реализаций, от чего существенно зависит точность получаемых оценок. При планах типа *r* наоборот точность оценок можно предсказать заранее, а время испытаний случайно. Возможны планы, когда испытания завершаются или по истечению фиксированного отрезка времени (наработки), или по достижению фиксированного числа отказов, в зависимости от того, какое из событий наступит раньше, например, план [*NR*(*T*,*r*)]. Однако эти планы не вносят ничего нового в типы выборок.

Задача определения статистических оценок состоит в нахождении наилучших значений, возможно меньше отличающихся от неизвестных фактических величин. Оптимальные статистические оценки обладают свойствами состоятельности, несмещенности и эффективности.

Статистическую оценку θ^* называют состоятельной, если она при безграничном увеличении числа наблюдений *n* сходится по вероятности к неизвестному значению параметра θ (здесь и всюду в дальнейшем статистические оценки

величин будем помечать звёздочкой, чтобы они чётко отличались от неизвестных истинных значений) при $n \to \infty$ $P(|\theta^* - \theta| < \varepsilon) > 1 - \delta$, где ε, δ – сколь угодно малые величины.

При ограниченном объёме наблюдений оценка не должна иметь систематической ошибки – это свойство называют несмещённость, т.е. математическое ожидание оценки должно совпадать с неизвестным значением параметра

$M(\theta^*) = \theta$.

Эффективность оценки состоит в том, что дисперсия случайных отклонений от неизвестного значения параметра имеет минимально возможное значение

$D(\theta^*) \to \min$.

Как указывалось, при плане [*NUN*] результаты испытаний содержат только полные наработки; это классический тип выборки, для которой оптимальные оценки числовых характеристик находятся методом моментов независимо от закона распределения времени безотказной работы. В частности, математическое ожидание – это наработка на отказ $m_t^* = T_0^*$.

Среднее арифметическое значений не сгруппированной выборки является состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой математического ожидания

$$m_t^* = T_0^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i . \qquad (27)$$

Дисперсия D_t^* представляет собой математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины от её среднего значения, поэтому среднее арифметическое квадратов отклонений тоже является состоятельной несмещённой и асимптотически эффективной оценкой дисперсии; при замене неизвестного нам значение T_0 на его оценку T_0^*, формула для несмещённой оценки дисперсии имеет следующий вид

$$D_t^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (t_i - T_0^*)^2 . \qquad (28)$$

Оценки среднего квадратического отклонения σ_t^* и коэффициента вариации v_t^* рассчитываются по обычным формулам:

$$\sigma_t^* = \sqrt{D_t^*}, \qquad v_t^* = \frac{\sigma_t^*}{T_0^*} . \qquad (29)$$

Если закон распределения известен, то по найденным оценкам числовых характеристик можно рассчитать параметры закона. Для описания времени безотказной работы ИС наиболее часто используется однопараметрический экспоненциальный закон распределения. Этот закон соответствует случаю, когда интенсивность отказов примерно постоянна. Функция распределения $F(t)$, функция надёжности $P(t)$, плотность распределения $f(t)$ и интенсивность отказов $\lambda(t)$ соответственно равны

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad P(t) = e^{-\lambda t}, \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \lambda(t) = \lambda, \qquad (30)$$

где λ – параметр закона распределения.

Числовые характеристики

$m_t = T_0 = 1/\lambda$; $D_t = 1/\lambda^2$; $\sigma_t = 1/\lambda$; $v_t = 1$.

Если наблюдается процесс приработки или процесс износа и старения, процесс деградации, то наиболее часто используется двухпараметрический закон распределения Вейбулла

$$F(t) = 1 - e^{-(t/a)^b} = 1 - e^{-(\alpha\alpha t^b}, \quad f(t) = \frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1} e^{-(t/a)^b}, \qquad (31)$$

где a – параметр масштаба по времени безотказной работы;

$\alpha=1/a$ – параметр масштаба по интенсивности отказов;

b – параметр формы.

Числовые характеристики

$$m_t = a\gamma_1(b); \quad \sigma_t = a\gamma_2(b); \quad v_t = \gamma_3(b) = \gamma_2(b)/\gamma_1(b),$$

где $\gamma_1(b)=\Gamma(1+1/b)$; $\gamma_2(b)=\sqrt{\Gamma(1+2/b)-\gamma_1^2(b)}$; $\Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1}e^{-s}ds$ – гамма-функция (для значений коэффициентов $\gamma_1(b)$, $\gamma_2(b)$, $\gamma_3(b)$ имеются таблицы, см. приложение).

В зависимости от величины коэффициента формы b этот закон изменяет свой характер. Так при b=1 закон Вейбулла обращается в экспоненциальный закон, описывающий внезапные отказы; при b>2 он хорошо описывает процессы деградации, у которых интенсивность отказов со временем возрастает; при b<1 – описывает процесс приработки, у которого интенсивность отказов убывает со временем.

Для экспоненциального закона распределения оценка единственного параметра находится по формуле $\lambda^*=1/T_0^*$.

В законе распределения Вейбулла для нахождения оценки параметра формы нужно решить трансцендентное уравнение $v_t^*=\gamma_3(b^*)$ относительно $b^*=\gamma_3^{-1}(v_t^*)$, оценка параметра положения находится по формуле $a^*=m_t^*/\gamma_1(b^*)$. Значения коэффициентов $\gamma_1(b^*)$ и $\gamma_3^{-1}(v_t^*)$ могут быть рассчитаны по приближённым формулам ($1\le b \le 4$):

$$b = \gamma_3^{-1}(v) = 1 + \frac{1-v}{1.03 \cdot v - 0.0526} \quad \text{(погрешность } \pm 0{,}56\%\text{)};$$

$$\gamma_1(b)=1-0{,}51/b+0{,}61/b^2-0{,}1/b^3 \quad \text{(погрешность } \pm 0{,}13\%\text{)}.$$

5 Оценка показателей надежности по планам *[NUr]* методом максимального правдоподобия

Для усечённых выборок целесообразней всего использовать метод максимального правдоподобия. Только этот метод дает оптимальные статистические оценки, т.е. оценки, обладающие свойствами состоятельности, несмещённости, асимптотической эффективности и имеют асимптотически нормальный закон распределения. Метод максимального правдоподобия (МП-метод) позволяет обрабатывать любые статистические данные, при любых планах испытаний.. Универсальность МП-метода обусловлена тем, что статистическую задачу оптимального оценивания параметров он сводит к вероятностной задаче составления функции правдоподобия L, которая

представляет собой совместное распределение результатов независимых наблюдений

$L(\boldsymbol{x}/\theta)=P(x_1/\theta)\,P(x_2/\theta)\cdot\ldots\cdot P(x_n/\theta)$,

где $P(x_i/\theta)$ – условная вероятность реализации x_i в i-ом наблюдении при фиксированном векторе неизвестных параметров $\theta=|\theta_1, \theta_2,..., \theta_l|$.

Функцию правдоподобия рассматривают, как функцию вектора параметров, и максимально правдоподобные оценки (МП-оценки) находят из условия

$$L(\boldsymbol{x}/\theta)\to\max. \qquad (32)$$

В случае наиболее общих планов испытаний ([NRT], [NRr]) получаются многократно усечённые выборки. Они включают n_1 наработок t_1, $t_2,\ldots$, t_{n1}, завершившихся отказами, и n_2 наработок τ_1, $\tau_2,\ldots$, τ_{n2}, в которых отказы не успели произойти. Вероятность того, что отказ произойдёт в момент t (точней на интервале от t до $t+dt$) равна элементу вероятности $f(t)dt$. Вероятность безотказной работы за время τ равна $P(\tau)=1-F(\tau)$. Откуда функция правдоподобия равна

$$L=\prod_{i=1}^{n_1} f(t_i)dt_i\prod_{j=1}^{n_2}(1-F(\tau_j))\to\max\ .$$

Для упрощения решения задачи функцию правдоподобия логарифмируют и опускают дифференциалы

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n_1}\ln f(t_i)+\sum_{j=1}^{n_2}\ln(1-F(\tau_j))\to\max\ . \qquad (33)$$

Функция правдоподобия и её логарифм для двухпараметрического закона распределения Вейбулла имеют следующий вид:

$$L(a,\ b)=\prod_{i=1}^{n_1}\frac{b}{a}\left(\frac{t_i}{a}\right)^{b-1}e^{-(t_i/a)^b}\prod_{j=1}^{n_2}e^{-(\tau_j/a)^b}\to\max\ ,$$

$$\ln L(a,b)=n_1\ln b-n_1 b\ln a+(b-1)\sum_{i=1}^{n_1}\ln t_i-\left(\sum_{i=1}^{n_1}t_i^b+\sum_{j=1}^{n_2}\tau_j^b\right)/a^b\to\max\ . \qquad (34)$$

Найти оценки для параметров a^* и b^* можно непосредственно максимизирую функцию правдоподобия (34) одним из известных численных методов, например методом Ньютона, для этого имеется программное обеспечение. Для поиска максимума необходимо задавать начальные значения параметров. Итерационные методы медленно сходятся и вообще могут не сходиться. Процесс сходится тем быстрей, чем ближе начальные значения к точке максимума.

Вычисления могут быть упрощены, если составить и решить систему двух уравнений, продифференцировав выражение (31) по параметрам a и b.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial a} = -n_1 \dfrac{b}{a} + \left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} t_i^b + \sum\limits_{j=1}^{n_2} \tau_j^b\right) \dfrac{b}{a^{b+1}} = 0, \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial b} = \dfrac{n_1}{b} - n_1 \ln a + \sum\limits_{i=1}^{n_1} \ln t_i + \dfrac{\ln a\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} t_i^b + \sum\limits_{j=1}^{n_2} \tau_j^b\right)}{a^b} - \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} t_i^b \ln t_i + \sum\limits_{j=1}^{n_2} \tau_j^b \ln \tau_j\right)}{a^b} = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Решение полученной системы относительно a и b даёт следующие выражения для МП-оценок:

$$1 + \frac{b^*}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \ln t_i - b^* \frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1} t_i^{b^*} \ln t_i + \sum\limits_{j=1}^{n_2} \tau_j^{b^*} \ln \tau_j}{\sum\limits_{i=1}^{n_1} t_i^{b^*} + \sum\limits_{j=1}^{n_2} \tau_j^{b^*}} = 0, \tag{36}$$

$$a^* = \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1} t_i^{b^*} + \sum\limits_{j=1}^{n_2} \tau_j^{b^*}}{n_1} \right)^{1/b^*}. \tag{37}$$

Трансцендентное уравнение (36) не имеет аналитического решения, однако, оно легко решается, например, методом половинного деления, который всегда достаточно быстро сходится. Задача облегчается тем, что для всех устройств, у которых наблюдается приработка или износ и старение, диапазон возможных значений b невелик ($0{,}5 \le b \le 5$) и в этом диапазоне уравнение (36) имеет только один корень.

При однократно усечённых планах [NUT] и [NUr] в формулах (34), (36) все безотказные наработки имеют одинаковую длительность равную времени испытаний T и следовательно $\sum\limits_{j=1}^{n_2} \tau_j^{b^*} = n_2 T^{b^*}$, $\sum\limits_{j=1}^{n_2} \tau_j^{b^*} \ln \tau_j = n_2 T^{b^*} \ln T$.

