

**РОСЖЕЛДОР**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Ростовский государственный университет путей сообщения»**  
**(ФГБОУ ВО РГУПС)**

---

**А.В. Морозова**

**Элементы высшей математики**  
**Учебное пособие**  
**для специальности**  
**09.02.09 Веб-разработка**

Ростов-на-Дону  
2025

УДК

Рецензенты: кандидат физ.-мат. наук, доцент Т.А. Волосатова (ДГТУ);  
кандидат техн. наук, доц. О.В. Игнатьева (РГУПС).

**Морозова, А.В.**

Элементы высшей математики: учебное пособие для СПО/ А.В. Морозова;  
Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2025. – 139 с.

В учебном пособии в краткой форме изложены необходимые теоретические сведения по следующим разделам математики: Линейная алгебра, Аналитическая геометрия, Основы дифференциального и интегрального исчислений, а также приводятся типовые примеры и задачи с решениями.

Пособие может быть использовано при подготовке к практическим занятиям студентами 2-го курса специальности СПО 09.02.09. Веб-разработка по дисциплине «Элементы высшей математики».

Одобрено к изданию кафедрой «Высшая математика».

*Учебное издание*

**Морозова Анна Викторовна**

**Элементы высшей математики**

Редактор  
Корректор

Подписано в печать Формат 60×84/16.  
Бумага газетная. Ризография. Усл. печ. л.  
Тираж экз. Изд. № Заказ

Редакционно-издательский центр ФГБОУ ВО РГУПС.

---

Адрес университета: 344038, г. Ростов н/Д, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, 2.

© Морозова А.В. 2025

© ФГБОУ ВО РГУПС, 2025

© Ростовский государственный университет  
путей сообщения, 2025

## Оглавление

### 1 ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

#### ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1 Определители второго порядка .....	5
1.2 Определители третьего порядка .....	6
1.3 Определители высшего порядка .....	8
1.4 Основные свойства определителей .....	12
1.5 Матрицы .....	16
1.6 Действия над матрицами .....	19
1.7 Обратная матрица .....	24
1.8 Ранг матрицы .....	26
1.9 Элементарные преобразования матриц .....	31
1.10 Системы линейных алгебраических уравнений .....	33
1.11 Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера .....	37
1.12 Решение систем линейных уравнений матричным методом .....	38
1.13 Решение систем линейных уравнений общего вида методом Гаусса .....	41

#### КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.14 Понятие комплексного числа. Различные формы комплексных чисел .....	56
1.15 Действия над комплексными числами .....	61

### 2 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

#### ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1 Векторы на плоскости и в пространстве .....	68
2.2 Линейные операции над векторами .....	69
2.3 Скалярное произведение векторов .....	70
2.4 Линейная зависимость и независимость векторов .....	72
2.5. Векторы в координатной форме .....	74
2.6 Декартова система координат .....	76
2.7 Линейные операции над векторами в координатной форме .....	78
2.8 Скалярное произведение векторов в координатной форме .....	79

#### АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2.9 Прямая на плоскости .....	82
2.10 Угол между двумя прямыми на плоскости .....	89
2.11 Плоскость в пространстве .....	95
2.12 Угол между двумя плоскостями .....	96
2.13 Прямая в пространстве .....	98
2.14 Угол между двумя прямыми в пространстве .....	101
2.15 Угол между прямой в пространстве и плоскостью .....	101

### 3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1 Логические символы .....	103
3.2 Предел последовательности .....	105
3.3 Понятие функции и способы её задания .....	108

3.4 Обратная функция .....	111
3.5 Сложная функция .....	112
3.6 Монотонность, ограниченность, четность и периодичность функций .....	113
3.7 Элементарные функции .....	116
3.8 Предел функции .....	118
3.9 Основные теоремы о пределах функций (свойства пределов функций)	124
3.10 Непрерывность функции в точке .....	124
3.11 Производная функции .....	126
3.12 Геометрический смысл производной .....	128
3.13 Механический смысл производной .....	129
3.14 Основные правила нахождения производных .....	130
3.15 Производная сложной и обратной функций .....	130
3.16 Таблица производных основных элементарных функций .....	131
3.17 Условия возрастания и убывания функции .....	132
3.18 Точки экстремума функции .....	133
3.19 Схема исследования функции на экстремум .....	135
3.20 Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции .....	136
3.21 Выпуклость и вогнутость графика функции .....	137
3.22 Точки перегиба .....	138
3.23 Схема исследования графика функции на перегиб .....	140
3.24 Асимптоты графика функции .....	141
3.25 Общая схема исследования функции и построение ее графика .....	143
<b>4 ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ</b>	
<b>НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ</b>	
4.1 Первообразная функция .....	143
4.2 Неопределенный интеграл .....	144
4.3 Основные свойства неопределенного интеграла .....	145
4.4 Таблица основных интегралов .....	146
4.5 Основные методы интегрирования .....	147
<b>ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ</b>	
4.6 Определение определенного интеграла .....	149
4.7 Основные свойства определенного интеграла .....	151
4.8 Формула Ньютона-Лейбница .....	153
4.9 Замена переменной в определенном интеграле .....	153
4.10 Интегрирование по частям в определенном интеграле .....	154

## 1. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

## 1.1 Определители второго порядка

Определение. *Определителем (детерминантом) второго порядка* называется выражение вида

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

где  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  – элементы определителя. Элементы  $a_{11}, a_{22}$  образуют главную диагональ определителя, а элементы  $a_{21}, a_{12}$  – побочную диагональ.

Таким образом, определитель второго порядка равен разности между произведениями элементов, стоящих на главной и побочной диагоналях.

Определитель второго порядка содержит две строки и два столбца.

Элементы  $a_{11}, a_{12}$  стоят в первой строке определителя, а элементы  $a_{21}, a_{22}$  – во второй строке.

Элементы  $a_{11}, a_{21}$  стоят в первом столбце определителя, а элементы  $a_{12}, a_{22}$  – во втором столбце.

Любой элемент определителя можно записать в виде  $a_{ik}$ , где индекс  $i$  указывает номер строки ( $i=1,2$ ), а индекс  $k$  – номер столбца ( $k=1,2$ ), на пересечении которых стоит рассматриваемый элемент.

Обычно элементами определителя являются числа, тогда и сам определитель – это число.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 5 \cdot (-3) = 14 + 15 = 29.$$

Но элементами определителя могут быть и другие математические объекты.

Пример.

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

## 1.2 Определители третьего порядка

Определение. *Определителем (детерминантом) третьего порядка* называется выражение вида

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11},$$

где  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$  – элементы определителя. Элементы  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$  образуют главную диагональ определителя, а элементы  $a_{31}, a_{22}, a_{13}$  – побочную диагональ.

Определитель третьего порядка содержит три строки и три столбца.

Элементы  $a_{11}, a_{12}, a_{13}$  стоят в первой строке определителя, элементы  $a_{21}, a_{22}, a_{23}$  стоят во второй строке определителя, а элементы  $a_{31}, a_{32}, a_{33}$  – в третьей строке.

Элементы  $a_{11}, a_{21}, a_{31}$  стоят в первом столбце определителя, элементы  $a_{12}, a_{22}, a_{32}$  стоят во втором столбце определителя, а элементы  $a_{13}, a_{23}, a_{33}$  – в третьем столбце.

Любой элемент определителя можно записать в виде  $a_{ik}$ , где индекс  $i$  указывает номер строки ( $i=1,2,3$ ), а индекс  $k$  – номер столбца ( $k=1,2,3$ ), на пересечении которых стоит рассматриваемый элемент.

Заметим, что определитель третьего порядка выражается в виде суммы, каждый член которой есть произведение трех элементов, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца.

Рассмотрим два правила составления указанной суммы (простое запоминание этого выражения затруднительно).

#### 1) Правило треугольников.

Первые три слагаемых суммы (со знаком «+») представляют собой произведения элементов определителя, взятых по три так, как показано на нижеприведенной схеме слева (рис. 1.1). Для получения следующих трех слагаемых суммы (со знаком «–») нужно взять произведения элементов

определителя, взятых по три так, как показано на нижеприведенной схеме справа (рис. 1.1).



Рис. 1.1 Правило треугольников вычисления определителя третьего порядка

Пример.

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot (-3) \cdot (-2) - \\ - 6 \cdot 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 \cdot (-1) - (-3) \cdot 4 \cdot 5 = 119.$$

2) *Правило Саррюса.*

Напишем квадратную таблицу, соответствующую определителю третьего порядка, и припишем к ней справа еще раз первый и второй столбцы (рис. 1.2).

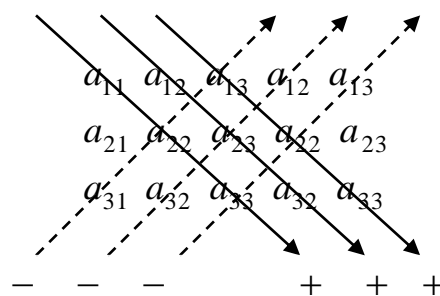


Рис. 1.2 Правило Саррюса вычисления определителя третьего порядка

Возьмем со знаком плюс произведение элементов, стоящих на главной диагонали определителя, а также произведения элементов, стоящих на двух параллелях к ней, содержащих по три элемента (сплошные линии). Произведения же элементов, стоящих на побочной диагонали и на двух параллелях к ней, содержащих по три элемента, возьмем со знаком минус

(пунктирные линии). Алгебраическая сумма этих шести произведений и дает определитель третьего порядка.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \cdot 6 + (-2) \cdot 3 \cdot (-3) - 6 \cdot 2 \cdot (-2) - (-3) \cdot 4 \cdot 5 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 = 119.$$

### 1.3 Определители высшего порядка

Определение. *Определителем (детерминантом) высшего (n-го) порядка* называется выражение вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}; a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}; \dots; a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$  — элементы определителя. Элементы  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  образуют главную диагональ определителя, а элементы  $a_{n1}, \dots, a_{1n}$  — побочную диагональ.

Определитель n-го порядка содержит n строк и n столбцов. Обычно определитель считают определителем высшего порядка, если  $n \geq 3$ .

Элементы  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$  стоят в первой строке определителя, элементы  $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}$  стоят во второй строке определителя и т.д., а элементы  $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$  — в последней n-ой строке.

Элементы  $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$  стоят в первом столбце определителя, элементы  $a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}$  стоят во втором столбце определителя и т.д., а элементы  $a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn}$  — в последнем n-ом столбце.

Любой элемент определителя можно записать в виде  $a_{ik}$ , где индекс  $i$  указывает номер строки ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), а индекс  $k$  — номер столбца ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), на пересечении которых стоит рассматриваемый элемент.



Для записи правила вычисления определителя  $n$ -го порядка рассмотрим предварительно понятия минора и алгебраического дополнения.

Определение. *Минором  $M_{ik}$  элемента  $a_{ik}$  определителя  $n$ -го порядка называется определитель  $(n-1)$ -го порядка, полученный из исходного определителя  $n$ -го порядка вычеркиванием  $i$ -ой строки и  $k$ -го столбца.*

### Примеры

$$\begin{aligned}
 1) \Delta &= \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix}; & n=3; & M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}; & n-1=2; \\
 & i=1,2,3; & i=2; \\
 & k=1,2,3; & k=3. \\
 2) \Delta &= \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix}; & n=3; & M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}; & n-1=2; \\
 & i=1,2,3; & i=1; \\
 & k=1,2,3; & k=1.
 \end{aligned}$$

Определение. *Алгебраическим дополнением  $A_{ik}$  элемента  $a_{ik}$  определителя  $n$ -го порядка называется произведение знакового множителя  $(-1)^{i+k}$  на минор  $M_{ik}$  данного элемента определителя:*

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}, \quad (-1)^{i+k} = \begin{cases} +1, & \text{если } i+k - \text{четное число;} \\ -1, & \text{если } i+k - \text{нечетное число.} \end{cases}$$

Таким образом, знаковый множитель есть просто знак (плюс или минус), стоящий перед соответствующим минором:

$$A_{ik} = \begin{cases} +M_{ik}, & \text{если } i+k - \text{четное число;} \\ -M_{ik}, & \text{если } i+k - \text{нечетное число.} \end{cases}$$

### Примеры

$$\begin{aligned}
 1) \Delta &= \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix}; & A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}; & n-1=2; \\
 & & i=2; k=3; & i+k=2+3=5 - \text{нечетное число.} \\
 2) \Delta &= \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix}; & A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}; & n-1=2; \\
 & & i=1; k=1; & i+k=1+1=2 - \text{четное число.}
 \end{aligned}$$

Легко заметить, что знаковые множители алгебраических дополнений для соседних элементов чередуются (с плюса на минус или с минуса на плюс) при

движении элемента по строке или при движении элемента по столбцу, а для элементов, стоящих на главной диагонали, знаковые множители алгебраических дополнений всегда положительны.