В частном случае, если из априорной информации или результатов испытаний имеются достаточно веские основания считать, что закон распределения времени безотказной работы экспоненциальный или близок к экспоненциальному ($b \approx 1$), то формула (34) упрощается

$$a^* = \left(\sum_{i=1}^{n_1} t_i + \sum_{j=1}^{n_2} \tau_j \right) / n_1. \tag{38}$$

Упрощается и вид статистических данных, для оценки параметра a, которая одновременно является оценкой и наработки на отказ T_0, требуется знать только суммарную наработку всех устройств $t_\Sigma = \sum\limits_{i=1}^{n_1} t_i + \sum\limits_{j=1}^{n_2} \tau_j$ и суммарное число отказов $n = n_1$. В этом случае неважно, сколько устройств испытывалось и как долго каждое из них проработало, когда и какие устройства отказывали, т.е. все планы испытаний становятся эквивалентными, а значения t_Σ и n являются достаточной статистикой

$$T_0^* = a^* = t_\Sigma / n, \qquad \lambda^* = 1/T_0^* = n/t_\Sigma. \tag{39}$$

Вместе с тем, если из-за недостаточного объёма статистики или недостоверной априорной информации предположение об экспоненциальном законе распределения окажется ошибочным, то расчёт по формуле (36) может приводить к очень большой погрешности.

Мы обычно заинтересованы получить результат оценки надёжности как можно быстрей, для чего и используются планы с усечёнными выборками. Вместе с тем представляет большой практический интерес вопрос о том, как влияет сокращение времени испытаний на точность получаемых оценок.

6 Построение эмпирической функции распределения и гистограммы и проверка гипотезы о законе распределения

При ограниченном объёме статистических данных из-за их случайного разброса, как правило, невозможно однозначно ответить на вопрос о соответствии принятой математической модели результатам наблюдений, в частности, о правильности выбора закон распределения. Эта задача решается с помощью статистических критериев или критериев согласия.

Идея проверки статистических гипотез состоит в следующем. Выдвигается основная гипотеза H_0 и простая альтернативная гипотеза H_1. Альтернативных гипотез может быть несколько H_1, H_2, H_3,…, их называют сложной альтернативой. Задачу можно представить в следующем виде.

Гипотеза H_0		
	Принята	
Верна	да	нет
да	$1-\alpha$	α
нет	β	$1-\beta$

Возможны два вида ошибок:

гипотеза H_0 верна, но в результате проверки отвергнута, это ошибка первого рода;

гипотеза H_0 ошибочна, но принята, это ошибка второго рода.

Здесь α – вероятность ошибки первого рода, т.е. вероятность ошибочно отвергнуть правильную гипотезу, её называют уровнем значимости критерия;

β – вероятность ошибки второго рода, т.е. вероятность ошибочно принять неправильную гипотезу, величину $1-\beta$ называют мощностью критерия.

Вероятности α и β стремятся минимизировать.

Для решения задачи формируется некоторая случайная величина U, называемая критерием. Критерий должен отражать случайный разброс статистических данных и, в случае справедливости гипотезы H_0, иметь известную функцию распределения $F(u)$. Пусть по статистическим данным мера расхождения U примет значение u^*. Если вероятность события $U \geq u^*$ весьма мала, $P(U \geq u^*)=1 - F(u) \leq \alpha$, то гипотезу H_0 следует отвергнуть как малоправдоподобную в пользу альтернативной гипотезы H_1, если вероятность значительна, то отвергнуть гипотезу H_0 оснований нет. Обычно для α принимают значения 0,05; 0,02 или 0,01. В большинстве случаев строго

сформулировать альтернативные гипотезы не удаётся, поэтому не представляется возможным нормировать и рассчитывать мощность критерия.

Для проверки соответствия выбранного закона распределения статистическим данным чаще всего используются критерий Пирсона (критерий χ^2) и критерий Колмогорова. Осуществлять выбор закона распределения и проверять его по критериям целесообразно, если объем статистики достаточен, по крайней мере не менее 100 реализаций, иначе выводы будут мало достоверны.

Критерий Пирсона применим только для сгруппированных данных и здесь не рассматривается.

Исходными данными для проверки закона распределения по критерию Колмогорова является не сгруппированная выборка в виде вариационного ряда t_1, t_2, ..., t_n, по которому рассчитывается эмпирическая функция распределения $F^*(t_i)$. Так как эмпирическая функция представляет собой ступенчатую ломаную, она в каждой точке x_i имеет два значения $(i–1)/n$ и i/n.

Выдвигается гипотеза H_0, что случайная величина T имеет функцию распределения $F(t)$. В качестве меры расхождения между теоретическим и эмпирическим распределением рассматривается максимальное абсолютное расхождение $D_{\max}$ между функциями распределения $F^*(t_i)$, $F(t_i)$:

$$D_{\max} = \max_i \left| F^*(x_i) - F(x_i) \right|. \qquad (40)$$

При числе наблюдений n случайная величина $D_\lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$ имеет предельное распределение Колмогорова $P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$. Значения вероятности $P(\lambda)$ приведены в таблице 2.

Таблица 2

$\alpha = P(\lambda)$	0,20	0,10	0,05	0,02
λ	1,07	1,22	1,36	1,51

Если $D_{\max} \geq \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$, то гипотеза H_0 должна быть отвергнута на уровне значимости $\alpha = P(\lambda)$ как противоречащая статистическим данным, в противном случае отвергнуть гипотезу H_0 нет оснований. Вероятность α обычно принимают 0,05, 0,1 или даже 0,2, так как параметры теоретического закона распределения определяются по тем же статистическим данным, что и функция $F^*(x)$, и тогда формула (37) дает для $D_{\max}$ заниженные значения.

Моделирование определительных испытаний осуществляется методом статистических испытаний (Монте-Карло), который позволяет исследовать надёжность систем практически при любой самой общей постановке задачи,

снимая все ограничения, связанные с марковским характером процессов, стационарностью и т.д.

Суть метода Монте-Карло состоит в следующем. Создаётся модель процесса функционирования (отказы, восстановления, профилактика) исследуемой системы, алгоритм и компьютерная программа, имитирующие этот процесс. Проводятся многократные имитационные эксперименты и накапливаются статистические данные о траекториях процесса. На основе полученных данных методами математической статистики определяются показатели надёжности системы.

Особенность метода Монте-Карло заключается в том, что получаемые статистические оценки искомых параметров случайны. В соответствии с предельными теоремами теории вероятностей при бесконечном числе испытаний они сходятся по вероятности к искомым параметрам. При ограниченном числе испытаний N возникает погрешность, величина которой в силу закона больших чисел обратно пропорциональна корню квадратному из числа испытаний. Следовательно, для уменьшения погрешности на один порядок объем испытаний необходимо увеличить на два порядка. Это приводит к значительным затратам компьютерного времени. Увеличение сложности системы приводит к примерно пропорциональному увеличению затрат машинного времени, поэтому метод Монте-Карло наиболее эффективен при исследовании сложных систем, для которых отсутствует аналитическое решение, и при этом требования к точности решения находятся в разумных пределах. Вместе с тем, при многовариантных исследованиях высоконадёжных отказоустойчивых систем требуемый объём испытаний часто становится непомерно большим, и приходится применять специальные методы ускорения моделирования.

Основу алгоритмов моделирования составляет датчик случайных чисел (ДСЧ). В настоящее время обычно используются программные ДСЧ, это специальные программы, построенные на основе рекуррентных алгоритмов, такие программы встроены во все современные языки программирования и большинство пользовательских пакетов. Имеются и специальные языки статистического моделирования.

На выходе датчиков случайных чисел получают случайную величину r, имеющую равномерный закон распределения в интервале [0,1].

$$f(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \le r \le 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \qquad F(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < 0, \\ r & \text{при } 0 \le r \le 1, \\ 1 & \text{при } r > 1. \end{cases} \tag{41}$$

Строго говоря, ДСЧ вырабатывают последовательности не случайных, а так называемых псевдослучайных чисел. Они должны удовлетворять многим требованиям (равномерности, независимости, большому циклу повторяемости и т.д.), их проверяют по статистическим критериям

Важная область применения метода Монте-Карло связана с тем, что в отличие от реальных испытаний нам известно, какие исходные данные мы заложили в модель, т.е. «истинные» показатели надёжности. Это позволяет

оценивать точность используемых приближённых моделей, аналитических и статистических методов.

Моделирование случайных величин. Как известно, случайные величины могут быть непрерывными и дискретными (НСВ и ДСВ), они моделируются несколько по разному. Существует два метода формирования случайных величин с заданным законом распределения на основе ДСЧ, вырабатывающего равномерно распределенные случайные числа r в интервале [0,1]:

- метод обратной функции;
- метод, основанный на математическом смысле случайной величины.

В основе метода обратной функции лежит следующая теорема: какой бы закон распределения $F(x)$ ни имела случайная величина X, функция случайного аргумента $z(x)$, равная

$$z(x)= F(x), \tag{42}$$

имеет равномерное распределение в интервале [0,1]. Приравняв $z=r$ и решив уравнение (39) относительно x, получим

$$x=F^{-1}(r), \tag{43}$$

где $F^{-1}(r)$ – функция, обратная функции распределения $F(x)$.

Идея метода обратной функции показана на рис. 3. Этот метод удобен в тех случаях, когда существует аналитическое выражение для функции распределения $F(x)$ и обратной функции $F^{-1}(r)$.

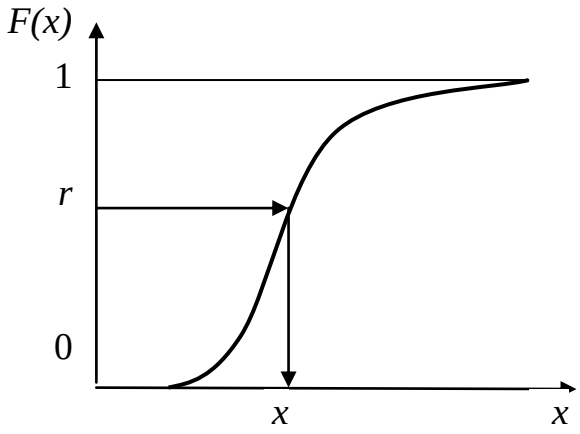


Рис. 3. Моделирование случайных величин методом обратной функции

В тех случаях, когда аналитическое выражение для $F(r)$ не существует, используют метод, основанный на математическом смысле случайной величины, для которого нет общей процедуры, пригодной для всех законов распределения.

Моделирование определительных испытаний в выполняется методом обратной функции.

Экспоненциальный закон распределения: $F(t)=1-e^{-\lambda t}=r$,

откуда

$$t= -\ln(1-r)/\lambda\ . \tag{44}$$

Закон распределения Вейбулла. Для закона Вейбулла решение получается аналогично экспоненциальному закону, откуда

$$t=a[-ln(1-r)]^{(1/b)}. \tag{45}$$

7 Задания

Варианты задания выбираются по двум последним цифрам шифра студента: s_1 – предпоследняя цифра; s_2 – последняя цифра шифра

7.1 Невосстанавливаемые системы

λ_0=0,00065+0,00005·s_1 1/час; α=0,94+0,005·s_2.

Рассчитать функцию надежности $P(t)$, функцию отказов $Q(t)$, коэффициенты повышения надежности по вероятности отказа W:

1. Нерезервированная система;
2. Резервирование замещением с нагруженным резервом и абсолютно надежным переключателем (постоянное резервирование);
3. Резервирование замещением с ненагруженным резервом и абсолютно надежным переключателем;
4. Резервирование замещением с нагруженным резервом и ненадежным переключателем;
5. Резервирование замещением с ненагруженным резервом и ненадежным переключателем.

Резервированные системы (см. рис.4.) состоят из основного элемента (О), одного резервного элемента (Р) и переключателя (П). Переключатель имеет один тип отказов – несрабатывание, вероятность успешного переключения α, вероятность несрабатывания (1–α).

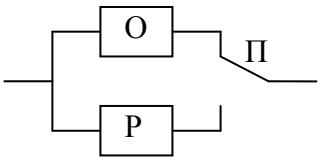


Рис. 4

Расчет функции надежности $P(t)$ и функции отказов $Q(t)$. Первое значение t_1=10 ч, следующие значения вычисляются по рекуррентной формуле $t_i = t_{i-1}\cdot 10^{1/5}$, $1 \le i \le 14$.

1. Нерезервированная система.

Функция надежности $P_1(t)=exp(-\lambda t)$, функция отказов $Q_1(t) = F(t) = 1 - P_1(t)$.

2. Резервирование замещением с нагруженным резервом и абсолютно надежным переключателем (постоянное резервирование, параллельное соединение).

Функция отказов $Q_2(t)=(Q_1(t))^2$, функция надежности $P_2(t)=1-Q_2(t)$, коэффициент повышения надежности по вероятности отказа $W_2= Q_1(t)/Q_2(t)$.

3. Резервирование замещением с ненагруженным резервом и абсолютно надежным переключателем.

Функция надежности $P_3(t)=(1+\lambda t)P_1(t)$, функция отказов $Q_3(t)=1-P_3(t)$, коэффициент повышения надежности по вероятности отказа $W_3= Q_1(t)/Q_3(t)$.

4. Резервирование замещением с нагруженным резервом и ненадежным переключателем.

Функция отказов $Q_4(t)=(1-\alpha)Q_1(t)+\alpha Q_2(t)$, функция надежности $P_4(t)=1-Q_4(t)$, коэффициент повышения надежности по вероятности отказа $W_4=Q_1(t)/Q_4(t)$.

5. Резервирование замещением с ненагруженным резервом и ненадежным переключателем.
6. Сделать выводы.

Функция надежности $P_5(t)=(1+\lambda t\alpha)P_1(t)$, функция отказов $Q_5(t)=1-P_5(t)$, коэффициент повышения надежности по вероятности отказа $W_{Q5}=Q_1(t)/Q_5(t)$.

Результаты расчетов представить в виде точечных зависимостей функции надежности $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$ $P_4(t)$, $P_5(t)$ и функции отказов $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, $Q_3(t)$, $Q_4(t)$, $Q_5(t)$, а также в виде графиков коэффициенты повышения надежности по вероятности отказа $W_2(t)$, $W_3(t)$, $W_4(t)$, $W_5(t)$.

7.2 Восстанавливаемые системы

Исходные данные для расчета: $\lambda_0=0{,}00065+0{,}00005\cdot s_1$ 1/час; $\lambda_р=0{,}5\cdot\lambda_0$ 1/час; $\lambda_л=0{,}3\cdot\lambda_0$ 1/час; $\lambda_ф=2+0{,}2\cdot s_1$ 1/час; $\mu_в=0{,}5+0{,}06\cdot s_2$ 1/час; $\mu_к=0{,}1+0{,}01\cdot s_1$ 1/час; $\mu_{пб}=0{,}8\cdot\mu_в$ 1/час; $\alpha=0{,}94+0{,}005\cdot s_2$, $\beta=0{,}7$; $\gamma=0{,}5$.

Рассчитать только те значения, которые используются в варианте задачи.

Задание. Для заданного варианта задачи построить математическую модель марковского процесса с учётом особенностей системы, условий её работы, дисциплины обслуживания и восстановления:

1. Составить множество состояний, в которых может находиться система, и разбиения ее подмножества работоспособных и неработоспособных состояния; составить размеченный граф переходов марковского процесса.

2. Составить систему алгебраических уравнений Колмогорова для стационарного режима процесса отказов-восстановлений в матричной форме, проверить правильность уравнений – суммы коэффициентов по столбцам должна равняться нулю; заменить одного из уравнений нормирующим условием (желательно последнее).

3. Решить систему уравнений Колмогорова.

4. По формулам , (22), (23) рассчитать показатели надежности $k_г$, $k_п$, $T_в$, T_0.

5. Рассчитать коэффициент повышения надежности по простою $W=\lambda_0/(\mu_в\cdot k_п)$.

6. Сделать выводы.

Номер варианта задачи N определяется по последним двум цифрам номера шифра s: $N=s$, при $01\le s\le 50$,

$N=s-50$, при $51\le s\le 99$,

$N=50$, при $s=00$.

Вариант 1

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов элементов λ_0, интенсивность восстановления $\mu_в$. Ремонтная бригада отсутствует на месте, интенсивность прибытия бригады $\mu_{пб}$. Переключатель абсолютно надежен.

Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются путем периодического контроля с интенсивностью $\mu_к$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 2

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов элементов λ_0, Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются только при отказе системы. Переключатель абсолютно надежен. Имеется резерв времени, развитие отказа функционирования происходит с интенсивностью $\lambda_ф$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 3

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегченный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность отказов резервного элементов $\lambda_р$, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются путем периодического контроля с интенсивностью $\mu_к$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 4

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов элементов λ_0, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются путем периодического контроля с интенсивностью $\mu_к$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 5

Система дублирована, резервирование замещением, резерв ненагруженный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Имеется резерв времени, развитие отказа функционирования происходит с интенсивностью $\lambda_ф$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 6

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегчённый, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов работающего элемента λ_0, интенсивность отказов резервного элемента $\lambda_р$. Отказы резервного элемента явные. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Переключатель может срабатывать ложно с интенсивностью $\lambda_л$. интенсивность восстановления $\mu_в$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 7

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов элементов λ_0, отказы резервного элемента скрытые, они обнаруживаются только при отказе системы, интенсивность восстановления $\mu_в$. Ремонтная бригада с вероятностью γ присутствует и с вероятностью $(1 - \gamma)$ отсутствует на месте, интенсивность прибытия бригады $\mu_{пб}$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 8

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов элемента λ_0. Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются путем периодического контроля с интенсивностью $\mu_к$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Переключатель может срабатывать ложно с интенсивностью $\lambda_л$. интенсивность восстановления $\mu_в$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 9

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегченный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность отказов резервного элемента $\lambda_р$, его отказы явные, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Имеется резерв времени, развитие отказа функционирования происходит с интенсивностью $\lambda_ф$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 10

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегченный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность отказов резервного элементов $\lambda_р$, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Отказы

резервного элемента скрытые и обнаруживаются путем периодического контроля с интенсивностью $\mu_к$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 11

Система дублирована, резервирование замещением, резерв ненагруженный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность восстановления $\mu_в$. Ремонтная бригада с вероятностью γ присутствует и с вероятностью $(1 - \gamma)$ отсутствует на месте, интенсивность прибытия бригады $\mu_{пб}$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 12

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегчённый, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов работающего элемента λ_0, интенсивность отказов резервного элемента $\lambda_р$. Отказы резервного элемента скрытые отказы обнаруживаются только при отказе системы. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Переключатель может срабатывать ложно с интенсивностью $\lambda_л$. интенсивность восстановления $\mu_в$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 13

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегченный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность отказов резервного элементов $\lambda_р$, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются только при отказе системы. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 14

Система дублирована, резервирование замещением, резерв ненагруженный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Имеется резерв времени, развитие отказа функционирования происходит с интенсивностью $\lambda_ф$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 15

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегчённый, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов работающего элемента λ_0, интенсивность отказов резервного элемента $\lambda_р$. Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются путем периодического контроля с интенсивностью $\mu_к$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Переключатель может срабатывать ложно с интенсивностью $\lambda_л$. Интенсивность восстановления $\mu_в$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 16

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегченный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность отказов резервного элементов $\lambda_р$, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Отказы резервного элемента скрытые, с вероятностью β они обнаруживаются путем периодического контроля и с вероятностью $1-\beta$ обнаруживаются при отказе системы. Интенсивность контроля $\mu_к$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 17

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов элементов λ_0, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Отказы резервного элемента скрытые, с вероятностью β они обнаруживаются путем периодического контроля и с вероятностью $1-\beta$ обнаруживаются при отказе системы. Интенсивность контроля $\mu_к$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 18

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегченный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность отказов резервного элемента $\lambda_р$. Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются путем периодического контроля с интенсивностью $\mu_к$, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель абсолютно надежен. Имеется резерв времени, развитие отказа функционирования происходит с интенсивностью $\lambda_ф$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 19

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов элементов λ_0, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются только при отказе системы. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 20

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов элементов λ_0, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Отказы резервного элемента скрытые и обнаруживаются путем периодического контроля с интенсивностью $\mu_к$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 21

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегчённый, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов работающего элемента λ_0, интенсивность отказов резервного элемента $\lambda_р$. Отказы резервного элемента скрытые, с вероятностью β они обнаруживаются путем периодического контроля и с вероятностью $1-\beta$ обнаруживаются при отказе системы. Интенсивность контроля $\mu_к$. Срабатывание переключателя после отказа основного элемента совершенно надежное, переключатель может срабатывать ложно с интенсивностью $\lambda_л$. интенсивность восстановления после отказов элементов и ложных срабатываний переключателя $\mu_в$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности

Вариант 22

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегченный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность отказов резервного элементов $\lambda_р$, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Отказы резервного элемента скрытые и обнаруживаются путем периодического контроля с интенсивностью $\mu_к$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 23

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов элементов λ_0, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются только при отказе системы. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 24

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегченный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность отказов резервного элементов $\lambda_р$, отказы элемента явные, интенсивность восстановления $\mu_в$. Ремонтная бригада отсутствует на месте, интенсивность прибытия бригады $\mu_{пб}$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 25

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов элементов λ_0, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Отказы резервного элемента скрытые и обнаруживаются путем периодического контроля с интенсивностью $\mu_к$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 26

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов элементов λ_0, отказы резервного элемента скрытые и обнаруживаются только при отказе системы, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель абсолютно надежен. Имеется резерв времени, развитие отказа функционирования происходит с интенсивностью $\lambda_ф$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 27

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов элементов λ_0, отказы резервного элемента скрытые, они обнаруживаются только при отказе системы, интенсивность восстановления $\mu_в$. Ремонтная бригада отсутствует на месте, интенсивность прибытия бригады $\mu_{пб}$. Переключатель срабатывает с

вероятностью α. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 28

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов элементов λ_0, Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются путем периодического контроля с интенсивностью $\mu_к$, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель абсолютно надежен. Имеется резерв времени, развитие отказа функционирования происходит с интенсивностью $\lambda_ф$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 29