Например, знаковые множители для миноров элементов в определителе третьего порядка можно задать таблицей

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Используя понятие алгебраического дополнения, сформулируем универсальное правило вычисления определителя  $n$ -го порядка (разложение по элементам строки или столбца), пригодное для вычисления определителя любого порядка:

Определитель  $n$ -го порядка равен сумме попарных произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad - \text{разложение по строке } i \quad (i=1,2,\dots,n).$$

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk} \quad - \text{разложение по столбцу } k \quad (k=1,2,\dots,n).$$

### Примеры

1) Вычислить определитель  $\Delta$  разложением по второй строке.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= -3(-1-6) + 2(-5+12) - 4(-15-6) = -3 \cdot (-7) + 2 \cdot 7 - 4 \cdot (-21) = 21 + 14 + 84 = 119. \end{aligned}$$

2) Вычислить определитель  $\Delta$  разложением по третьему столбцу.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

*Решение.*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \quad 3)$$

$$= -2(-9 - 12) - 4(-15 - 6) - 1(10 - 3) = -2 \cdot (-21) - 4 \cdot (-21) - 1 \cdot 7 = 42 + 84 - 7 = 119.$$

Вычислить верхний треугольный определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix},$$

т.е. определитель, все элементы которого, стоящие ниже главной диагонали, равны нулю.

*Решение.* Применяя последовательно универсальное правило вычисления определителя разложением по первому столбцу, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}.$$

Для вычисления нижнего треугольного определителя четвертого порядка, т.е. определителя, все элементы которого, стоящие выше главной диагонали, равны нулю, нужно применить последовательно универсальное правило вычисления определителя разложением по первой строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}.$$

Очевидно, что для вычисления любого треугольного (как верхнего, так и нижнего) определителя  $n$ -го порядка справедлива формула:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn},$$

т.е. *треугольный определитель равен произведению его элементов, стоящих на главной диагонали.*

**Пример.**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -12 & 20 & 41 \\ 0 & 10 & -155 & 26 \\ 0 & 0 & -11 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 10 \cdot (-11) \cdot (-8) = 2640.$$

#### 1.4 Основные свойства определителей

*Свойство 1.* Определитель не меняет своего значения при транспонировании (замене всех его строк соответствующими столбцами).

**Пример.**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 119.$$

Из данного свойства следует, что все свойства определителей, относящиеся к строкам определителя, справедливы для его столбцов, и наоборот.

*Свойство 2.* При перестановке местами каких-либо двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

**Примеры**

$$1) \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{Переставлены местами первая и третья строки.}$$

$$2) \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & -1 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{Переставлены местами второй и третий столбцы.}$$

*Следствие.* Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

#### Примеры

$$1) \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Одинаковые первая и третья строки.}$$

$$2) \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Одинаковые второй и третий столбцы.}$$

*Свойство 3.* Общий множитель элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

#### Примеры

$$1) \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 12 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{Из третьей строки вынесен общий множитель 2 за знак определителя.}$$

$$2) \begin{vmatrix} 5 & 1 & -10 \\ 3 & 2 & 20 \\ 6 & -3 & -5 \end{vmatrix} = (-5) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{Из третьего столбца вынесен общий множитель (-5) за знак определителя.}$$

*Следствие 1.* Если все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

#### Примеры

$$1) \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Все элементы третьей строки равны нулю.}$$

$$2) \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Все элементы второго столбца равны нулю.}$$

*Следствие 2.* Если элементы какой-либо строки (столбца) пропорциональны соответствующим элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.

### Примеры

$$1) \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ -5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0. \quad \begin{array}{l} \text{Элементы первой строки пропорциональны} \\ \text{соответствующим элементам третьей строки:} \\ \frac{5}{-5} = \frac{1}{-1} = \frac{-2}{2} = -1. \end{array}$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \end{vmatrix} = 0. \quad \begin{array}{l} \text{Элементы третьего столбца пропорциональны} \\ \text{соответствующим элементам первого столбца:} \\ \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{-9}{-3} = 3. \end{array}$$

*Свойство 4.* Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, причем в одном определителе соответствующая строка (столбец) состоит из первых слагаемых, а в другом – из вторых слагаемых.

### Примеры

$$1) \begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 + \beta_1 & c_1 + \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Элементы первой строки определителя представляют собой суммы двух слагаемых.

$$2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + \beta_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + \beta_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + \beta_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & c_1 \\ a_2 & \beta_2 & c_2 \\ a_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Элементы второго столбца определителя представляют собой суммы двух слагаемых.

*Свойство 5.* Определитель не меняет своего значения от прибавления ко всем элементам какой-либо строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

### Примеры

$$1) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 & c_1 + kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ко всем элементам первой строки прибавлены соответствующие элементы второй строки, умноженные на одно и то же число  $k$ .

Можно сказать и так: первая строка полученного определителя есть линейная комбинация первой и второй строки с коэффициентом  $k$  исходного определителя.

$$2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + kc_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + kc_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + kc_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ко всем элементам второго столбца прибавлены соответствующие элементы третьего столбца, умноженные на одно и то же число  $k$ .

Можно сказать и так: второй столбец полученного определителя есть линейная комбинация второго и третьего столбца с коэффициентом  $k$  исходного определителя.

Применение свойства 5 на практике позволяет ускорить и упростить вычисление определителей.

**Пример.**

Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 10 \end{vmatrix}.$$

*Решение.* Вычитая из элементов второй строки элементы первой строки, умноженные на 2, а из элементов третьей строки элементы первой строки, умноженные на 4, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Разложив этот определитель по второму столбцу, содержащему лишь один неравный нулю элемент, получим

$$\Delta = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -8.$$

## 1.5 Матрицы

Определение. *Матрицей размерности  $m \times n$*  называется прямоугольная таблица элементов, состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов.

Матрицы обычно обозначаются прописными латинскими буквами, а ее элементы – соответствующими строчными буквами.

Размерность матрицы часто указывают под ее обозначением.

Матрицу можно записать в одном из следующих видов:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad A_{m \times n} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

Любой элемент матрицы можно записать в виде  $a_{ik}$ , где индекс  $i$  указывает номер строки ( $i=1,2,\dots,m$ ), а индекс  $k$  – номер столбца ( $k=1,2,\dots,n$ ), на пересечении которых стоит рассматриваемый элемент.

Матрицу можно записать и в более короткой форме:

$$A = (a_{ik}), \quad A = [a_{ik}], \quad A = \|a_{ik}\|, \quad i=1,2,\dots,m; \quad k=1,2,\dots,n.$$

Определение. *Квадратной матрицей порядка  $n$*  называется матрица, состоящая из  $n$  строк и  $n$  столбцов.

В квадратной матрице порядка  $n$  (как и в определителе) можно определить *главную и побочную диагонали*: элементы  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  образуют *главную диагональ матрицы*, а элементы  $a_{n1}, \dots, a_{1n}$  – *побочную диагональ*.

Пример.

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} \text{ – квадратная матрица третьего порядка } (n=3).$$

Побочная диагональ      Главная диагональ

Квадратной матрице  $A$  порядка  $n$  всегда можно поставить в соответствие определитель того же порядка, который обозначают  $|A|$  или  $\det A$  (детерминант матрицы  $A$ ).



Пример.

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} - \text{квадратная матрица третьего порядка } (n=3).$$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} -9 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} - \text{определитель третьего порядка } (n=3) \text{ матрицы } A.$$

Отметим, что квадратная матрица есть только *таблица*, и смешивать ее с определителем нельзя.

Определение. Квадратная матрица  $A$  называется *неособенной* (*невырожденной*), если ее определитель отличен от нуля:  $|A| \neq 0$ .

Если же определитель квадратной матрицы равен нулю, то матрица называется *особенной* (*вырожденной*).

Определение. *Матрицей-строкой* или *строкой* называется матрица размерности  $1 \times n$ , состоящая из одной строки.

Пример.

$$A = (-2 \ 0 \ 8 \ 11)_{1 \times 4} - \text{матрица-строка } (n=4).$$

Определение. *Матрицей-столбцом* или *столбцом* называется матрица размерности  $m \times 1$ , состоящая из одного столбца.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}_{3 \times 1} - \text{матрица-столбец } (m=3).$$

Определение. *Верхней треугольной матрицей* называется квадратная матрица, все элементы которой, стоящие ниже главной диагонали, равны нулю.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} - \text{верхняя треугольная матрица четвертого порядка.}$$

Определение . *Нижней треугольной матрицей* называется квадратная матрица, все элементы которой, стоящие выше главной диагонали, равны нулю.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} - \text{нижняя треугольная матрица четвертого порядка.}$$

Определение . *Диагональной матрицей* называется квадратная матрица, все элементы которой, стоящие как ниже, так и выше главной диагонали, равны нулю.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} - \text{диагональная матрица четвертого порядка.}$$

Определение . *Единичной матрицей* называется диагональная матрица, все элементы которой, стоящие на главной диагонали, равны единице.

Единичные матрицы обозначаются обычно буквой  $E$ .

Пример.

$$E = E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{единичная матрица четвертого порядка.}$$

Очевидно, что для единичной матрицы  $E$  определитель  $|E|=1$  (произведению элементов, стоящих на главной диагонали) и, следовательно, *единичная матрица является неособенной матрицей.*

Определение . *Нулевой матрицей* или *нуль-матрицей* называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Определение . *Матрицы называются равными*, если они одной размерности и все их соответствующие (стоящие на одинаковых местах) элементы равны.

## 1.6 Действия над матрицами

### 1. Сложение матриц.

Складывать можно только матрицы одинаковой размерности.

Пусть даны матрицы  $A = (a_{ik}), B = (b_{ik}), C = (c_{ik}); i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$ .

Определение. Суммой матриц  $A$  и  $B$  называется матрица  $C = A + B$ , элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$ :

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}.$$

### 2. Произведение матрицы на число.

Пусть даны матрицы  $A = (a_{ik}), C = (c_{ik}); i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$  и число  $\alpha$ .

Определение. Произведением (умножением) матрицы  $A$  на число  $\alpha$  называется матрица  $C = \alpha A$ , элементы которой равны произведению числа  $\alpha$  на соответствующие элементы матрицы  $A$ :

$$c_{ik} = \alpha \cdot a_{ik}.$$

Пример.

$$\text{Пусть } A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & -7 \\ 5 & 0 & -6 & 10 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -9 & 0 \\ -8 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу  $C = -2A + 3B$ .

Решение. На основании определений произведения матрицы на число и суммы матриц имеем

$$\begin{aligned} C_{2 \times 4} &= -2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & -7 \\ 5 & 0 & -6 & 10 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -9 & 0 \\ -8 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -8 & -6 & 14 \\ -10 & 0 & 12 & -20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 15 & -27 & 0 \\ -24 & 12 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 & -33 & 14 \\ -34 & 12 & 15 & -23 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Сложение матриц и произведение матрицы на число обладают следующими свойствами.

Если  $A, B, C$  – матрицы одинаковой размерности, а  $\alpha$  и  $\beta$  – произвольные числа, то справедливы равенства:

1.  $A + B = B + A$ .

2.  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .

$$3. \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

$$4. (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

$$5. \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A.$$

Сложение матриц и произведение (умножение) матрицы на число называются *линейными операциями* над матрицами.

### 3. Умножение матриц.

Определение. Произведением матрицы-строки  $A$  размерности  $1 \times n$  на матрицу-столбец  $B$  размерностью  $n \times 1$  называется число, равное сумме попарных произведений соответствующих элементов матрицы  $A$  на элементы матрицы  $B$ :

$$A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n); \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad AB = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$

Пример.

$$\text{Пусть } A = (-2 \ 5 \ 0 \ -7); \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тогда } AB = (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 0 \cdot 1 + (-7) \cdot (-3) = -6 + 30 + 0 + 21 = 45.$$

Еще раз подчеркнем, что матрица-строка  $A$  и матрица-столбец  $B$  должны иметь одинаковое количество элементов.

Теперь можно сформулировать правила умножения матрицы  $A$  на матрицу  $B$ .

*Правило 1.* Число столбцов матрицы  $A$  должно равняться числу строк матрицы  $B$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix}.$$

*Правило 2.* В результате умножения матрицы  $A$  на матрицу  $B$  получается матрица  $C$ , число строк которой равно числу строк матрицы  $A$ , а число столбцов которой равно числу столбцов матрицы  $B$ :

$$\underset{m \times n}{C} = \underset{m \times p}{A} \cdot \underset{p \times n}{B} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

*Правило 3.* Элемент  $c_{ik}$  матрицы  $C$  равен произведению  $i$ -ой строки матрицы  $A$  на  $k$ -ый столбец матрицы  $B$ :

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ip}b_{pk}; \quad i=1,2,\dots,m; \quad k=1,2,\dots,n.$$

**Пример.**

Найти произведение матриц

$$\underset{2 \times 3}{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}; \quad \underset{3 \times 4}{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 7 & 0 & -6 & 5 \\ 10 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* Правило 1 выполняется, так как число столбцов матрицы  $A$  равняется числу строк матрицы  $B$  и равняется трем ( $p=3$ ).