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегченный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность отказов резервного элементов $\lambda_р$, отказы элемента явные, интенсивность восстановления $\mu_в$. Ремонтная бригада с вероятностью γ присутствует и с вероятностью $(1 - \gamma)$ отсутствует на месте, интенсивность прибытия бригады $\mu_{пб}$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 30

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов элементов λ_0, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются путем периодического контроля с интенсивностью $\mu_к$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 31

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегченный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность отказов резервного элементов $\lambda_р$, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются путем периодического контроля с интенсивностью $\mu_к$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 32

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов элемента λ_0. Отказы резервного элемента скрытые, с вероятностью β они обнаруживаются путем периодического контроля и с вероятностью $1-\beta$ обнаруживаются при отказе системы. Интенсивность контроля $\mu_к$. Срабатывание переключателя после отказа основного элемента совершенно надежное, переключатель может срабатывать ложно с интенсивностью $\lambda_л$. интенсивность восстановления $\mu_в$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 33

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов элементов λ_0, отказы резервного элемента явные, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Имеется резерв времени, развитие отказа функционирования происходит с интенсивностью $\lambda_ф$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 34

Система дублирована, резервирование замещением, резерв ненагруженный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов работающего элемента λ_0, интенсивность отказов резервного элемента $\lambda_р$. Отказы резервного элемента явные. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Переключатель может срабатывать ложно с интенсивностью $\lambda_л$. интенсивность восстановления $\mu_в$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 35

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегченный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность отказов резервного элементов $\lambda_р$, отказы элемента явные, интенсивность восстановления $\mu_в$. Ремонтная бригада отсутствует на месте, интенсивность прибытия бригады $\mu_{пб}$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 36

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов элемента λ_0. Отказы резервного элемента явные. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Переключатель может срабатывать ложно с интенсивностью $\lambda_л$. интенсивность

восстановления $\mu_в$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 37

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются путем периодического контроля с интенсивностью $\mu_к$, интенсивность восстановления $\mu_в$. Ремонтная бригада отсутствует на месте, интенсивность прибытия бригады $\mu_{пб}$. Переключатель абсолютно надежен. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 38

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов элементов λ_0, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Отказы резервного элемента скрытые, с вероятностью β они обнаруживаются путем периодического контроля и с вероятностью $1-\beta$ обнаруживаются при отказе системы. Интенсивность контроля $\mu_к$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 39

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов элементов λ_0, Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются путем периодического контроля с интенсивностью $\mu_к$, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель абсолютно надежен. Имеется резерв времени, развитие отказа функционирования происходит с интенсивностью $\lambda_ф$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 40

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов элементов λ_0, отказы резервного элемента явные, интенсивность восстановления $\mu_в$. Ремонтная бригада с вероятностью γ присутствует и с вероятностью $(1-\gamma)$ отсутствует на месте, интенсивность прибытия бригады $\mu_{пб}$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 41

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегченный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность отказов резервного элемента $\lambda_р$, его отказы скрытые и обнаруживаются только при отказе системы, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Имеется резерв времени, развитие отказа функционирования происходит с интенсивностью $\lambda_ф$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 42

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегченный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность отказов резервного элемента $\lambda_р$. Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются путем периодического контроля с интенсивностью $\mu_к$, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель абсолютно надежен. Имеется резерв времени, развитие отказа функционирования происходит с интенсивностью $\lambda_ф$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 43

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегченный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность отказов резервного элементов $\lambda_р$, отказы элемента явные, интенсивность восстановления $\mu_в$. Ремонтная бригада с вероятностью γ присутствует и с вероятностью $(1 - \gamma)$ отсутствует на месте, интенсивность прибытия бригады $\mu_{пб}$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 44

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегченный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность отказов резервного элементов $\lambda_р$, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Отказы резервного элемента скрытые, с вероятностью β они обнаруживаются путем периодического контроля и с вероятностью $1-\beta$ обнаруживаются при отказе системы. Интенсивность контроля $\mu_к$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 45

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегчённый, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов работающего элемента λ_0, интенсивность отказов резервного элемента $\lambda_р$. Отказы резервного элемента скрытые отказы обнаруживаются только при отказе системы. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Переключатель может срабатывать ложно с интенсивностью $\lambda_л$. интенсивность восстановления $\mu_в$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 46

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегченный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность отказов резервного элементов $\lambda_р$, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются только при отказе системы. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 47

Система дублирована, резервирование замещением, резерв нагруженный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов элементов λ_0, Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются только при отказе системы. Переключатель абсолютно надежен. Имеется резерв времени, развитие отказа функционирования происходит с интенсивностью $\lambda_ф$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 48

Система дублирована, резервирование замещением, резерв ненагруженный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность восстановления $\mu_в$. Ремонтная бригада отсутствует на месте, интенсивность прибытия бригады $\mu_{пб}$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 49

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегчённый, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов работающего элемента λ_0, интенсивность отказов резервного элемента $\lambda_р$. Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются путем периодического контроля с

интенсивностью $\mu_к$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Переключатель может срабатывать ложно с интенсивностью $\lambda_л$. интенсивность восстановления $\mu_в$. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Вариант 50

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегченный, восстановление ограниченное. Интенсивность отказов работающего элементов λ_0, интенсивность отказов резервного элемента $\lambda_р$, Отказы резервного элемента могут быть как явными, так и скрытыми, вероятность того, что отказ явный равна β, скрытые отказы обнаруживаются только при отказах системы, интенсивность восстановления $\mu_в$. Ремонтная бригада с вероятностью γ присутствует и с вероятностью $(1 - \gamma)$ отсутствует на месте, интенсивность прибытия бригады $\mu_{пб}$. Переключатель срабатывает с вероятностью α. Составить граф переходов марковского процесса и систему уравнений Колмогорова. Рассчитать стационарные показатели надежности.

7.3 Моделирование определительных испытаний

Исходные данные: a=2000–100s_2 b=2,25+0,05(s_1+s_2).

1 Осуществить моделирование методом Монте-Карло наработок до отказа, распределенных по закону Вейбулла, по плану определительных испытаний [NUN], N=200.

2 Оценить числовые характеристики методом моментов по выборке, полученной по плану [NUN]: $m_t^*=T_0^*$, D_t^*, σ_t^*, v_t^*. Рассчитать среднюю наработку на отказ T_0 по заданным значениям a и b; вычислить абсолютную величину статистической относительной погрешности $\delta_с=|(T_0 - T_0^*)/ T_0|$.

3 Оценить параметры закона распределения Вейбулла a^* и b^*; сравнить значения a^*, b^* со значениями a, b.

4 Построить теоретическую $F(t)$ и статистическую $F^*(t)$ функции распределения, проверить закон распределения по критерию Колмогорова.

5 Из полной выборки получить однократно усеченные выборки по плану [NUr], r = 150, 100, 50, 20.

6 Определить статистические оценки параметров a^* и b^* закона распределения Вейбулла МП-методом для выборок по плану [NUr] при r=150, 100, 50, 20.

7 Рассчитать средние наработки на отказ T_0^* для выборок по плану [NUr] при законе распределения Вейбулла и экспоненциальном законе распределения.

8 Рассчитать относительное время испытаний для усеченных выборок $\tau_r=T_и(r)/T_и(200)$ и вычислить абсолютные величины дополнительной относительной погрешности для закона распределения Вейбулла и экспоненциального закона распределения $\delta_r=|(T_0(200)–T_0^*(r))/T_0(200)|$. Построить зависимости $\delta_r=f(\tau_r)$, r=150, 100, 50, 20.

9 Сделать выводы.

8 Примеры

8.1 Невосстанавливаемые системы

λ_0=0,001 1/час; α=0,95

Расчет функции надежности $P(t)$ и функции отказов $Q(t)$. Первое значение t_1=10 ч, следующие значения вычисляются по рекуррентной формуле $t_i = t_{i-1} \cdot 10^{1/5}$, $1 \le i \le 14$.

1 Нерезервированная система. Функция надежности $P_1(t)=exp(-\lambda t)$, функция отказов $Q_1(t) = F(t) = 1 - P_1(t)$.

2 Резервирование замещением с нагруженным резервом и абсолютно надежным переключателем. Функция отказов $Q_2(t)=(Q_1(t))^2$, функция надежности $P_2(t)=1-Q_2(t)$.

3 Резервирование замещением с ненагруженным резервом и абсолютно надежным переключателем. Функция надежности $P_3(t)=(1+\lambda t)P_1(t)$, функция отказов $Q_3(t)=1-P_3(t)$.

4 Резервирование замещением с нагруженным резервом и ненадежным переключателем. Функция отказов $Q_4(t)=(1-\alpha)Q_1(t)+\alpha Q_2(t)$, функция надежности $P_4(t)=1-Q_4(t)$.

5 Резервирование замещением с ненагруженным резервом и ненадежным переключателем. Функция надежности $P_5(t)=(1+\lambda t\alpha)P_1(t)$, функция отказов $Q_5(t)=1-P_5(t)$,

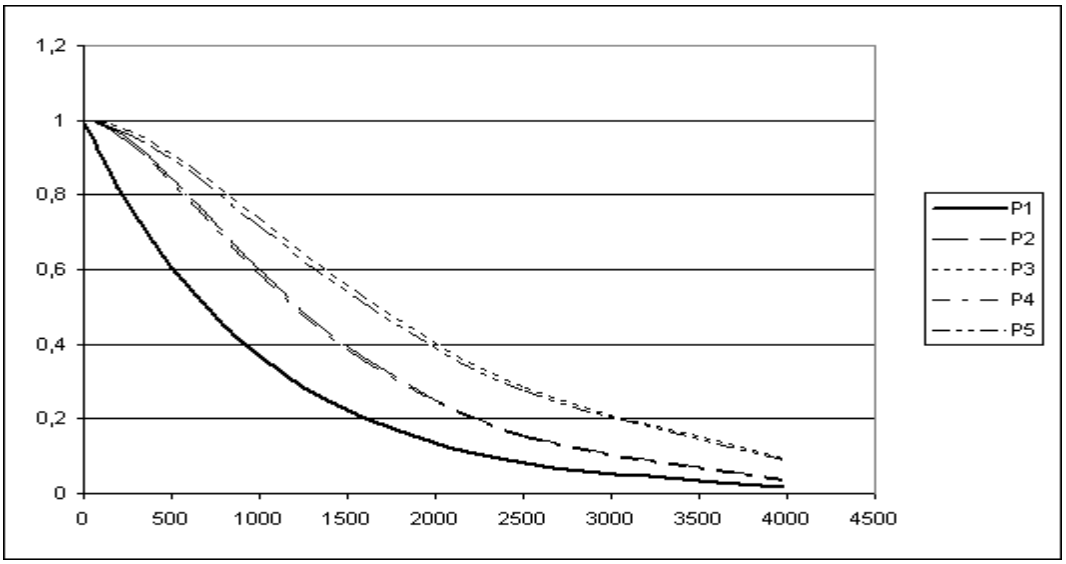
i	***t***	$P_1(t)$	$P_2(t)$	$P_3(t)$	$P_4(t)$	$P_5(t)$
1	10	0,99	0,9999	0,99995	0,9994	0,9995
2	16	0,9843	0,9998	0,99988	0,999	0,9991
3	25	0,9752	0,9994	0,99969	0,9982	0,9985
4	40	0,961	0,9985	0,99923	0,9966	0,9973
5	63	0,9389	0,9963	0,99809	0,9934	0,9951
6	100	0,9048	0,9909	0,99532	0,9866	0,9908
7	158	0,8534	0,9785	0,98869	0,9723	0,9819
8	251	0,7779	0,9507	0,97327	0,942	0,9635
9	398	0,6716	0,8921	0,93895	0,8811	0,9256
10	631	0,5321	0,7811	0,8678	0,7686	0,851
11	1000	0,3679	0,6004	0,73576	0,5888	0,7174
12	1585	0,205	0,3679	0,52982	0,3598	0,5136
13	2512	0,0811	0,1557	0,28487	0,1519	0,2747
14	3981	0,0187	0,037	0,09297	0,0361	0,0893
i	***t***	$Q_1(t)$	$Q_2(t)$	$Q_3(t)$	$Q_4(t)$	$Q_5(t)$
1	10	0,0100	0,0001	0,00005	0,0006	0,0005
2	16	0,0157	0,0002	0,00012	0,001	0,0009
3	25	0,0248	0,0006	0,00031	0,0018	0,0015
4	40	0,0390	0,0015	0,00077	0,0034	0,0027