Согласно правилу 2 в результате умножения матрицы  $A$  на матрицу  $B$  получается матрица  $C$ , число строк которой равно числу строк матрицы  $A$  ( $m=2$ ), а число столбцов которой равно числу столбцов матрицы  $B$  ( $n=4$ ):

$$\underset{2 \times 4}{C} = \underset{2 \times 3}{A} \cdot \underset{3 \times 4}{B} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}.$$

По правилу 3 найдем элементы  $c_{ik}$  ( $i=1,2$ ;  $k=1,2,3,4$ ) матрицы  $C$ , используя определение произведения матрицы-строки на матрицу-столбец:

$$c_{11} = (3 \quad -4 \quad 1) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 7 + 1 \cdot 10 = -3 - 28 + 10 = -21;$$

$$c_{12} = (3 \quad -4 \quad 1) \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 6 + 0 + 3 = 9;$$

$$c_{13} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot (-6) + 1 \cdot (-3) = -6 + 24 - 3 = 15;$$

$$c_{14} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 12 - 20 + 1 = -7;$$

$$c_{21} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = (-5) \cdot (-1) + 2 \cdot 7 + 8 \cdot 10 = 5 + 14 + 80 = 99;$$

$$c_{22} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = (-5) \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 8 \cdot 3 = -10 + 0 + 24 = 14;$$

$$c_{23} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = (-5) \cdot (-2) + 2 \cdot (-6) + 8 \cdot (-3) = 10 - 12 - 24 = -26;$$

$$c_{24} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = (-5) \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 8 \cdot 1 = -20 + 10 + 8 = -2.$$

Таким образом

$$C_{2 \times 4} = A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 7 & 0 & -6 & 5 \\ 10 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 9 & 15 & -7 \\ 99 & 14 & -26 & -2 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц обладает следующими *свойствами*:

1. Для любых трех матриц  $A, B, C$ , если существуют произведения  $AB$  и  $(AB)C$ , то существуют произведения  $BC$  и  $A(BC)$  и справедливо равенство

$$(AB)C = A(BC).$$

2.  $A(B + C) = AB + AC.$

3.  $(A + B)C = AC + BC.$

4.  $AB \neq BA.$

5. Если  $A$  – квадратная матрица, а  $E$  – единичная матрица того же порядка, то

$$AE = EA = A.$$

Примем без доказательства, что если  $A$  и  $B$  – квадратные матрицы одного порядка, то *определитель произведения матриц равен произведению их определителей*:

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

Отсюда следует, что *произведение двух квадратных матриц одного и того же порядка будет неособенной матрицей тогда и только тогда, когда обе перемножаемые матрицы неособенные*.

### 1.7 Обратная матрица

Определение. Матрица  $A^{-1}$  называется *обратной* для квадратной матрицы  $A$ , если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где  $E$  – единичная матрица.

Из определения обратной матрицы  $A^{-1}$  вытекает, что в случае существования она должна быть квадратной матрицей того же порядка, что и исходная матрица  $A$ , которая при этом должна быть неособенной ( $|A| \neq 0$ ), так как  $E$  – неособенная матрица ( $|E| = 1 \neq 0$ ) и  $|AA^{-1}| = |A^{-1}A| = |A^{-1}| \cdot |A| = |E| = 1 \neq 0$ .

Для нахождения обратной матрицы используют формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^*,$$

где  $\Delta = |A|$ , а матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *присоединенной* к матрице  $A$  и составлена из алгебраических дополнений  $A_{ik}$  элементов  $a_{ik}$  определителя  $|A|$  матрицы  $A$ .

Иными словами, если в исходной квадратной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

заменить каждый ее элемент его алгебраическим дополнением и протранспонировать (заменить строки столбцами), а затем еще поделить каждый полученный элемент на величину определителя матрицы  $A$ , то получим обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

**Пример.**

Найти обратную матрицу для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ .

*Решение.* Прежде всего вычислим определитель матрицы  $A$ :

$$\begin{aligned} \Delta = |A| &= \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 5 + (-4) \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 3 - 3 \cdot (-2) \cdot 3 - 1 \cdot (-4) \cdot 5 - (-1) \cdot 4 \cdot 2 = \\ &= -20 - 48 - 3 + 18 + 20 + 8 = -25. \end{aligned}$$

Так как  $\Delta = -25 \neq 0$ , то для исходной матрицы  $A$  существует обратная матрица  $A^{-1}$ . Найдем ее по формуле с использованием присоединенной



матрицы. Для этого вычислим сначала все алгебраические дополнения элементов исходной матрицы  $A$ :

$$\begin{aligned} A_{11} &= + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 4 = -6; & A_{21} &= - \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -(-20 + 3) = 17; \\ A_{12} &= - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(5 - 12) = 7; & A_{22} &= + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1; \\ A_{13} &= + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 6 = 5; & A_{23} &= - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 + 12) = -10; \\ A_{31} &= + \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -16 + 6 = -10; & A_{32} &= - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 3) = -5; \\ A_{33} &= + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0. \end{aligned}$$

Составим из найденных алгебраических дополнений присоединенную матрицу к  $A$ , заменив каждый ее элемент его алгебраическим дополнением и протранспонировав (заменяв строки столбцами):

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 17 & -10 \\ 7 & 1 & -5 \\ 5 & -10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем обратную матрицу по формуле с использованием присоединенной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = \frac{1}{-25} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 17 & -10 \\ 7 & 1 & -5 \\ 5 & -10 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{25} & -\frac{17}{25} & \frac{10}{25} \\ -\frac{7}{25} & -\frac{1}{25} & \frac{5}{25} \\ -\frac{5}{25} & \frac{10}{25} & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим полученный результат, используя определение обратной матрицы:

$$A^{-1}A = \frac{1}{-25} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 17 & -10 \\ 7 & 1 & -5 \\ 5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -12+17-30 & 24-34+10 & -18+68-50 \\ 14+1-15 & -28-2+5 & 21+4-25 \\ 10-10+0 & -20+20+0 & 15-40+0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -25 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Таким образом,  $A^{-1}A = E$  (легко самостоятельно убедиться, что и  $AA^{-1} = E$ ), следовательно, обратная матрица найдена верно.

## 1.8 Ранг матрицы

Определение. Выделим в матрице

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$s$  строк и  $s$  столбцов, где  $s$  – число, меньшее или равное наименьшему из чисел  $m$  и  $n$ . *Минором порядка  $s$  матрицы  $A_{m \times n}$*  называется определитель порядка  $s$ , составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов.

Сами элементы матрицы  $A_{m \times n}$  считаются минорами первого порядка.

**Пример.**

Пусть дана матрица

$$A_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 7 & 0 & -6 & 5 \\ 10 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad m=3; \quad n=4; \quad s \leq 3.$$

Рассмотрим *миноры первого порядка*.

Данная матрица содержит  $m \times n = 3 \times 4 = 12$  элементов, которые и являются минорами (определителями) первого порядка.

Рассмотрим миноры *второго порядка*.

1) Выделим в матрице  $A_{3 \times 4}$  строку 1 и строку 2.

а) Последовательно выделяя далее столбцы 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, получим соответственно три определителя второго порядка, составленных из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

б) Последовательно выделяя далее столбцы 2 и 3, 2 и 4, получим соответственно два определителя второго порядка, составленных из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

в) Выделяя далее столбцы 3 и 4, получим определитель второго порядка, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}.$$

Все эти определители и есть миноры второго порядка, соответствующие выделенным строкам 1 и 2 и выделенным столбцам.

2) Выделим в матрице  $A_{3 \times 4}$  строку 1 и строку 3.

а) Последовательно выделяя далее столбцы 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, получим соответственно три определителя второго порядка, составленных из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 10 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 10 & 1 \end{vmatrix}.$$

б) Последовательно выделяя далее столбцы 2 и 3, 2 и 4, получим соответственно два определителя второго порядка, составленных из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

в) Выделяя далее столбцы 3 и 4, получим определитель второго порядка, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Все эти определители и есть миноры второго порядка, соответствующие выделенным строкам 1 и 3 и выделенным столбцам.

3) Выделим в матрице  $A_{3 \times 4}$  строку 2 и строку 3.

а) Последовательно выделяя далее столбцы 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, получим соответственно три определителя второго порядка, составленных из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 10 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 1 \end{vmatrix}.$$

б) Последовательно выделяя далее столбцы 2 и 3, 2 и 4, получим соответственно два определителя второго порядка, составленных из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов:

$$\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

в) Выделяя далее столбцы 3 и 4, получим определитель второго порядка, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов:

$$\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Все эти определители и есть миноры второго порядка, соответствующие выделенным строкам 2 и 3 и выделенным столбцам.

Таким образом, для рассматриваемой матрицы  $A_{3 \times 4}$  можно получить всего

$3 \times 6 = 18$  миноров второго порядка.

Рассмотрим миноры *третьего порядка*.

4) Выделим в матрице  $A_{3 \times 4}$  все три строки: строку 1, строку 2 и строку 3.

Последовательно выделяя далее столбцы 1,2,3; 1,2,4; 1,3,4 и 2,3,4, получим соответственно четыре определителя третьего порядка, составленных из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 7 & 0 & -6 \\ 10 & 3 & -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 10 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 7 & -6 & 5 \\ 10 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Все эти определители и есть миноры третьего порядка, соответствующие выделенным строкам 1,2,3 и выделенным столбцам.

Таким образом, для рассматриваемой матрицы  $A_{3 \times 4}$  можно получить всего 4 минора третьего порядка.

Итого, для матрицы  $A_{3 \times 4}$  можно получить всего  $12+18+4=34$  минора различных (первого, второго и третьего) порядков.

Определение. *Рангом матрицы называется наибольший порядок минора матрицы, отличного от нуля.*

Ранг матрицы  $A$  обозначается через  $r(A)$  или просто через  $r$ , если ясно, о какой матрице идет речь.

Из определения ранга матрицы  $A_{m \times n}$  следует, что  $r \leq m, r \leq n$ , где  $m$  – число строк, а  $n$  – число столбцов матрицы.

Если ранг матрицы равен  $r$ , то существует минор порядка  $r$ , не равный нулю, а все миноры более высокого порядка, если они существуют, равны нулю.

Определение. *Отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу матрицы, называется базисным минором этой матрицы. Столбцы и строки матрицы, участвующие в образовании базисного минора, также называются базисными.*

Заметим, что в общем случае у матрицы может быть несколько базисных миноров.

Ранг нулевой матрицы можно считать равным нулю.

Вычисление ранга матрицы путем вычисления всех ее миноров различных порядков требует большой вычислительной работы. Однако для некоторых матриц частного вида ранг можно вычислить легко.

Пример.

Матрица

$$A_{4 \times 5} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

если  $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, a_{33} \neq 0$ , имеет ранг 3.

Действительно, ее минор третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0$$

и является базисным, а все миноры порядка 4 равны нулю, так как содержат четвертую строку, состоящую только из нулей.

Приведенный пример обобщается на матрицы произвольной размерности.

*Если ни одно из чисел  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$  не равно нулю, то ранг матрицы*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

*равен  $r$ . Такую матрицу часто называют ступенчатой или трапецевидной.*

Очевидно, что минор

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

порядка  $r$  будет базисным.

На практике для вычисления ранга матрицы ее приводят к трапецевидной с помощью так называемых элементарных преобразований.

### 1.9 Элементарные преобразования матриц

Определение. *Элементарными преобразованиями матрицы* называются следующие преобразования:

- 1) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
- 2) замена строки (столбца) суммой этой строки (столбца) с другой строкой (столбцом);
- 3) перестановка строк (столбцов).

Из свойств определителей следует, что *элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга*.

Определение. *Матрицы, полученные одна из другой элементарными преобразованиями, называются эквивалентными* и связываются знаком  $\sim$ .

Очевидно, что эквивалентные матрицы имеют одинаковые ранги.

Ранг матрицы можно найти, с помощью элементарных преобразований, преобразовав ее к трапецевидной, для которой ранг вычисляется легко.

**Пример.**

Определить ранг матрицы

$$A_{4 \times 5} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & -2 & -5 \\ 8 & 6 & 12 & -1 & 0 \\ 7 & 9 & 8 & -9 & -25 \\ 1 & 3 & 0 & -5 & -15 \end{pmatrix}.$$

*Решение.*

- 1) Переставим первую строку с четвертой:

$$A_{4 \times 5} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -5 & -15 \\ 8 & 6 & 12 & -1 & 0 \\ 7 & 9 & 8 & -9 & -25 \\ 3 & 3 & 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

2) Вторую строку заменим суммой с первой, умноженной на -8.

Третью строку заменим суммой с первой, умноженной на -7.

Четвертую строку заменим суммой с первой, умноженной на -3.

Получим:

$$A_{4 \times 5} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & -18 & 12 & 39 & 120 \\ 0 & -12 & 8 & 26 & 80 \\ 0 & -6 & 4 & 13 & 40 \end{pmatrix}.$$

3) Переставим вторую строку с четвертой:

$$A_{4 \times 5} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & -6 & 4 & 13 & 40 \\ 0 & -12 & 8 & 26 & 80 \\ 0 & -18 & 12 & 39 & 120 \end{pmatrix}.$$

4) Третью строку заменим суммой со второй, умноженной на -2.

Четвертую строку заменим суммой со второй, умноженной на -3.

Получим трапецевидную матрицу:

$$A_{4 \times 5} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & -6 & 4 & 13 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В данном примере матрица имеет две ненулевые строки, и минор второго порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

Следовательно, ранг исходной матрицы  $A_{4 \times 5}$  равен двум.

В общем случае, очевидно, *ранг ступенчатой матрицы равен числу ненулевых строк.*



## 1.10 Системы линейных алгебраических уравнений

Определение. Системой линейных алгебраических уравнений называется система  $t$  уравнений с  $n$  неизвестными (переменными)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

[illegible]

Числа  $a_{ik}$  ( $i=1,2,\dots,m; k=1,2,\dots,n$ ) называются *коэффициентами при неизвестных* или *коэффициентами системы*, а числа  $b_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) – *свободными членами*.

Если число уравнений системы равно числу неизвестных ( $m = n$ ), то будем называть систему уравнений *квадратной системой*, в противном случае ( $m \neq n$ ) – *системой общего вида*.