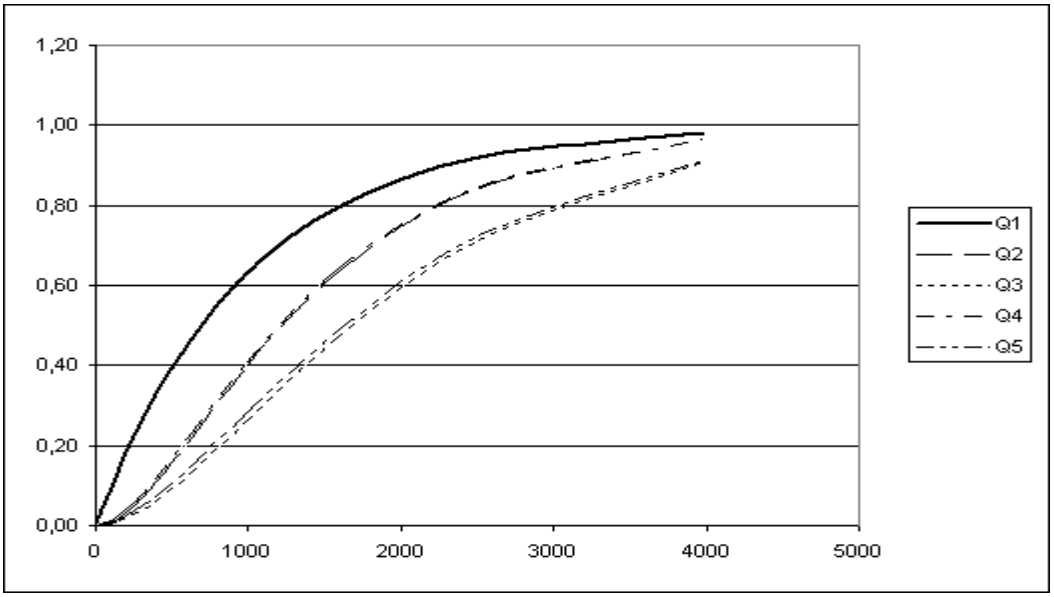
5	63	0,0611	0,0037	0,00191	0,0066	0,0049
6	100	0,0952	0,0091	0,00468	0,0134	0,0092
7	158	0,1466	0,0215	0,01131	0,0277	0,0181
8	251	0,2221	0,0493	0,02673	0,058	0,0365
9	398	0,3284	0,1079	0,06105	0,1189	0,0744
10	631	0,4679	0,2189	0,13220	0,2314	0,149
11	1000	0,6321	0,3996	0,26424	0,4112	0,2826
12	1585	0,7950	0,6321	0,47018	0,6402	0,4864
13	2512	0,9189	0,8443	0,71513	0,8481	0,7253
14	3981	0,9813	0,9630	0,90703	0,9639	0,9107

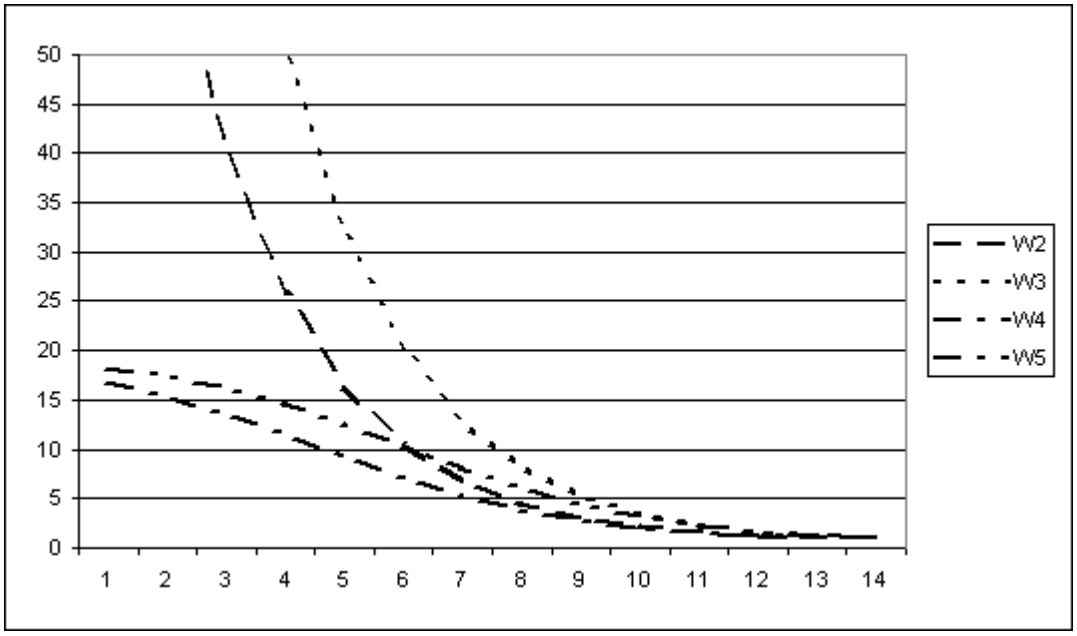
Расчет коэффициентов повышения надежности по вероятности отказа $W_i = Q_1(t)/ Q_i(t)$.

i	t	$W_2(t)$	$W_3(t)$	$W_4(t)$	$W_5(t)$
1	10	100,50	200,33	16,82	18,27
2	16	63,60	126,53	15,40	17,39
3	25	40,31	79,96	13,59	16,16
4	40	25,62	50,57	11,48	14,54
5	63	16,35	32,03	9,25	12,55
6	100	10,51	20,34	7,12	10,34
7	158	6,82	12,96	5,28	8,11
8	251	4,50	8,31	**3,83**	6,09
9	398	**3,04**	5,38	2,76	4,41
10	631	2,14	**3,54**	2,02	**3,14**
11	1000	1,58	2,39	1,54	2,24
12	1585	1,26	1,69	1,24	1,63
13	2512	1,09	1,28	1,08	1,27
14	3981	1,02	1,08	1,02	1,08

Результаты расчетов представлены в виде точечных зависимостей функции надежности $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$ $P_4(t)$, $P_5(t)$ и функции отказов, $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, $Q_4(t)$, $Q_5(t)$, а также в виде графиков коэффициенты повышения надежности по вероятности отказа $W_2(t)$, $W_3(t)$, $W_4(t)$, $W_5(t)$.


1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
4500
P1
P2
P3
P4
P5


1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
0
1000
2000
3000
4000
5000
Q1
Q2
Q3
Q4
Q5


50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
W2
W3
W4
W5

Выводы

1 Системы с ненагруженным резервом значительно надежней, чем с нагруженным.

2 Для случая, когда вероятность срабатывания переключателя $\alpha = 0{,}95$, его ненадежность тоже снижает надежность системы.

3 Резервированная система не менее чем в 2–3 раза сложней и дороже не резервированной, поэтому и ее надежность должна быть соответственно выше. Как следует из графиков и таблиц (значения выделены), это условие выполняется при времени работы в пределах не более 251–631 часов. Средняя наработка на отказ не резервированной системы $T_0 = 1/\lambda_0 = 1000$ часов. Резервирование без восстановления может быть эффективным, если время работы, хотя бы в 2 раза, меньше средней наработки на отказ. Если время работы всего 10 часов, то при надежном переключателе эффективность резервирования 100–200 раз и при ненадежном переключателе 17–18 раз.

8.2 Восстанавливаемые системы

Система дублирована, резервирование замещением, резерв облегченный, восстановление неограниченное. Интенсивность отказов основного элементов λ_0, резервного элементов $\lambda_р$, интенсивность восстановления $\mu_в$. Переключатель срабатывает с вероятностью α и не срабатывает с вероятностью $(1-\alpha)$. Отказы резервного элемента явные. Задан граф переходов марковского процесса. Разметить граф, составить систему уравнений Колмогорова и проверить правильность ее составления. Рассчитать стационарные показатели надежности.

Исходные данные: λ_0=0,001 1/час; $\lambda_р$=0,0005 1/час; $\mu_в$=2 1/час; α=0,95, .

Таблица кодировки состояний элементов

Основной элемент (О)	0	Работоспособное состояние
	1	Отказ и восстановление
Резервный элемент (Р)	0	Работоспособное состояние
	1	Отказ и восстановление
Переключатель (П)	0	Срабатывание
	1	Несрабатывание

Таблица кодировки состояний системы (С)

С	О	Р	П	Состояния
e_0	0	0	0	Система полностью исправна
e_0	1	0	0	Отказал основной элемент, произошло переключение на резерв.
e_1	1	0	1	Отказал основной элемент, не сработал переключатель (отказ типа несрабатывание).
e_0	0	1	0	Отказал резервный элемент.
e_1	1	1	0	Отказали основной и резервный элементы.

Таблица переходов марковского процесса

Переходы	События
«000» → «100»	отказ основного элемента и срабатывание переключателя
«000» → «101»	отказ основного элемента и несрабатывание переключателя
«000» → «010»	отказ резервного элемента
«100» → «110», «010» → «110»	отказ основного (работающего) элемента
«100» → «000», «010» → «000», «101» → «000», «110» → «100» «110» → «010»	восстановление одного элемента или элемента и переключателя

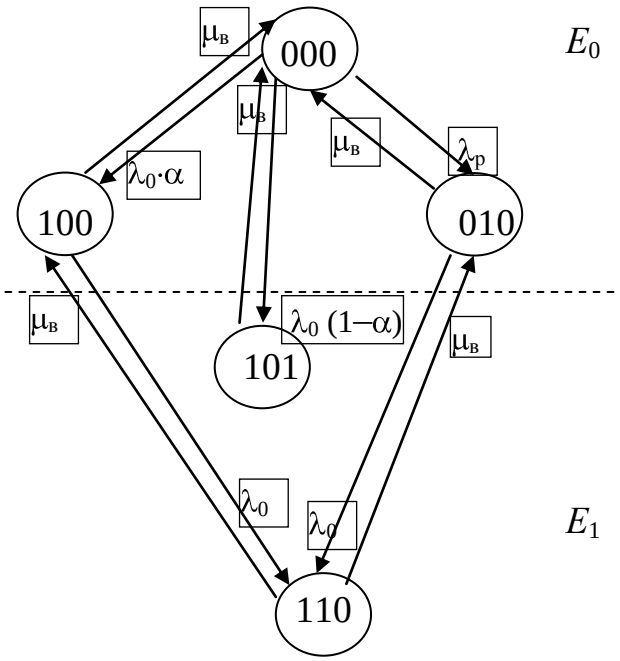
<u>Решение</u>

Решение начинается с разметки графа на основе таблицы переходов.