Если все свободные члены  $b_1, b_2, \dots, b_m$  равны нулю:

[illegible]

то система линейных уравнений называется *однородной*, в противном случае – *неоднородной*.

Определение. *Решением системы линейных уравнений* называется упорядоченная совокупность  $n$  чисел  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ , которые, будучи подставлены в систему уравнений вместо  $x_1, x_2, \dots, x_n$  соответственно, обращают все уравнения системы в тождества.

Определение . Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение; если система не имеет решений, то она называется несовместной.

Совместная система уравнений называется *определенной*, если она имеет одно решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Определение. Системы линейных уравнений называются эквивалентными, если они имеют одно и то же множество решений.

К эквивалентной системе уравнений приводят, очевидно, следующие преобразования исходной системы:

- 1) вычеркивание уравнения  $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$ , которое будем называть *нулевой строкой*;
- 2) перестановка уравнений или слагаемых  $a_{ik}x_k$  в уравнениях;
- 3) прибавление к обеим частям одного уравнения соответственно обеих частей другого уравнения этой системы, умноженного на любое число;
- 4) удаление уравнения, являющегося линейной комбинацией других уравнений системы (из такого уравнения можно сформировать нулевую строку).

Введем в рассмотрение следующие матрицы:

- 1) *матрицу системы*

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящую из коэффициентов при неизвестных системы;

- 2) *матрицу-столбец (столбец) неизвестных*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};$$

- 3) *матрицу-столбец (столбец) свободных членов*

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда систему линейных уравнений можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ или } \underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{X} = \underset{m \times 1}{B}, \text{ или просто } AX = B.$$

Введем в рассмотрение еще одну матрицу. Дополним матрицу системы  $A$  столбцом свободных членов  $B$  и получим новую матрицу размером  $m \times (n+1)$ , которую назовем *расширенной матрицей системы*:

$$(A|B) = A_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что система линейных уравнений может быть представлена расширенной матрицей системы.

Ясно также, что ранг  $r(A_B) \geq r(A)$ , так как каждый минор матрицы  $A$  будет минором и матрицы  $B$ , но не наоборот.

**Пример.**

Пусть дана система линейных уравнений общего вида

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7. \end{cases}$$

из трех уравнений ( $m=3$ ) с четырьмя неизвестными  $x_1, x_2, x_3, x_4$  ( $n=4$ ).

Тогда

$$\underset{3 \times 4}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad \underset{3 \times 5}{A_B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

В матричной форме система уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что рассматриваемая система совместна, так как значения

$$x_1 = 5/2; \ x_2 = 1/2; \ x_3 = 0; \ x_4 = 0$$

обращают все три уравнения системы в тождества.

## 1.11 Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера

Рассмотрим частный случай системы линейных уравнений, когда число уравнений равно числу неизвестных ( $m = n$ ), т.е. квадратную систему уравнений

[illegible]

Составим квадратную матрицу  $A$  порядка  $n$  этой системы:

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Составим определитель порядка  $n$  квадратной матрицы  $A$  этой системы:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

который называется также *определителем системы*. Заменяем в этом определителе  $k$ -ый столбец на столбец свободных членов  $B$ , т.е. получим в результате другой определитель, который обозначим  $\Delta_k$ :

$$\Delta_k = \begin{matrix} (k) \\ \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{array} \right|, \quad k=1,2,\dots,n. \end{matrix}$$

Тогда если  $\Delta \neq 0$ , квадратная система линейных уравнений имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad k=1,2,\dots,n.$$

Пример.

Найти решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение. Составим и вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 2 + 18 + 3 - 16 + 3 = 2 \neq 0.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Найдем это решение по формулам Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -20 - 12 + 9 + 18 - 8 + 15 = 2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 5 + 36 - 3 - 40 + 6 = -2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 30 + 5 - 24 - 3 = 4;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{2} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2.$$

## 1.12 Решение систем линейных уравнений матричным методом (с помощью обратной матрицы)

Рассмотрим опять частный случай системы линейных уравнений, когда число уравнений равно числу неизвестных ( $m = n$ ), т.е. квадратную систему уравнений

[illegible]

В матричной форме данная система имеет вид  $AX = B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Составим квадратную матрицу  $A$  порядка  $n$  этой системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если определитель матрицы  $A$  (определитель системы)

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то матрица  $A$  является невырожденной и для нее существует обратная матрица  $A^{-1}$ .

Умножая обе части матричного уравнения  $AX = B$  слева на матрицу  $A^{-1}$ , получим

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$$

Используя свойства умножения матриц, имеем

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X.$$

Следовательно,

$$X = A^{-1}B.$$

Данное равенство есть матричная запись решения исходной квадратной системы линейных уравнений.

**Пример.**

Найти решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$$

*Решение.* Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы  $A$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 2 + 18 + 3 - 16 + 3 = 2 \neq 0.$$

Так как определитель матрицы  $A$  отличен от нуля, то для матрицы  $A$  существует обратная матрица  $A^{-1}$ .

Для нахождения обратной матрицы используем формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^*,$$

где  $\Delta = |A| = 2$ , а матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

является присоединенной к матрице  $A$  и составляется из алгебраических дополнений  $A_{ik}$  элементов  $a_{ik}$  определителя  $|A|$  матрицы  $A$ .

Для этого вычислим сначала все алгебраические дополнения элементов исходной матрицы  $A$ :

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 9) = 1;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8 + 1) = -9; \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1;$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 2) = -1;$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 6) = 7;$$

$$A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5.$$

Составим из найденных алгебраических дополнений присоединенную матрицу к  $A$ , заменив каждый ее элемент его алгебраическим дополнением и протранспонировав (заменяв строки столбцами):

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -9 & 1 & 7 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем обратную матрицу по формуле с использованием присоединенной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -9 & 1 & 7 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

В матричной форме решение исходной системы уравнений имеет вид

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -9 & 1 & 7 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -5 + 1 + 6 \\ -45 + 1 + 42 \\ 35 - 1 - 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

т.е.  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = -1$ ;  $x_3 = 2$ , что, естественно, совпадает с найденным выше решением этой же системы по формулам Крамера.





На первом этапе метода Гаусса расширенная матрица системы с помощью элементарных преобразований приводится к трапецевидной форме.

При этом следует обращать внимание на два момента:

1) Если в процессе элементарных преобразований *в расширенной матрице появляются нулевые строки, то их можно отбросить*, так как они являются линейными комбинациями других строк. Иными словами, соответствующее каждой нулевой строке уравнение системы является линейной комбинацией других уравнений системы и не оказывает никакого влияния на решение системы. Это видно из того, что нулевая строка расширенной матрицы соответствует уравнению вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0,$$

решениями которого являются любые упорядоченные наборы  $n$  действительных чисел.

2) Если в процессе элементарных преобразований *в матрице системы появляется нулевая строка*, а расположенный в этой же строке расширенной матрицы свободный член отличен от нуля, то система линейных уравнений несовместна. Назовем такую строку «плохой». «Плохой» строке расширенной матрицы соответствует уравнение вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b; \quad b \neq 0,$$

которое, очевидно, не имеет решений, так как ни для каких действительных значений неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  это уравнение не может обратиться в тождество. Следовательно, система уравнений несовместна.

**Пример.**

Найти методом Гаусса решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 7, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$$

*Решение.* Рассмотрим прямой ход метода Гаусса.

Расширенная матрица системы имеет вид

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -5 & 6 & -2 \\ -3 & 2 & -1 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приведем ее с помощью элементарных преобразований к трапецевидной форме.

На первом шаге в качестве разрешающей (ведущей) строки выбираем первую строку, а в качестве разрешающего элемента выбираем диагональный элемент этой строки, так как он отличен от нуля:  $a_{11}=1 \neq 0$ . Переписываем разрешающую первую строку без изменения.

«Обнуляем» первый столбец, для чего:

- вместо второй строки записываем ее сумму с разрешающей первой строкой, умноженной на (-2):  $Стр.2 = Стр.2 + Стр.1 \times (-2)$ ;
- вместо третьей строки записываем ее сумму с разрешающей первой строкой, умноженной на (-1):  $Стр.3 = Стр.3 + Стр.1 \times (-1)$ ;
- вместо четвертой строки записываем ее сумму с разрешающей первой строкой, умноженной на 3:  $Стр.4 = Стр.4 + Стр.1 \times 3$ .

Получаем эквивалентную матрицу

$$A_B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & 5 & 8 & -2 & 8 & 24 \end{pmatrix}.$$

Упростим ее с целью дальнейших преобразований, для чего поменяем местами вторую и четвертую строки:  $Стр.2 \Leftrightarrow Стр.4$ ;

Получаем эквивалентную матрицу

$$A_B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & -2 & 8 & 24 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & -12 \end{pmatrix}.$$

На втором шаге в качестве разрешающей (ведущей) строки выбираем вторую строку, а в качестве разрешающего элемента выбираем диагональный элемент этой строки, так как он отличен от нуля:  $a_{22} = 5 \neq 0$ . Переписываем разрешающую вторую строку без изменения. Бывшей уже разрешающей первую строку также переписываем без изменения.

Однако в данном случае «обнулять» второй столбец не нужно, так как в нем ниже разрешающего элемента  $a_{22} = 5 \neq 0$  уже стоят нули. Поэтому и остальные строки матрицы – третью и четвертую – переписываем без изменения. Таким образом, матрица не изменилась.

На третьем шаге в качестве разрешающей (ведущей) строки выбираем третью строку, а в качестве разрешающего элемента выбираем диагональный элемент этой строки, так как он отличен от нуля:  $a_{33} = 2 \neq 0$ . Переписываем разрешающую третью строку без изменения. Бывшими уже разрешающими первую и вторую строки также переписываем без изменения.

«Обнуляем» третий столбец, для чего вместо четвертой строки записываем ее сумму с разрешающей третьей строкой:  $Стр.4 = Стр.4 + Стр.3$ .

Получаем эквивалентную матрицу

$$A_B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & -2 & 8 & 24 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -21 \end{pmatrix},$$

ранг которой равен четырем (количеству ненулевых строк).

Тогда матрица, эквивалентная матрице системы, имеет вид

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

но ее ранг равен трем (количеству ненулевых строк).

Таким образом, на первом этапе метода Гаусса (прямой ход) установлено, что ранг матрицы системы не равен рангу расширенной матрицы системы

$$r(A) = 3; \quad r(A_B) = 4; \quad r(A) \neq r(A_B).$$

Следовательно, система несовместна и не имеет решений.

Об этом же, собственно, говорит и наличие «плохой» – четвертой – строки в матрице, эквивалентной расширенной матрице системы  $A_B$ .

На втором этапе (если система уравнений совместна) метода Гаусса после удаления нулевых строк расширенная матрица (эквивалентная исходной после элементарных преобразований), ранг которой равен  $r$ , имеет вид

$$\left( \begin{array}{cccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} & \alpha_{2,r+1} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \dots & \alpha_{rn} & \beta_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right), \quad (\alpha_{jj} \neq 0; j=1,2,\dots,r).$$

Эта расширенная матрица соответствует системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \alpha_{33}x_3 + \dots + \alpha_{3n}x_n = \beta_3, \\ \dots \\ \alpha_{rr}x_r + \dots + \alpha_{rn}x_n = \beta_r. \end{array} \right.$$

Рассмотрим два случая.

1) Ранг расширенной матрицы равен числу неизвестных ( $r=n$ ).

Система уравнений имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \alpha_{33}x_3 + \dots + \alpha_{3n}x_n = \beta_3, \\ \dots \\ \alpha_{rr}x_r = \beta_r. \end{array} \right.$$

В этом случае система имеет *единственное* решение. Система – *совместная и определенная*.

Поднимаясь снизу вверх (обратный ход метода Гаусса), последовательно находим:

- из последнего  $r$ -го уравнения неизвестное  $x_r = \beta_r / \alpha_{rr}$ ;
- из  $(r-1)$ -го уравнения неизвестное  $x_{r-1}$  путем подстановки в это уравнение уже найденного неизвестного  $x_r$ ;
- из  $i$ -го уравнения неизвестное  $x_i$  при подстановке в него уже найденных величин  $x_r, x_{r-1}, \dots, x_{i-1}$ ;
- и так далее до первого уравнения, из которого при подстановке в него уже найденных величин  $x_r, x_{r-1}, \dots, x_2$  находим  $x_1$ .

**Пример.**

Найти методом Гаусса решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

*Решение.*

1) Прямой ход метода Гаусса.

Расширенная матрица системы имеет вид

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приведем ее с помощью элементарных преобразований к трапецевидной форме.

На первом шаге в качестве разрешающей (ведущей) строки выбираем первую строку, а в качестве разрешающего элемента выбираем диагональный элемент этой строки, так как он отличен от нуля:  $a_{11} = 1 \neq 0$ . Переписываем разрешающую первую строку без изменения.

«Обнуляем» первый столбец, для чего:

- вместо второй строки записываем ее сумму с разрешающей первой строкой, умноженной на  $(-1)$ :  $Стр.2 = Стр.2 + Стр.1 \times (-1)$ ;
- вместо третьей строки записываем ее сумму с разрешающей первой строкой, умноженной на  $(-1)$ :  $Стр.3 = Стр.3 + Стр.1 \times (-1)$ ;
- вместо четвертой строки записываем ее сумму с разрешающей первой строкой, умноженной на  $(-3)$ :  $Стр.4 = Стр.4 + Стр.1 \times (-3)$ .

Получаем эквивалентную матрицу

$$A_B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Упростим ее с целью дальнейших преобразований, для чего:

- поменяем местами вторую и третью строки:  $Стр.2 \Leftrightarrow Стр.3$ ;
- четвертую строку умножим на  $-(1/2)$ :  $Стр.4 = Стр.4 \times (-1/2)$ .

Получаем эквивалентную матрицу

$$A_B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

На втором шаге в качестве разрешающей (ведущей) строки выбираем вторую строку, а в качестве разрешающего элемента выбираем диагональный элемент этой строки, так как он отличен от нуля:  $a_{22} = 1 \neq 0$ . Переписываем разрешающую вторую строку без изменения. Бывшей уже разрешающей первую строку также переписываем без изменения.

«Обнуляем» второй столбец, для чего:

- вместо третьей строки записываем ее сумму с разрешающей второй строкой, умноженной на 3:  $Стр.3 = Стр.3 + Стр.2 \times 3$ ;
- вместо четвертой строки записываем ее сумму с разрешающей второй строкой, умноженной на  $(-1)$ :  $Стр.4 = Стр.4 + Стр.2 \times (-1)$ .

Получаем эквивалентную матрицу

$$A_B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Упростим ее с целью дальнейших преобразований, для чего:

- третью строку умножим на  $-(1/14)$ :  $Стр.3 = Стр.3 \times (-1/14)$ ;
- четвертую строку умножим на  $(1/7)$ :  $Стр.4 = Стр.4 \times (1/7)$ .

Получаем эквивалентную матрицу

$$A_B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

На третьем шаге в качестве разрешающей (ведущей) строки выбираем третью строку, а в качестве разрешающего элемента выбираем диагональный элемент этой строки, так как он отличен от нуля:  $a_{33} = 1 \neq 0$ . Переписываем разрешающую третью строку без изменения. Бывшими уже разрешающими первую и вторую строки также переписываем без изменения.

«Обнуляем» третий столбец, для чего:

- вместо четвертой строки записываем ее сумму с разрешающей третьей строкой, умноженной на  $(-1)$ :  $Стр.4 = Стр.4 + Стр.3 \times (-1)$ .

Получаем эквивалентную матрицу

$$A_B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ранг которой равен трем (количеству ненулевых строк).

Тогда матрица, эквивалентная матрице системы, имеет вид



$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и ее ранг также равен трем (количеству ненулевых строк).

Таким образом, на первом этапе метода Гаусса (прямой ход) установлено, что ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы

$$r(A) = r(A_B) = 3$$

и равен числу неизвестных. Следовательно, система совместна и имеет единственное решение.

Найдем далее это решение.

2) Обратный ход метода Гаусса.

Полученная расширенная матрица системы

$$A_B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

соответствует системе уравнений (нулевая строка может быть отброшена)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 - 4x_3 = -4, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Заметим, что определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

есть базисный минор третьего порядка расширенной матрицы  $A_B$ , в который в качестве базисных столбцов входят столбцы, составленные из коэффициентов при неизвестных  $x_1, x_2, x_3$ .

Поднимаясь снизу вверх (обратный ход метода Гаусса), последовательно находим:



является совместной и неопределенной: она имеет бесчисленное множество решений.

Решение этой системы находится обратным ходом метода. Поднимаясь снизу вверх последовательно находим:

- из последнего  $r$ -го уравнения неизвестное  $x_r = (\beta_r - \alpha_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - \alpha_{rn}x_n) / \alpha_{rr}$ ;
- из  $(r-1)$ -го уравнения неизвестное  $x_{r-1}$  путем подстановки в это уравнение уже найденного неизвестного  $x_r$ ;
- из  $i$ -го уравнения неизвестное  $x_i$  при подстановке в него уже найденных величин  $x_r, x_{r-1}, \dots, x_{i-1}$ ;
- и так далее до первого уравнения, из которого при подстановке в него уже найденных величин  $x_r, x_{r-1}, \dots, x_2$  находим  $x_1$ .

**Пример.**

Решить методом Гаусса систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1. \end{cases}$$

*Решение.* Составим расширенную матрицу системы:

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Приведем ее с помощью элементарных преобразований к трапецевидной форме.

На первом шаге в качестве разрешающей (ведущей) строки выбираем первую строку, а в качестве разрешающего элемента выбираем диагональный элемент этой строки, так как он отличен от нуля:  $a_{11} = 2 \neq 0$ . Переписываем разрешающую первую строку без изменения.

«Обнуляем» первый столбец, для чего:

- вместо второй строки записываем ее сумму с разрешающей первой строкой, умноженной на (-2):  $Стр.2 = Стр.2 + Стр.1 \times (-2)$ ;
- вместо третьей строки записываем ее сумму с разрешающей первой строкой, умноженной на (-1):  $Стр.3 = Стр.3 + Стр.1 \times (-1)$ .

Получаем эквивалентную матрицу

$$A_B \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

На втором шаге в качестве разрешающей (ведущей) строки выбираем вторую строку, а в качестве разрешающего элемента выбираем  $a_{23} = -1 \neq 0$ , так как диагональный элемент этой строки равен нулю:  $a_{22} = 0$ . Переписываем разрешающую вторую строку без изменения. Бывшей уже разрешающей первую строку также переписываем без изменения.

«Обнуляем» третий столбец (второй столбец уже «обнулен» в результате предыдущей операции), для чего:

- вместо третьей строки записываем ее сумму с разрешающей второй строкой, умноженной на (-2):  $Стр.3 = Стр.3 + Стр.2 \times (-2)$ .

Получаем эквивалентную матрицу

$$A_B \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ранг которой равен двум (количеству ненулевых строк).

Тогда матрица, эквивалентная матрице системы, имеет вид

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и ее ранг также равен двум (количеству ненулевых строк).

Таким образом, на первом этапе метода Гаусса (прямой ход) установлено, что ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы

$$r = r(A) = r(A_B) = 2$$

и меньше числа неизвестных  $n=5$ . Следовательно, система является совместной и неопределенной: она имеет бесчисленное множество решений.

Найдем далее эти решения.

2) Обратный ход метода Гаусса.

Полученная расширенная матрица системы

$$A_B \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

соответствует системе уравнений (нулевая строка может быть отброшена)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ -x_3 + 5x_4 - x_5 = -1, \end{cases}$$

которая эквивалентна исходной системе уравнений.

В данном случае число неизвестных в системе  $n=5$ , а ранг  $r=2$ . Поэтому в качестве базисных неизвестных могут быть выбраны  $r=2$  любых неизвестных, минор второго порядка для которых является базисным, т.е. отличен от нуля. Остальные  $n-r=3$  неизвестных будут свободными.

Всего для матрицы системы можно составить (в этом легко убедиться хотя бы простым перебором) 10 миноров второго порядка, каждый из которых содержит два столбца при соответствующих неизвестных:

$$1) \Delta(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad 2) \Delta(x_1, x_3) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0;$$

$$3) \Delta(x_1, x_4) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10 \neq 0; \quad 4) \Delta(x_1, x_5) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0;$$

$$5) \Delta(x_2, x_3) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \quad 6) \Delta(x_2, x_4) = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0;$$

$$7) \Delta(x_2, x_5) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \quad 8) \Delta(x_3, x_4) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 13 \neq 0;$$

$$9) \Delta(x_3, x_5) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \quad 10) \Delta(x_4, x_5) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0.$$

Видно, что все миноры, кроме первого, отличны от нуля, т.е. являются базисными. Значит, в качестве базисных неизвестных можно взять любую пару, кроме неизвестных  $x_1, x_2$ .

Выберем в качестве базисных неизвестных, например,  $x_2, x_3$ . Тогда  $x_1, x_4, x_5$  будут свободными неизвестными. Преобразуем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ -x_3 + 5x_4 - x_5 = -1, \end{cases}$$

оставляя в левой части все слагаемые, содержащие базисные неизвестные  $x_2, x_3$  и перенося в правые части уравнений все слагаемые, содержащие свободные неизвестные  $x_1, x_4, x_5$ . Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = 1 - 2x_1 + 2x_4 - 4x_5, \\ -x_3 = -1 - 5x_4 + x_5. \end{cases}$$

Из этой системы обратным ходом метода Гаусса находим решение

$$x_3 = 1 + 5x_4 - x_5,$$

$$\begin{aligned} x_2 &= -1 + 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -1 + 2x_1 + 3(1 + 5x_4 - x_5) - 2x_4 + 4x_5 = \\ &= 2 + 2x_1 + 13x_4 + x_5, \end{aligned}$$

или

$$x_2 = 2 + 2x_1 + 13x_4 + x_5; \quad x_3 = 1 + 5x_4 - x_5.$$

Полученное решение называют *общим*, оно содержит бесчисленное множество решений, поскольку  $x_1, x_4, x_5$  могут принимать любые значения. При этом каждому упорядоченному набору чисел  $x_1, x_4, x_5$  соответствует одно решение, называемое *частным*.

Частное решение, когда все свободные неизвестные полагаются равными нулю, называется *базисным решением*.

Для рассматриваемых базисных неизвестных  $x_2, x_3$  и свободных неизвестных  $x_1, x_4, x_5$  базисное решение имеет вид

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = 0; \quad x_5 = 0.$$

Всего в данном примере система имеет 9 базисных решений, соответствующих выбору базисных и свободных неизвестных согласно выбору базисного минора. Эти базисные решения можно найти для оставшихся восьми пар базисных неизвестных аналогично тому, как это сделано выше для базисных неизвестных  $x_2, x_3$ , а можно найти из уже полученного общего решения, полагая соответствующие свободные неизвестные равными нулю.

Пусть, например, в качестве базисных неизвестных выбраны  $x_4, x_5$ . Тогда, полагая свободные неизвестные  $x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0$ , из найденного ранее общего решения

$$x_2 = 2 + 2x_1 + 13x_4 + x_5; \quad x_3 = 1 + 5x_4 - x_5$$

получим еще одно, соответствующее базисным неизвестным  $x_4, x_5$ , базисное решение:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ 13x_4 + x_5 = -2, \\ 5x_4 - x_5 = -1, \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0; x_4 = -\frac{1}{6}; x_5 = \frac{1}{6}.$$

## КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

### 1.14. Понятие комплексного числа. Различные формы комплексных чисел.

Пусть на плоскости введена декартова прямоугольная система координат.

**Определение.** Комплексным числом называется выражение  $z = x + yi$ , ( $z = a + bi$ ) (где  $x$  и  $y$  — действительные числа, а  $i$  — мнимая единица, определенная равенствами  $i = \sqrt{-1}$  или  $i^2 = -1$ .  $x$  называется действительной частью и обозначается  $x = \operatorname{Re} z$ , а  $y$  называется мнимой частью и обозначается  $y = \operatorname{Im} z$ . И обратно, каждую точку  $M(x; y)$  координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа  $z = x + yi$  (рис. 1.3).

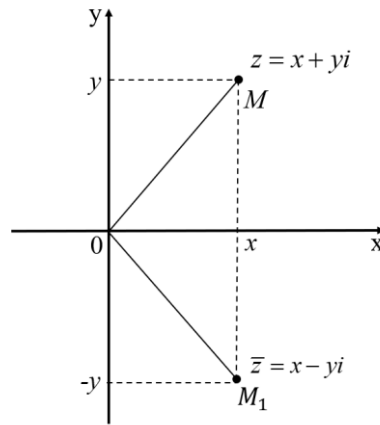


Рис. 1.3 Изображение комплексного числа на плоскости.

Комплексное число удобно изображать точками плоскости. Комплексное число  $z = x + yi$  представим точкой с координатами  $(x, y)$ .

Таким образом, имеется вещественно-однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости.

Определение. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.

Определение. Ось абсцис называется *действительной осью*, на ней лежат действительные числа  $z = x + 0 \cdot i = x$ ; ось ординат называется *мнимой осью*, на ней лежат чисто мнимые комплексные числа  $z = 0 + yi$ .

Определение. Два комплексных числа  $z = x + yi$  и  $\bar{z} = x - yi$ , отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются *сопряженными* (рис. 1.3).

Определение. Запись комплексного числа  $z$  в виде  $z = x + iy$  называется его алгебраической формой.

Самым главным свойством комплексных чисел является возможность определить сложение, вычитание, умножение и деление этих чисел, удовлетворяющих естественным требованиям. При этом действительные числа можно рассматривать как некоторое подмножество в множестве комплексных чисел и все операции там совпадают.

Примем два соглашения:

- 1) два комплексных числа  $x_1 + iy_1$  и  $x_2 + iy_2$  считаются равными, если  $x_1 = x_2$  и  $y_1 = y_2$ ;



2) комплексное число  $z=0$  тогда и только тогда, когда  $x=0$  и  $y=0$ .

Комплексное число  $z=x+yi$  можно представить в виде радиус-вектора  $\vec{r} = \overline{OM} = \{x; y\}$ , соединив начало координат с точкой  $M(x; y)$  (рис. 1.4)

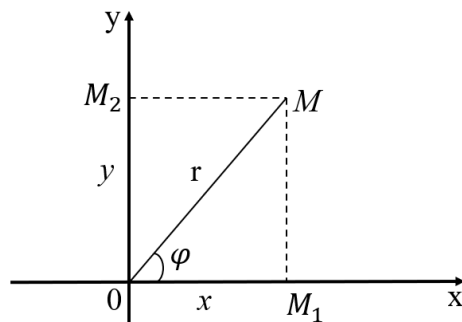


Рис. 1.4. Изображение комплексного числа

Определение . Длина вектора  $\vec{r}$ , изображающего комплексное число  $z$ , называется *модулем* этого числа и обозначается  $|z| = r$ .