Переход «000» → «100» происходит при отказе основного элемента и успешном срабатывании переключателя с интенсивностью $\lambda_0\alpha$, переход «000» → «101» происходит при отказе основного элемента и несрабатывании переключателя с интенсивностью $\lambda_0(1-\alpha)$. Переход «000» → «010» происходит при отказе резервного элемента с интенсивностью $\lambda_р$. Переходы «100» → «110» и «010» → «110» происходят при отказе основного или резервного элемента в режиме работы с интенсивностью λ_0.

При восстановлении переходы происходят в обратном порядке. Переходы «100» → «000», «010» → «000», «101» → «000» происходят при восстановлении одного элемента или элемента и переключателя с интенсивностью $\mu_в$. Переходы «110» → «100» и «110» → «010» происходят параллельно с интенсивностью $\mu_в$, так как по условию восстановление неограниченное, т.е. работает одновременно две бригады.

По заданному графу и таблице переходов марковского процесса строится размеченный граф.



На основе графа составлены система уравнений Колмогорова в алгебраической и матричной формах.

$$\begin{cases} -p_{000}\lambda_0\alpha - p_{000}\lambda_0(1-\alpha) - p_{000}\lambda_p + p_{100}\mu_в + p_{010}\mu_в + p_{101}\mu_в = 0, \\ p_{000}\lambda_0\alpha - p_{100}\mu_в - p_{100}\lambda_0 + p_{110}\mu_в = 0, \\ p_{000}\lambda_p - p_{010}\mu_в - p_{010}\lambda_0 + p_{110}\mu_в = 0, \\ p_{000}\lambda_0(1-\alpha) - p_{101}\mu_в = 0, \\ p_{100}\lambda_0 + p_{010}\lambda_0 - p_{110}2\mu_в = 0, \\ p_{000} + p_{100} + p_{010} + p_{101} + p_{110} = 1 \end{cases}$$

Расширенная матрица коэффициентов

	p_{000}	p_{100}	p_{010}	p_{101}	p_{110}	b
s_{000}	$-\lambda_0\alpha-\lambda_0(1-\alpha)-\lambda_p$	$\mu_в$	$\mu_в$	$\mu_в$	0	0
s_{100}	$\lambda_0\alpha$	$-\mu_в-\lambda_0$	0	0	$\mu_в$	0
s_{010}	λ_p	0	$-\mu_в-\lambda_0$	0	$\mu_в$	0
s_{101}	$\lambda_0(1-\alpha)$	0	0	$-\mu_в$	0	0
s_{110}	0	λ_0	λ_0	0	$-\mu_в-\mu_в$	0
НУ	1	1	1	1	1	1

Исходная матрица числовых значений

		p_{000}	p_{100}	p_{010}	p_{101}	p_{110}	b
$\overline{\overline{A}} \mid \overline{b} =$	s_{000}	-0,0015	2	2	2	0	0
	s_{100}	0,00095	-2,001	0	0	2	0
	s_{010}	0,0005	0	-2,001	0	2	0
	s_{101}	0,00005	0	0	-2	0	0
	s_{110}	0	0,001	0,001	0	-4	0
	НУ	1	1	1	1	1	1

Проверка показывает, что матрица составлена правильно.

Преобразованная матрица

	p_{000}	p_{100}	p_{010}	p_{101}	p_{110}
s_{000}	-0,0015	2	2	2	0
s_{100}	0,00095	-2,001	0	0	2
s_{010}	0,0005	0	-2,001	0	2
s_{101}	0,00005	0	0	-2	0
НУ	1	1	1	1	1

Обратная матрица $\overline{\overline{A}}^{-1}$

-0,7496	-0,2498	-0,2498	-0,25	**0,9993**	$\boldsymbol{p_{000}}$
0,2496	-0,25	0,2498	0,2499	**0,0005**	$\boldsymbol{p_{100}}$
0,2498	0,2498	-0,2499	0,2499	**0,0002**	$\boldsymbol{p_{010}}$
-2E-05	-6E-06	-6E-06	-0,5	**2E-05**	$\boldsymbol{p_{101}}$
0,2501	0,25	0,25	0,2501	**2E-07**	$\boldsymbol{p_{110}}$

В результате решения с использованием возможностей *MS Excel* получены вероятности всех состояний системы: p_{000}, p_{100}, p_{010}, p_{101}, p_{110}.

В рассматриваемом нами случае

$k_г = p_{000}+p_{100}+p_{010} = 0{,}999975$, $k_п = p_{101}+p_{110}=0{,}000025$,

$T_в=(p_{101}/\mu_в+ p_{110}/2\mu_в)/(p_{101}+p_{110})= 0{,}498$ ч., $T_0= T_в (1/k_п–1)= 19799$ ч.

Коэффициент повышения надежности $W=\lambda_0/(\mu_в \cdot k_п) =19{,}97$.

Вывод. Система достаточно простая. Надежность резервированной системы с восстановлением получилась высокой, средняя наработка между отказами более двух лет, резервирование с восстановлением повышает надежность в 20 раз. Повышение вероятности срабатывания переключателя может еще больше повысить надежность.

8.3 Моделирование определительных испытаний

Исходные данные: a=2000 b=3,2.

Решение.

Осуществляем моделирование методом Монте-Карло наработок до отказа, распределенных по закону Вейбулла, по плану определительных испытаний [*NUN*], N=200 (см. результаты моделирования).

Оцениваем числовые характеристики методом моментов (24) – (26) по выборке, полученной по плану [*NUN*]: $m_t^*=T_0^*$, D_t^*, σ_t^*, v_t^* и параметры закона распределения Вейбулла $b^*=\gamma_3^{-1}(v_t^*)$ и $a^*= m_t^*/\gamma_1(b^*)$. Рассчитываем среднюю наработку на отказ $T_0=a\cdot\gamma_1(b)$ по заданным значениям a и b; вычисляем абсолютную величину статистической относительной погрешности $\delta_c=|(T_0 - T_0^*)/ T_0|$.

По вариационному ряду строим теоретическую $F(t)$ и статистическую $F^*(t)$ функции распределения, проверяем закон распределения по критерию Колмогорова.

a= 2000 b= 3,2

№	r	t	$t_{вр}$	$F^*(t)$	$F(t)$	$(\|F^*-F\|)$	$(t-m_t^*)^2$
1	0,647864	2026,935	559,77	0,005	0,016852	0,01185203	1563650,
2	0,112706	1029,904	596,13	0,01	0,020573	0,01057311	1474030,
3	0,31046	1468,002	678,33	0,015	0,03094	0,01594012	1281185,36
4	0,553856	1870,454	697,91	0,02	0,033838	0,01383794	1237263,59
5	0,630978	1998,06	759,80	0,025	0,044175	0,01917502	1103395,43
...	...	...	...	...	...	...	...
196	0,841255	2420,02	3050,69	0,98	0,978968	0,00103173	1538755,74
197	0,645982	2023,694	3067,76	0,985	0,980381	0,00461905	1581371,37
198	0,119749	1050,881	3109,85	0,99	0,983535	0,00646547	1689011,73
199	0,268641	1390,986	3270,03	0,995	0,991953	0,00304703	2131000,63
200	0,668789	2063,386	3467,90	1	0,997032	0,00296786	2747861,11

Σ= 362046 D_{max}= 0,04009 Σ=

$m_t^*=T_o^*$= 1810 ч. D_λ= 0,09617 6,6E+07

D_t^*= 331839

σ_t^*= 576,05
v_t^*= 0,3182
b^*= 3,5
$\gamma_1(b^*)$= 0,8997
a^*= 2012 ч.
$\gamma_1(b)$= 0,8957
T_0= 1791 ч.
δ_c= 0,01051

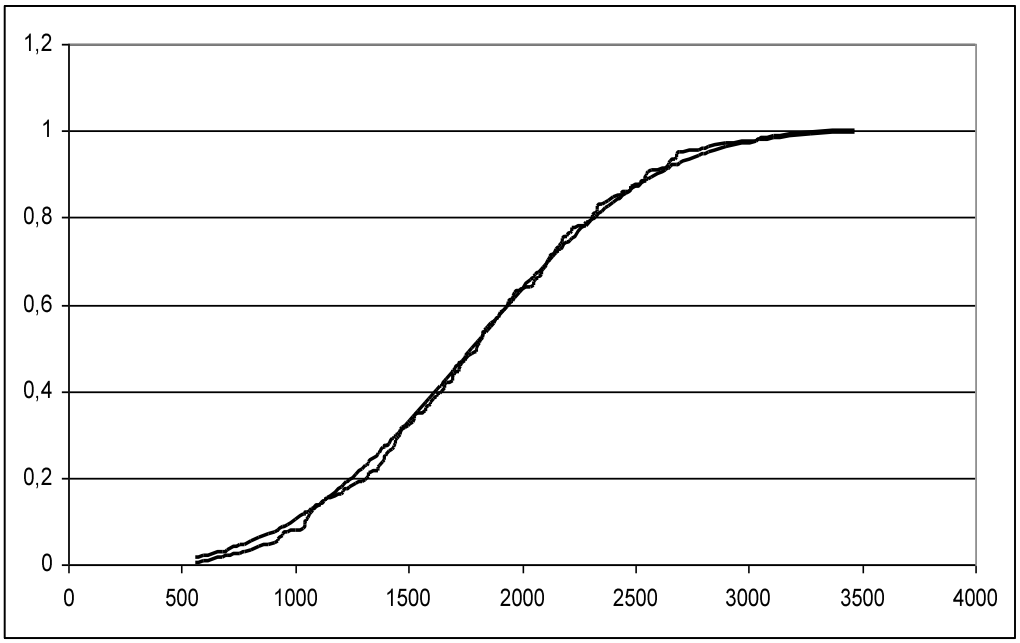


Рис. 8.1. Статистическая и теоретическая функции распределения при N = 200

Из полной выборки получаем однократно усеченные выборки по плану [NUr], r = 150, 100, 50, 20. Определяем статистические оценки параметров a^* и b^* закона распределения Вейбулла МП-методом и рассчитываем средние наработки на отказ $T_0^*=a^*\cdot\gamma_1(b^*)$. Для экспоненциального закона распределения $T_0^* = (\sum_{i=1}^{n_1} t_i + n_2 t_r)/n_1$. Строим статистическую функцию распределения $F^*(t)$ и теоретическую функцию $F(t)$ по параметрам a^* и b^*.