Определение . Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором  $\vec{r}$ , изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого комплексного числа и обозначается  $Argz$  или  $\varphi$ .

Аргумент комплексного числа  $z$  – многозначная величина и определяется с точностью до слагаемого  $2\pi n$ , ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ):  $Argz = \arg z + 2\pi n$ , где  $\arg z$  – *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке  $(-\pi, \pi]$ .

Для всякого комплексного числа  $z=x+yi$  длина радиуса-вектора равна  $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ , а угол  $\varphi$  таков, что  $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ ,  $\sin \varphi = \frac{y}{r}$ . Аргумент  $z$  можно определить по формуле  $tg \varphi = \frac{y}{x}$ .

Изобразим комплексное число  $z$  вектором  $\overline{OM} = \{x; y\}$  и из треугольника  $OMM_1$  выразим модуль  $r$  и аргумент  $\varphi$  этого комплексного числа (рис. 1.4):

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (1.1)$$

Если в выражении  $z = x + iy$  заменить  $x$  и  $y$  полученными значениями (1.1), то получим:

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.2)$$

Это выражение называют *тригонометрической формой* комплексного числа  $z$ .

Так как  $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$ , то  $\cos \varphi = \cos(\arg z + 2\pi n) = \cos(\arg z)$ ,  
 $\sin \varphi = \sin(\arg z)$ .

Поэтому при переходе от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической достаточно определить лишь главное значение аргумента комплексного числа  $z$ , т.е. считать  $\varphi = \arg z$ .

Учитывая, что  $-\pi < \arg z \leq \pi$ , а главное значение  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  заключено между  $-\frac{\pi}{2}$  и

$\frac{\pi}{2}$ , получаем связь между главным значением аргумента  $z$  и  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ :

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{для внутренних углов I, IV четвертей (рис. 1.5(a, z)),} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & \text{для внутренних углов II четверти (рис. 1.5(б)),} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & \text{для внутренних углов III четверти (рис. 1.5(в)).} \end{cases}$$

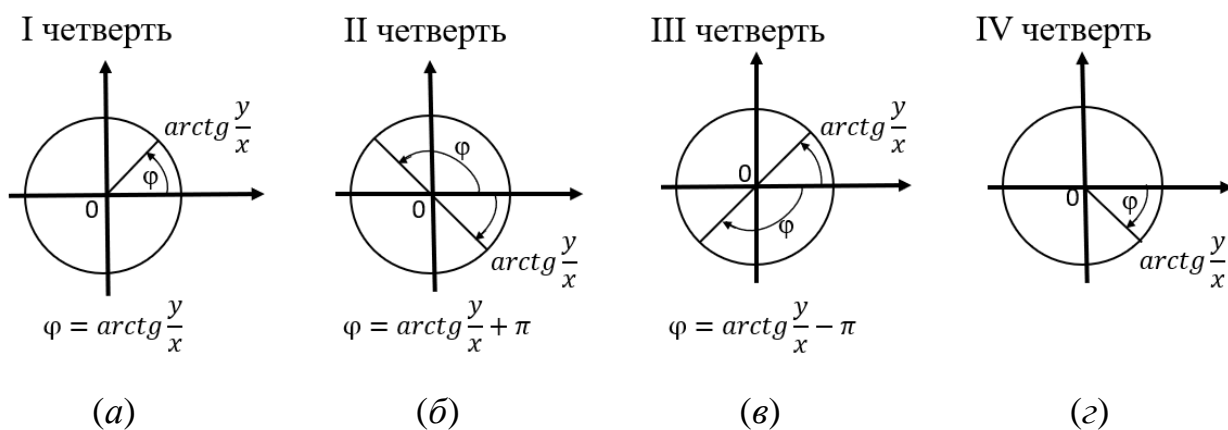


Рис. 1.5. Связь между главным значением аргумента  $z$  и  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

Два комплексных числа, записанные в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда модули у них равны, а аргументы отличаются на число, кратное  $2\pi$ .

Если  $r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ , то  $r = \rho$  и  $\varphi = \theta + 2\pi n$ , ( $n = 0; \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Модуль комплексного числа ноль (0) равен нулю:  $|0|=0$ . В качестве же аргумента нуля можно принять любой угол  $\varphi$ . Действительно, для любого угла  $\varphi$  имеет место равенство:

$$0 = 0 \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Комплексное число имеет форму представления, которая называется *показательной*:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Так же, как и в тригонометрической форме,  $r$  – это модуль комплексного числа, а  $\varphi$  – аргумент.

Показательная форма записи комплексного числа  $z = x + yi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  имеет вид:

$$z = re^{i\varphi}, \text{ где } e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Она называется формулой Эйлера и представляет собой определение показательной функции  $e^{i\varphi}$ .

**Пример.** Представить комплексное число  $z = 1 - \sqrt{3}i$  в тригонометрической и показательной формах.

*Решение.* Найдем модуль и аргумент комплексного числа

$$z: |z| = r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \quad \cos \varphi = \frac{1}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \quad \text{следовательно, угол}$$

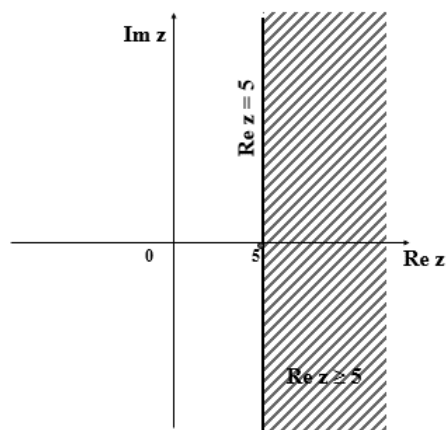
находится в четвертой четверти, т.е.  $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ .

Таким образом, тригонометрическая форма записи комплексного числа имеет вид:  $z = 2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$ , а показательная форма имеет вид:

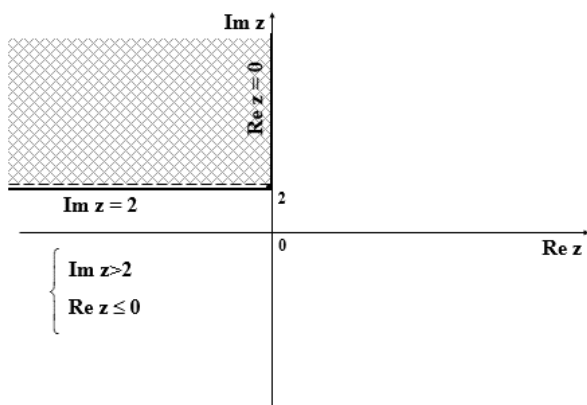
$$z = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

Рассмотрим некоторые примеры.

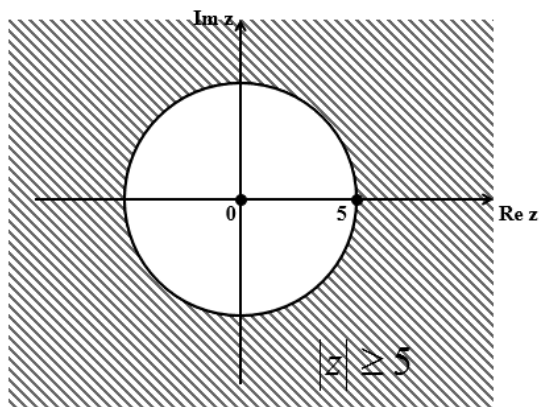
**Пример.** Изобразить на плоскости множество комплексных чисел, для которых выполняется условие  $\operatorname{Re} z \geq 5$ .



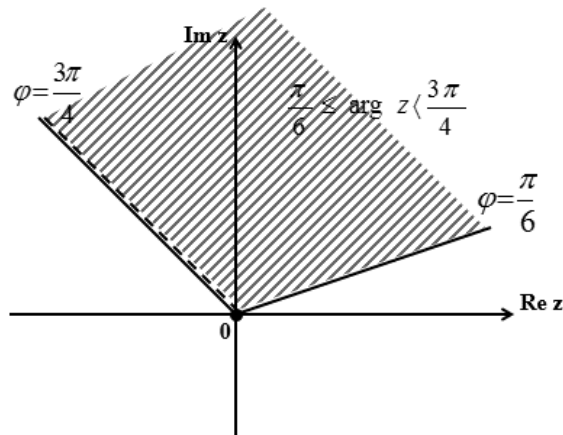
Пример. Изобразить на плоскости множество комплексных чисел, для которых выполняется условие  $\begin{cases} \text{Re } z \leq 0 \\ \text{Im } z > 2 \end{cases}$ .



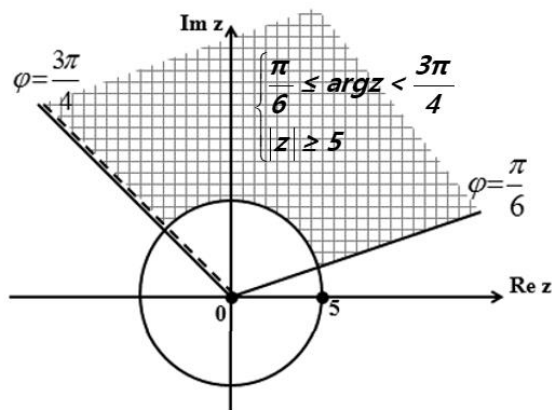
Пример. Изобразить на плоскости множество комплексных чисел, для которых выполняется условие  $|z| \geq 5$ .



Пример. Изобразить на плоскости множество комплексных чисел, для которых выполняется условие  $\frac{\pi}{6} \leq \arg z < \frac{3\pi}{4}$



Пример. Изобразить на плоскости множество комплексных чисел, для которых выполняется условие  $\begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq \arg z < \frac{3\pi}{4} \\ |z| \geq 5 \end{cases}$



## 1.15 Действия над комплексными числами

### 1.15.1 Арифметические операции над комплексными числами в алгебраической форме.

Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, производят по обычным правилам алгебры. Сложение (вычитание) комплексных чисел сводится к сложению (вычитанию) их действительных и мнимых частей.

Пусть даны два комплексных числа  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ .

$$\text{а) } z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (1.3)$$

$$\text{б) } z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad (1.4)$$

При умножении комплексных чисел заменяют  $i^2$  на  $(-1)$ :

$$\text{в) } z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad (1.5)$$

Отметим важное свойство формулы (1.5):

$$(x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 \quad (1.6)$$

Комплексные числа  $x + iy$  и  $x - iy$ , как было отмечено выше, называются *сопряженными* и употребляют обозначения  $\overline{x + iy} = x - iy$ ,  $\overline{x - iy} = x + iy$

Справедливы свойства сопряженных чисел:

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}z;$$

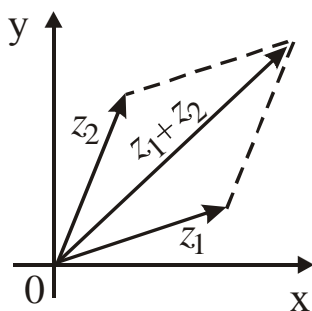
$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2;$$

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ — модуль комплексного числа.}$$

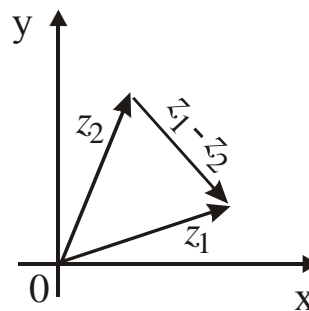
При делении комплексных чисел числитель и знаменатель умножают на число, сопряженное знаменателю:

$$\begin{aligned} \text{г) } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(-x_1y_2 + x_2y_1)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}i, \quad (z_2 \neq 0). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Геометрически сложение комплексных чисел истолковывается как сложение векторов по правилу параллелограмма (рис. 1.6(а)).



а)



б)

Рис. 1.6. Геометрическое представление суммы и разности комплексных чисел

Разность комплексных чисел  $z_1 - z_2$  изображают вектором, идущим из конца вычитаемого вектора в конец уменьшаемого (рис. 1.6(б)).

При умножении комплексного числа  $z = x + iy$  на действительное число  $k$  действительная и мнимая части  $z$  умножаются на число  $k$ :

$$k \cdot z = kx + iky.$$

Геометрически произведение комплексного числа  $z$  на действительное число  $k$  дает вектор  $k \cdot z$ , длина которого равна длине вектора  $z$ , умноженной на  $|k|$ , а направление совпадает с направлением  $z$ , если  $k > 0$ , и противоположно последнему, если  $k < 0$ .

**Пример.** Вычислить  $z = \frac{2+3i}{1-i}$  и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.

**Решение.** Действуя в соответствии с правилами (1.6), (1.5), получаем:

$$z = \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+3i+2i+3i^2}{1-i^2} = \frac{(2-3)+5i}{1+1} = \frac{-1+5i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i;$$

Поэтому  $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}, \operatorname{Im} z = \frac{5}{2}.$

**Теорема 1.1.** Модуль разности двух комплексных чисел  $|z_2 - z_1|$  равен расстоянию между точками  $z_1$  и  $z_2$ ; аргумент разности, т.е.  $\arg(z_2 - z_1)$ , равен углу наклона к положительному направлению оси  $Ox$  вектора, идущего из точки  $z_1$  в точку  $z_2$ .

*Доказательство.* Положим  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  и  $x_2 > x_1$ ,  $y_2 > y_1$ .

Тогда  $z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$ . Отсюда модуль разности двух комплексных чисел

равен:  $|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ , но это выражение дает расстояние между

двумя точками  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ . Аргумент разности  $\arg(z_2 - z_1) = \operatorname{arctg} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , что

выражает угол наклона к оси  $Ox$  вектора, соединяющего точки  $z_1$  и  $z_2$  (рис.1.6).

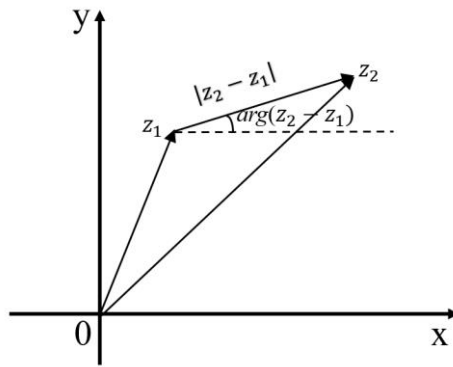


Рис. 1.6. Геометрический смысл модуля и аргумента суммы и разности комплексных чисел

Примеры.

1. Равенство  $|z|=1$  определяет множество точек  $z$ , расстояния которых от начала координат равны единице, т.е. окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1.
2. Равенство  $|z-a|=r$  (где  $a$  – комплексное число,  $r$  – действительное число) характеризует точки  $z$ , расстояние которых от точки  $a$  есть постоянная величина, равная  $r$ , то есть окружность с центром в точке  $a$  радиуса  $r$ .
3. Равенство  $|z-a|=|z-b|$  (где  $a, b$  – комплексные числа) характеризует точки  $z$ , расстояние  $|z-a|$  которых от точки  $a$  равно расстоянию  $|z-b|$  тех же точек от точки  $b$ . Геометрическое место таких точек  $z$  есть перпендикуляр, проведенный через середину отрезка, соединяющего точки  $a$  и  $b$ .

### 1.15.2. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Пусть комплексные числа  $z_1$  и  $z_2$  заданы в тригонометрической форме,

то есть  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ , тогда

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \\ &+ i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2] = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ &+ (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]} \quad (1.8)$$



$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (1.9)$$

Итак, при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме модули их перемножаются, а аргументы складываются, при делении – модули делятся, а аргументы вычитаются.

Формула возведения в степень комплексного числа:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad - \quad (1.10)$$

*формула Муавра.*

При возведении комплексного числа в целую степень модуль его возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

Например, при  $r=1$  и  $n=3$  получим по формуле Муавра

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi.$$

**Пример.** Определить модуль и аргумент числа  $z=1-i\sqrt{3}$ , записать это число в тригонометрической форме.

*Решение.* По определению  $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ . Для определения аргумента воспользуемся формулами:  $\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ . Учитывая, что точка  $M(1; \sqrt{3})$ ,

соответствующая заданному комплексному числу, лежит в четвертой четверти,

получаем, что  $\varphi = \operatorname{Arg} z = \frac{5\pi}{3}$ . Тригонометрическая форма заданного

комплексного числа имеет вид:  $z = 2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$ .

**Пример.** Вычислить:  $(-1+i)^{13}$ .

*Решение.* Для того, чтобы воспользоваться формулой Муавра, необходимо представить комплексное число в тригонометрической форме. Имеем:

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ,  $\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  и  $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , т.е.  $\varphi = \frac{4\pi}{3}$  (так как соответствующая

точка  $(-1;1)$  лежит во второй четверти). Следовательно, представим комплексное число в тригонометрической форме

$$-1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \quad \text{и} \quad (-1+i)^{13} = \sqrt{2}^{13} \sqrt{\left( \cos \frac{13 \cdot 3\pi}{4} + i \sin \frac{13 \cdot 3\pi}{4} \right)}.$$

Учитывая, что  $\frac{39\pi}{4} = 10\pi - \frac{\pi}{4}$ , используя свойства тригонометрических функций и принимая во внимание правила действий со степенями, получаем:

$$(-1+i)^{13} = 2^6 \cdot \sqrt{2} \cdot \left( \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) = 64\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 64 - 64i.$$

**Определение.** Корнем заданной степени из комплексного числа называется комплексное число, которое, будучи возведено в заданную степень, дает подкоренное число:  $\sqrt[n]{z} = a \Leftrightarrow z = a^n$ .

Можно показать, что для извлечения корня из комплексного числа надо извлечь корень из его модуля, а аргумент разделить на показатель корня.

Пусть  $\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ , тогда

$$\rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \rho^n = r \Leftrightarrow \rho = \sqrt[n]{r}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1} \quad (1.11)$$

$$n\psi = \varphi + 2\pi k \Rightarrow \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Таким образом, для извлечения корня из комплексного числа надо извлечь корень из его модуля, а аргумент разделить на показатель корня.

**Пример.** Найти все значения  $\sqrt[5]{-1}$ .

**Решение.** Так как  $|-1| = 1$ ,  $\arg(-1) = \pi$ , то  $\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{\cos \pi + i \sin \pi} =$

$$= \cos \frac{\pi + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{5}, \quad \text{где } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

При  $k = 0$  имеем:  $(\sqrt[5]{-1})_1 = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \approx 0,8090 + i \cdot 0,5878;$

$$k = 1: (\sqrt[5]{-1})_2 = \cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \approx -0,3090 + i \cdot 0,9511;$$

$$k=2: (\sqrt[5]{-1})_3 = \cos \pi + i \sin \pi = -1;$$

$$k=3: (\sqrt[5]{-1})_4 = \cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5} = \cos \frac{2\pi}{5} - i \sin \frac{2\pi}{5} \approx -0,3090 - i \cdot 0,9511;$$

$$k=4: (\sqrt[5]{-1})_5 = \cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} = 0,8090 - i \cdot 0,5878.$$

Эти пять значений  $\sqrt[5]{-1}$  изображаются вершинами правильного пятиугольника, вписанного в окружность единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 1.7). Вообще, нетрудно убедиться, что  $n$  значений корня геометрически изображаются  $n$  точками, лежащими в вершинах правильного  $n$ -угольника с центром в начале координат.

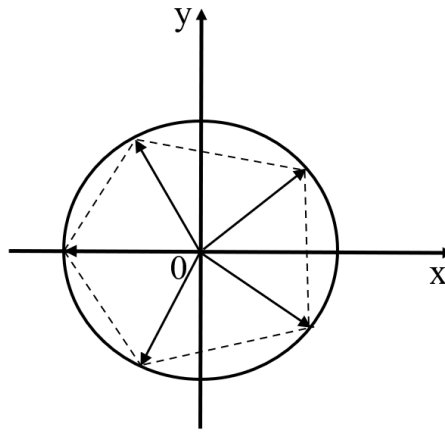


Рис. 1.7. Изображение корней  $\sqrt[5]{-1}$  на комплексной плоскости.

Запишем операции над комплексными числами в показательной форме.

Пусть  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ , тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (r_2 > 0),$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}, \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

**Пример.** Решить уравнение  $x^2 - 3x + 10 = 0$ .

**Решение.** Дискриминант данного уравнения:  $D = (-3)^2 - 4 \cdot 10 = -31$  меньше нуля, но теперь мы учитываем понятие мнимой единицы:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{-31}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{31} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{31}i}{2}, \text{ т.е. } x_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{31}}{2}i, \quad x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{31}}{2}i.$$

## 2 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

### ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

#### 2.1 Векторы на плоскости и в пространстве

Определение. *Вектором* называется направленный отрезок  $AB$  с начальной точкой  $A$  и конечной точкой  $B$ .

Обозначают вектор через  $\overrightarrow{AB}$  или  $\overline{AB}$ , либо одной буквой  $\vec{a}$  или  $\bar{a}$ . Геометрически вектор изображают в виде стрелки (рис. 2.1).

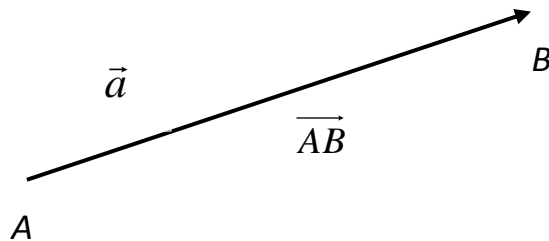


Рис.2.1 Изображение вектора

Определение. *Длиной* или *модулем*  $|\overrightarrow{AB}|$  вектора  $\overrightarrow{AB}$  называется неотрицательное число, равное длине отрезка, изображающего вектор.

Определение. Вектор  $\vec{0}$ , длина которого равна нулю (в силу этого он не имеет определенного направления) называется *нулевым* или *нуль-вектором*.

Определение. Вектор  $\vec{e}$ , длина которого равна единице ( $|\vec{e}|=1$ ), называется *единичным вектором*.

Определение. Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Определение. Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Определение. Два вектора считаются *равными*, если:

- 1) модули векторов равны,
- 2) векторы коллинеарны,
- 3) векторы одинаково направлены.

Из определения равенства векторов вытекает, что *векторы равны, если их можно совместить друг с другом параллельным переносом*. Такие векторы называют *свободными* и для них безразлично, где поместить начало вектора.

Определение. *Ортом* данного вектора называется вектор единичной длины, совпадающий по направлению с данным вектором.

Орт вектора  $\vec{a}$  можно записать в виде

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

## 2.2 Линейные операции над векторами

Определение. *Линейными операциями или действиями над векторами* называются действия сложения векторов и умножения вектора на число (скаляр).

Определение. *Произведением вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$*  называется вектор  $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ , имеющий длину  $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ , направление которого совпадает с направлением вектора  $\vec{a}$ , если  $\lambda > 0$ , и противоположно ему, если  $\lambda < 0$ .

Очевидно, что векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b} = \lambda\vec{a}$  коллинеарны.

Определение. *Суммой двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$*  называется вектор  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ , определяемый по правилу треугольника или параллелограмма (рис.2.2).

*Разностью двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$*  называется вектор  $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ .

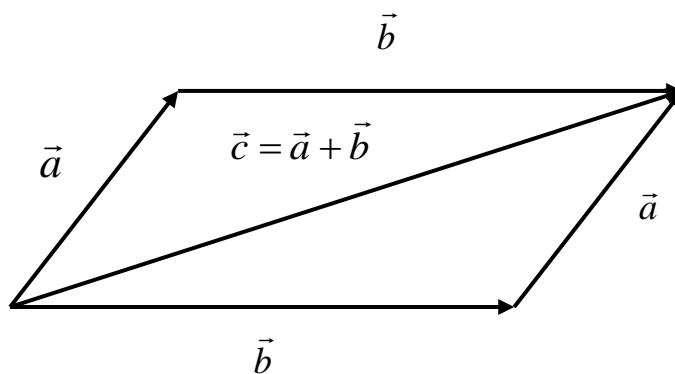


Рис. 2.2 Сложение двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

Линейные операции над векторами подчиняются следующим правилам:

для любых векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  и любых чисел  $\alpha, \beta$  выполняются условия:

- 1)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;
- 2)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ;
- 3)  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ ;
- 4) для любого вектора  $\vec{a}$  существует такой вектор  $-\vec{a}$ , называемый *противоположным*, что  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ;
- 5)  $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ ;
- 6)  $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ ;
- 7)  $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ ;
- 8)  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ .

### 2.3 Скалярное произведение векторов

Определение. Углом между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется угол между векторами, имеющими общее начало и равными векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (рис. 2.3).

Угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначается через  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

Полагают, что  $0 \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi$ . Направление отсчета угла в пространстве не указывается, угол рассматривается по абсолютной величине.

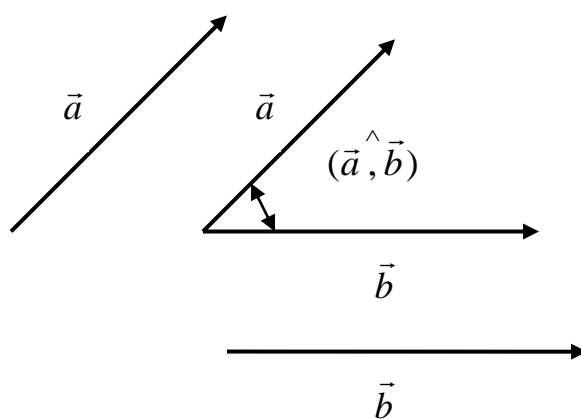


Рис.2.3 Угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

Определение . Скалярным произведением векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется число, равное произведению модулей векторов на косинус угла между векторами.

Обозначается скалярное произведение одним из следующих способов:

$$(\vec{a}, \vec{b}), \vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a}\vec{b}.$$

Согласно определению скалярного произведения

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

- 1)  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ ;
- 2) линейность скалярного произведения по каждому из сомножителей:  
для любых векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  и любых чисел  $\alpha, \beta$  справедливы равенства:

$$a) (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \vec{c}) = \alpha(\vec{a}, \vec{c}) + \beta(\vec{b}, \vec{c});$$

$$б) (\vec{a}, \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b}) + \beta(\vec{a}, \vec{c}).$$

Определение . Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Для векторов на плоскости и в пространстве понятие ортогональности векторов эквивалентно понятию перпендикулярности векторов.