r = 150

№	$t_{вр}$	ln(t)	t^b	$F^*(t)$	$F(t)$
1	559,7711	6,327528	8972569312	0,005	0,010003
2	596,1348	6,390467	1,127E+10	0,01	0,012548
3	678,3366	6,519644	1,7993E+10	0,015	0,019959
4	697,9077	6,548087	1,9946E+10	0,02	0,022101
5	759,8049	6,633062	2,7134E+10	0,025	0,029945
...	...	...	...	...	...
146	2161,325	7,678477	1,1965E+12	0,73	0,738315
147	2165,724	7,68051	1,2053E+12	0,735	0,740895
148	2172,32	7,683551	1,2187E+12	0,74	0,744741

149	2180,316	7,687225	1,235E+12	0,745	0,749368
150	2180,503	7,687311	1,2354E+12	0,75	0,749476
Σ=	234143,9	1097,001	7,2103E+13		

Закон распределения Вейбулла

a^*= 1993 ч

b^*= 3,6219

L= -1208

$\gamma(b^*)$= 0,9014

T_0^*= 1796 ч

Экспоненциальный закон распределения

T_0^*= 2288 ч

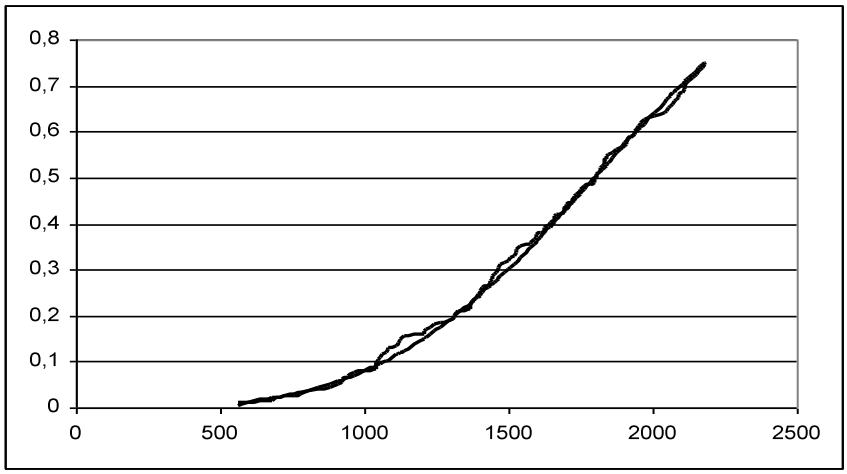


Рис. 8.2. Статистическая и теоретическая функции распределения при r = 150

r = 100

№	$t_{вр}$	ln(t)	t^b	$F^*(t)$	$F(t)$
1	559,7711	6,327528	8972569312	0,005	0,010003
2	596,1348	6,390467	1,127E+10	0,01	0,012548
3	678,3366	6,519644	1,7993E+10	0,015	0,019959
4	697,9077	6,548087	1,9946E+10	0,02	0,022101
5	759,8049	6,633062	2,7134E+10	0,025	0,029945
...	...	...	...	...	...
96	1766,4718	7,47674	6,5542E+11	0,48	0,478027
97	1782,804	7,485943	6,7774E+11	0,485	0,489457
98	1799,6937	7,495372	7,014E+11	0,49	0,5013
99	1800,0967	7,495596	7,0198E+11	0,495	0,501582
100	1802,8151	7,497105	7,0584E+11	0,5	0,50349
Σ=	134444,32	717,1989	3,0229E+13		

Закон распределения Вейбулла

a^*= 1988,3

b^*= 3,6391

L= -842

$\gamma(b^*)$= 0,9016

$T_0^* =$ 1793 ч.

Экспоненциальный закон распределения

$T_0^* =$ 3147 ч.

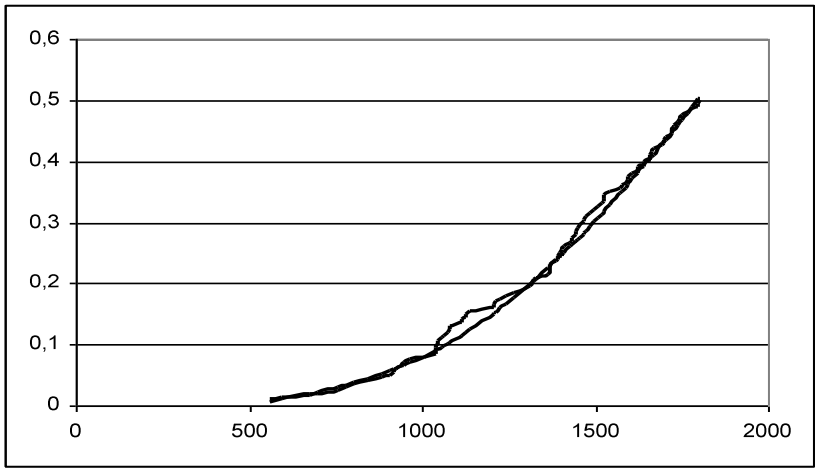


Рис. 8.3. Статистическая и теоретическая функции распределения при r = 100

r = 50

№	$t_{вр}$	ln(t)	t^b	$F^*(t)$	$F(t)$
1	559,7711	6,327528	8972569312	0,005	0,010003
2	596,1348	6,390467	1,127E+10	0,01	0,012548
3	678,3366	6,519644	1,7993E+10	0,015	0,019959
4	697,9077	6,548087	1,9946E+10	0,02	0,022101
5	759,8049	6,633062	2,7134E+10	0,025	0,029945
...	...	...	...	...	...
46	1372,477	7,224372	1,5937E+12	0,23	0,234565
47	1389,594	7,236767	1,6724E+12	0,235	0,244604
48	1390,64	7,23752	1,6773E+12	0,24	0,245225
49	1395,262	7,240837	1,6991E+12	0,245	0,247978
50	1400,528	7,244605	1,7242E+12	0,25	0,251134
Σ=	54390,94	348,4203	3,9473E+13		
	Закон распределения Вейбулла				
		a^*=	1927 ч		
		b^*=	3,8892		
		L=	-446,25		
		$\gamma(b^*)$=	0,9051		
		T_0^*=	1744 ч		
Экспоненциальный закон распределения					
		T_0^*=	5289 ч		

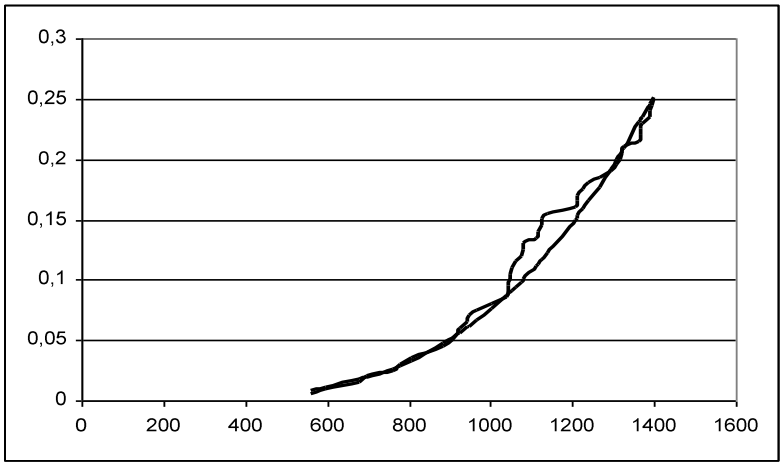


Рис. 8.4. Статистическая и теоретическая функции распределения при r = 50

r = 20

№	t вр	Ln(t)	t^b	$F^*(t)$	$F(t)$
1	559,7711	6,327528	8972569312	0,005	0,010003
2	596,1348	6,390467	1,127E+10	0,01	0,012548
3	678,3366	6,519644	1,7993E+10	0,015	0,019959
4	697,9077	6,548087	1,9946E+10	0,02	0,022101
5	759,8049	6,633062	2,7134E+10	0,025	0,029945
...	...	...	...	...	...
16	1003,065	6,910816	1,43E+15	0,08	0,080897
17	1038,496	6,945529	1,71E+15	0,085	0,095632
18	1042,212	6,949101	1,74E+15	0,09	0,097285
19	1042,602	6,949474	1,74E+15	0,095	0,097459
20	1048,184	6,954815	1,79E+15	0,1	0,099986
Σ=	17383,91	135,0368	1,76E+16		
	Закон распределения Вейбулла				
		a^*=	1637 ч		
		b^*=	5,05		
		L=	-188		
		$\gamma(b^*)$=	0,9174		
		T_0^*=	1502 ч		
Экспоненциальный закон распределения					
		T_0^*=	10303 ч		

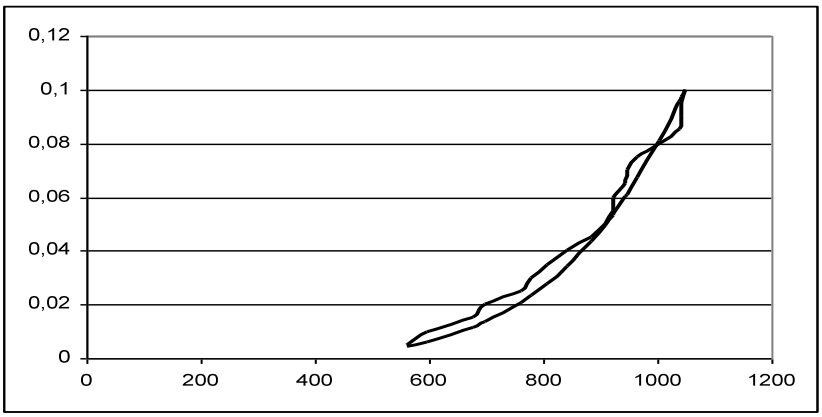


Рис. 8.5. Статистическая и теоретическая функции распределения при r = 20

Для определения влияния времени испытаний на точность статистической оценки надежности системы рассчитывается и строится зависимость относительной дополнительной погрешности средней наработки на отказ $\delta_r=|(T_0(200)-T_0^*(r))/T_0(200)|$ от относительного времени испытаний $\tau_r=T_и(r)/T_и(200)$ функция $\delta_r=f(\tau_r)$, r=150, 100, 50, 20. В таблицах результатов моделирования соответствующие значения выделены.

Результаты расчета сведены в таблице.

Таблица результатов расчета зависимости $\delta_r=f(\tau_r)$

			Закон распределения Вейбулла		Экспоненциальный закон	
r	$t(r)$	τ_r	T_0^*	δ_r	T_0^*	δ_r
20	1048,2	0,302	1744 ч	0,037	10303 ч	4,691
50	1400,5	0,404	1793 ч	0,01	5289 ч	1,922
100	1802,8	0,52	1797 ч	0,007	3147 ч	0,739
150	2180,5	0,629	1797 ч	0,007	2288 ч	0,264
200	3467,9	1	1810 ч	0	1810 ч	0

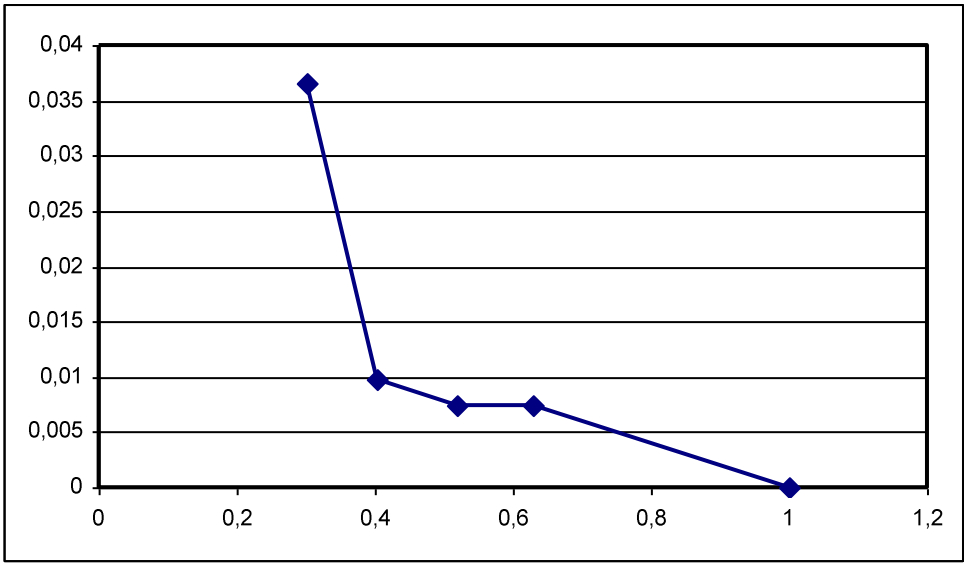


Рис. 8.6. Зависимости $\delta_r=f(\tau_r)$ при законе распределения Вейбулла

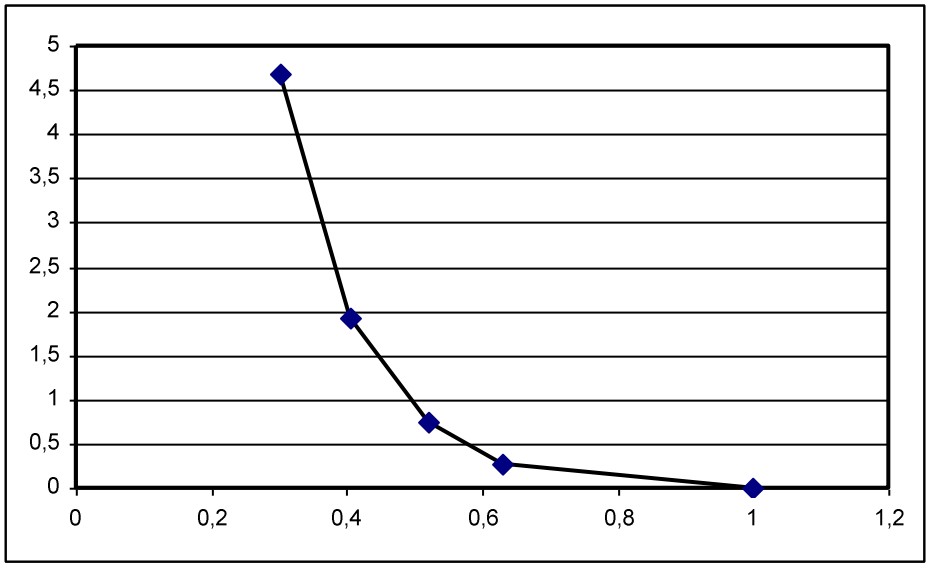


Рис. 8.7. Зависимости $\delta_r=f(\tau_r)$ при экспоненциальном законе распределения

Выводы.

1 Выполнено моделирование результатов определительных испытаний по плану [*NUN*], при *N*=200; наработки подчиняются закону распределения Вейбулла. Как следует из рис. 5.1 моделирование выполнено удачно, это же подтверждает проверка по критерию Колмогорова: $D_{\max}=0{,}04009< D_{\lambda}=0{,}09617$.

2 По полной выборке методам моментов произведены статистические оценки числовых характеристик закона распределения $m_t^*=T_0^*$, D_t^*, σ_t^*, v_t^* и рассчитаны оценки параметров закона распределения Вейбулла b^* и a^*. Рассчитана также средняя наработка на отказ по заданным значениям *a* и *b* и относительная погрешность $\delta_c\approx 0{,}01$. Эта погрешность определяется числом испытуемых изделий, чтобы уменьшить ее вдвое, число изделий следует увеличить в 4 раза.

3 Для планов [*NUr*] по усеченным выборкам (*r*=150, 100, 50, 20) методом максимального правдоподобия найдены статистические оценки параметров закона распределения Вейбулла b^* и a^*. По этим значениям рассчитаны средние наработки на отказ T_0^*. Рассчитана и построена зависимость дополнительной погрешности от времени испытаний $\delta_r=f(\tau_r)$ при законе распределения Вейбулла. Как следует из рис. 5.6 при уменьшении времени испытаний в 2 – 2,5 раза дополнительная погрешность δ_r не превосходит статистическую погрешность δ_c, что вполне допустимо. Сокращение времени испытаний и использование метода максимального правдоподобия целесообразно.

4 Ошибочное использование экспоненциального закона распределения приводит к недопустимо большой погрешности (см. рис. 5.7). При $\tau_r=0{,}52$ погрешность $\delta_r=0{,}739$ и далее достигает 470%.

Библиографический список

1 **Линденбаум М.Д.** Надежность информационно-вычислительных систем. Учебное пособие. РИИЖТ, 1996.

2 **Линденбаум М.Д., Ульяницкий Е.М.** Надежность информационных систем. Учебник для вузов ж.д. транспорта. – М.: ГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте». 2007.

3 **Линденбаум М.Д., Ведерникова О.Г.** Практикум по надежности информационных систем, ч. 1. Расчет надежности. Учебное пособие. РГУПС, 2007.

4 **Линденбаум М.Д.** Надежность информационных систем, Моделирование определительных испытаний. Учебно-методическое пособие. РГУПС, 2009.

Приложение 1

Законы распределения

Закон распределения	Пара-метры	Область существ.	$M(t)$	$\sigma(t)$	$v(t)$
Экспоненциальный закон $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$, $F(t)=1-e^{-\lambda t}$	λ	$[0,\infty]$	$1/\lambda$	$1/\lambda$	1
Закон Вейбулла $f(t) = \frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1} e^{-(t/a)^b}$, $F(t) = 1 - e^{-(t/a)^b}$, $\gamma_1(b)=\Gamma(1+1/b)$, $\gamma_2(b) = \sqrt{\Gamma(1+2/b) - \gamma_1^2(b)}$; $\gamma_3(b)=\gamma_2(b)/\gamma_1(b)$ $\Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds$ - гамма-функция	a. b	$[0,\infty]$	$a\gamma_1(b)$	$a\gamma_2(b)$	$\gamma_3(b)$

Приложение 2

Коэффициенты закона распределения Вейбулла

$$F(t) = 1 - \exp((t/a)^b)$$

b	$\gamma_1(b)$	$\gamma_2(b)$	$\gamma_3(b)$	b	$\gamma_1(b)$	$\gamma_2(b)$	$\gamma_3(b)$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	2,90	0,8917	0,3341	0,3746
1,05	0,9808	0,9344	0,9527	2,95	0,8923	0,3292	0,3689
1,10	0,9649	0,8783	0,9102	3,00	0,8930	0,3245	0,3634
1,15	0,9517	0,8297	0,8718	3,05	0,8936	0,3200	0,3581
1,20	0,9407	0,7872	0,8369	3,10	0,8943	0,3156	0,3529
1,25	0,9314	0,7498	0,8050	3,15	0,8950	0,3113	0,3479
1,30	0,9236	0,7164	0,7757	3,20	0,8957	0,3072	0,3430
1,35	0,9170	0,6866	0,7487	3,25	0,8963	0,3032	0,3383
1,40	0,9114	0,6597	0,7238	3,30	0,8970	0,2993	0,3337
1,45	0,9067	0,6352	0,7006	3,35	0,8977	0,2955	0,3292
1,50	0,9027	0,6129	0,6790	3,40	0,8984	0,2918	0,3248
1,55	0,8994	0,5925	0,6588	3,45	0,8991	0,2882	0,3206
1,60	0,8966	0,5737	0,6399	3,50	0,8997	0,2847	0,3165
1,65	0,8942	0,5564	0,6222	3,55	0,9004	0,2813	0,3124
1,70	0,8922	0,5402	0,6055	3,60	0,9011	0,2780	0,3085
1,75	0,8906	0,5252	0,5897	3,65	0,9018	0,2748	0,3047
1,80	0,8893	0,5112	0,5749	3,70	0,9025	0,2717	0,3010
1,85	0,8882	0,4981	0,5608	3,75	0,9031	0,2686	0,2974
1,90	0,8874	0,4858	0,5474	3,80	0,9038	0,2656	0,2939
1,95	0,8867	0,4742	0,5348	3,85	0,9045	0,2626	0,2904
2,00	0,8862	0,4632	0,5227	3,90	0,9051	0,2598	0,2870
2,05	0,8859	0,4529	0,5112	3,95	0,9058	0,2570	0,2838
2,10	0,8857	0,4431	0,5003	4,00	0,9064	0,2543	0,2806
3,30	0,8970	0,2993	0,3337	4,05	0,9070	0,2516	0,2774
2,15	0,8856	0,4338	0,4898	4,10	0,9077	0,2490	0,2744
2,20	0,8856	0,4250	0,4798	4,15	0,9083	0,2465	0,2714
2,25	0,8857	0,4165	0,4703	4,20	0,9089	0,2440	0,2684
2,30	0,8859	0,4085	0,4611	4,25	0,9096	0,2415	0,2656
2,35	0,8862	0,4008	0,4523	4,30	0,9102	0.2392	0,2628
2,40	0,8865	0,3934	0,4438	4,35	0,9108	0,2368	0,2600
2,45	0,8868	0,3864	0,4357	4,40	0,9114	0,2345	0,2573
2,50	0,8873	0,3797	0,4279	4,45	0,9120	0,2323	0,2547
2,55	0,8877	0,3732	0,4204	4,50	0,9126	0,2301	0,2521
2,60	0,8882	0,3670	0,4131	4,55	0,9132	0,2279	0,2496
2,65	0,8887	0,3610	0,4061	4,60	0,9137	0,2258	0,2471
2,70	0,8893	0,3552	0,3994	4,65	0,9143	0,2237	0,2447
2,75	0,8899	0,3497	0,3929	4,70	0,9149	0,2217	0,2423
2,80	0,8904	0,3443	0,3866	4,75	0,9154	0,2197	0,2400
2,85	0,8911	0,3391	0,3805	4,80	0,9160	0,2178	0.2377

Приближённые формулы ($1 \le b \le 4$)

$$b = \gamma_3^{-1}(v) = 1 + \frac{1 - v}{1{,}03 \cdot v - 0.0526}$$ (погрешность ±0,56%);

$\gamma_1(b)=1–0{,}51/b+0{,}61/b^2–0{,}1/b^3$ (погрешность ±0,13%).

Учебное издание

Линденбаум Михаил Давидович

НАДЕЖНОСТЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Печатается в авторской редакции
Технический редактор Т.И. Исаева

Подписано в печать 05.10.17. Формат 60×84/16.
Бумага газетная. Ризография. Усл. печ. л. 3,25.
Тираж экз. Изд. № 90381. Заказ .

Редакционно-издательский центр ФГБОУ ВО РГУПС.
Адрес университета: 344038, г. Ростов н/Д, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, д. 2.