Очевидно, что два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0.$$

Действительно, из определения скалярного произведения для векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  вытекает, что

- 1) если  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то угол  $(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = \pi/2$  и

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \pi/2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0;$$

2) если  $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ , но  $|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$ , то  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ ,

поэтому  $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/2$  и вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны.

Заметим, что нулевой вектор можно считать перпендикулярным (ортогональным) к любому вектору.

## 2.4 Линейная зависимость и независимость векторов

Определение. Линейной комбинацией векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  с коэффициентами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  называется выражение

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n.$$

Определение. Система ненулевых векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  называется линейно независимой, если из равенства  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$  следует  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ . В противном случае система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  называется линейно зависимой.

**Теорема 2.1.** Система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  линейно зависима тогда и только тогда, когда один из этих векторов может быть представлен как линейная комбинация остальных.

Геометрический смысл линейной зависимости векторов очевиден для случаев векторов на плоскости и в пространстве.

В случае двух линейно зависимых векторов  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$ , когда один вектор выражается через другой

$$\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2,$$

векторы  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  коллинеарны, или, что то же самое, находятся на параллельных прямых.

В пространственном случае для трех линейно зависимых векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ , когда один из них, например,  $\vec{a}_1$  выражается через два других

$$\vec{a}_1 = \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3,$$



векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  компланарны, или, что то же самое, лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Иными словами, справедливы следующие утверждения:

- 1) векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны;
- 2) векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Эти же утверждения могут быть сформулированы в эквивалентной форме:

- 1) векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  линейно независимы тогда и только тогда, когда они неколлинеарны;
- 2) векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  линейно независимы тогда и только тогда, когда они некомпланарны.

## 2.5 Векторы в координатной форме

Определение . *Базисом на плоскости* называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов этой плоскости.

*Базисом в пространстве* называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

Векторы базиса на плоскости будут обозначаться через  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ .

Векторы базиса в пространстве будут обозначаться через  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .

Базис векторов удобно записывать в виде матрицы-строки, элементами которой служат векторы базиса:

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  – базис на плоскости;  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  – базис в пространстве.

Определение . Для произвольного вектора  $\vec{a}$  на плоскости с базисом  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  справедливо представление

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2,$$

которое называется *разложением вектора  $\vec{a}$  по базису  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$* .

Числа  $x_1, x_2$  называются *координатами вектора  $\vec{a}$  в базисе  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$* .

Определение . Для произвольного вектора  $\vec{a}$  в пространстве с базисом  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  справедливо представление

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3,$$

которое называется *разложением вектора  $\vec{a}$  по базису  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$* .

Числа  $x_1, x_2, x_3$  называются *координатами вектора  $\vec{a}$  в базисе  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$* .

**Теорема 2.2.** Разложение любого вектора по базису, если оно существует, является единственным.

Таким образом, координаты любого вектора  $\vec{a}$  в данном базисе определяются однозначно. Поэтому вектор  $\vec{a}$  можно задать:

– на плоскости упорядоченной парой чисел – координат  $x_1, x_2$  в базисе  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ :

$$\vec{a} = \{x_1, x_2\} \text{ или } \vec{a} = (x_1, x_2);$$

– в пространстве упорядоченной тройкой чисел – координат  $x_1, x_2, x_3$  в базисе  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ :

$$\vec{a} = \{x_1, x_2, x_3\} \text{ или } \vec{a} = (x_1, x_2, x_3).$$

Из условия единственности разложения вектора по базису следует, что *два вектора равны между собой тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты равны*.

Часто в приложениях используют *ортонормированный базис*, в котором базисными векторами являются орты, перпендикулярные друг другу (рис. 2.8). Орты имеют специальные обозначения:

– на плоскости  $\vec{e}_1 = \vec{i}, \vec{e}_2 = \vec{j}$  и ортонормированный базис имеет вид  $(\vec{i}, \vec{j})$ , причем  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1; \vec{i} \perp \vec{j}$ ;

– в пространстве  $\vec{e}_1 = \vec{i}, \vec{e}_2 = \vec{j}, \vec{e}_3 = \vec{k}$  и ортонормированный базис имеет вид  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , причем  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1; \vec{i} \perp \vec{j}, \vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k}$ .

Координаты вектора  $\vec{a}$  в ортонормированном базисе также имеют специальные обозначения:

- на плоскости  $\vec{a} = \{x, y\}$  или  $\vec{a} = (x, y)$ ;
- в пространстве  $\vec{a} = \{x, y, z\}$  или  $\vec{a} = (x, y, z)$ .

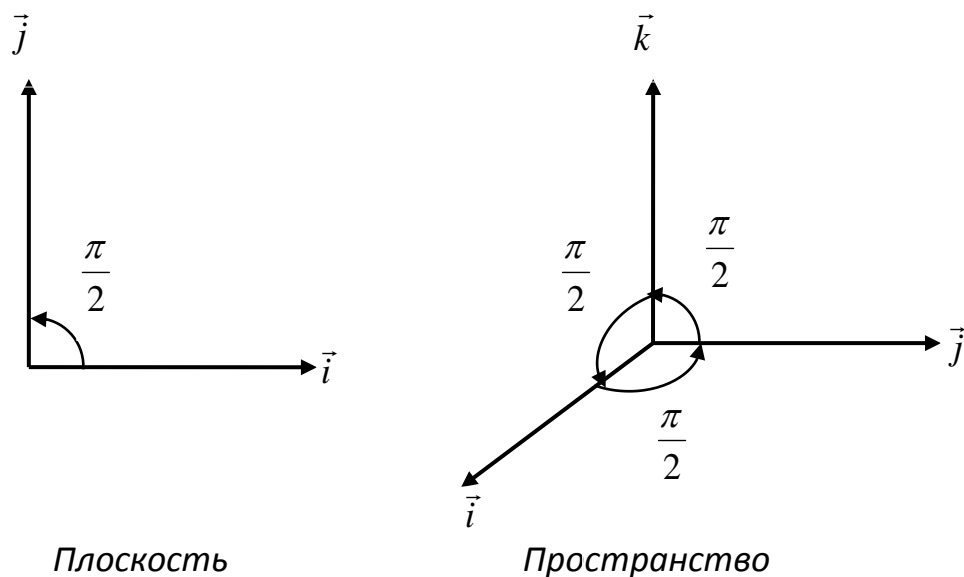


Рис.2.8 Ортонормированный базис на плоскости и в пространстве

## 2.6 Декартова система координат

**Определение.** *Декартовой системой координат* называется совокупность точки, называемой началом координат, обозначаемой обычно через  $O$ , и базиса.

Если  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  – базис на плоскости, а  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  – базис в пространстве, то декартовой системой координат на плоскости будет совокупность  $O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ; в пространстве –  $O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

С помощью заданной системы координат можно определить положение любой точки на плоскости или в пространстве.

**Определение.** Соединяя начало координат  $O$  с произвольной точкой  $M$ , получаем вектор  $\overrightarrow{OM}$ , который называется *радиусом-вектором* точки  $M$  (рис. 2.9).

Координаты вектора  $\overrightarrow{OM}$  в данном базисе называются *декартовыми координатами точки  $M$*  в данной декартовой системе координат.

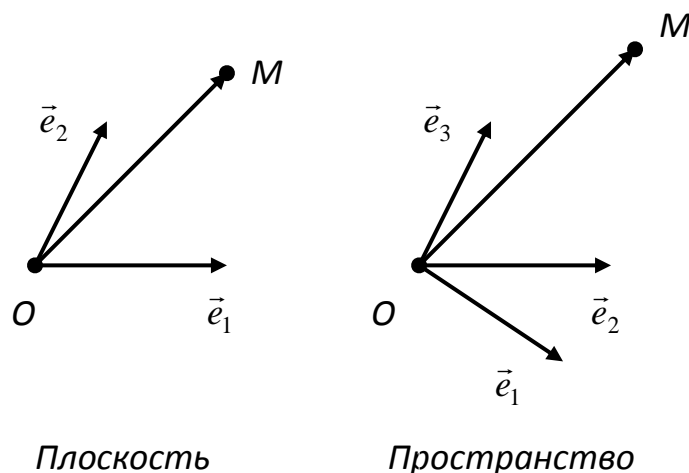


Рис.2.9 Декартова система координат на плоскости и в пространстве

Если на плоскости  $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ , то положение точки  $M$  однозначно определяется двумя координатами  $x_1, x_2$ , что записывается в виде  $M(x_1, x_2)$ .

Для пространства  $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ , положение точки  $M$  однозначно определяется тремя координатами  $x_1, x_2, x_3$ , что записывается в виде  $M(x_1, x_2, x_3)$ .

Определение. Прямые, проходящие через начало координат  $O$  в направлении базисных векторов, называется *осями координат*.

Оси координат, проходящие по направлениям векторов  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , называются соответственно *осями абсцисс, ординат и аппликат*.

Определение. Для ортонормированного базиса  $(\vec{i}, \vec{j})$  на плоскости и  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  в пространстве система координат называется *декартовой прямоугольной системой координат* (обычно предполагается, что орты  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  образуют правую тройку векторов).

Координаты точки  $M$  обозначаются  $M(x, y)$  для плоскости и  $M(x, y, z)$  для пространства (рис. 2.10).

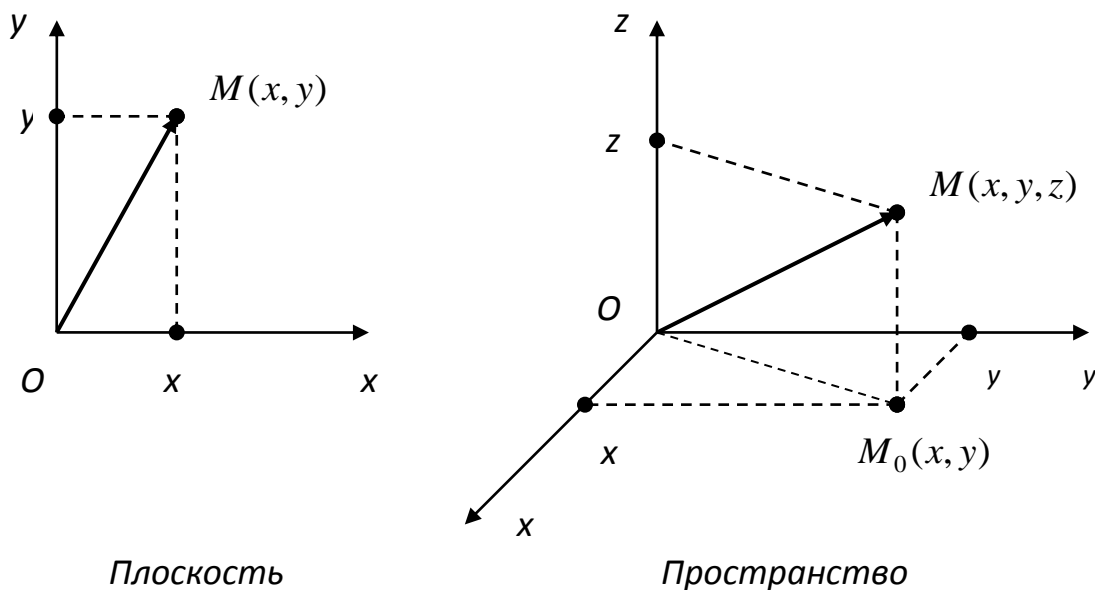


Рис. 2.10 Декартова прямоугольная система координат

Расстояние точки  $M$  от начала координат или, что то же самое, модуль вектора  $\overrightarrow{OM}$  легко находится по теореме Пифагора:

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ — на плоскости и } |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ — в пространстве.}$$

Ось абсцисс обозначается через  $Ox$ , ось ординат —  $Oy$ , ось аппликат —  $Oz$ .

*Координата  $x$  называется абсциссой, координата  $y$  — ординатой, координата  $z$  — аппликатой точки  $M$ .*

Три взаимно перпендикулярные плоскости  $Oxy$ ,  $Oxz$ ,  $Oyz$ , проходящие каждая через две соответствующие оси координат, называются *координатными плоскостями*; они делят все пространство на восемь *октантов*.

## 2.7 Линейные операции над векторами в координатной форме

Рассмотрим действия над векторами в пространстве.

Пусть разложения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  по базису  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  имеют вид

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3,$$

$$\vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3.$$

Тогда по правилам сложения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и умножения вектора на число  $\lambda$  получаем

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3) + (\beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3) = \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \vec{e}_3.\end{aligned}$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda(\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3) = (\lambda \alpha_1) \vec{e}_1 + (\lambda \alpha_2) \vec{e}_2 + (\lambda \alpha_3) \vec{e}_3.$$

Если записать векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  в виде

$$\vec{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$

$$\vec{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\},$$

то

$$\vec{a} + \vec{b} = \{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3\},$$

$$\lambda \vec{a} = \{\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \lambda \alpha_3\}.$$

Заметим, что *полученные правила имеют место и для векторов на плоскости*, только надо в полученных соотношениях формально положить третью координату равной нулю. Так, если записать векторы на плоскости в виде

$$\vec{a} = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad \vec{b} = \{\beta_1, \beta_2\},$$

то

$$\vec{a} + \vec{b} = \{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2\}, \quad \lambda \vec{a} = \{\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2\}.$$

В словесном выражении полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

*Координаты суммы векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых векторов.*

*Координаты произведения вектора на число равны произведениям координат вектора на то же число.*

**Пример.**

Найти вектор  $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ , если  $\vec{a} = \{2; -6; -1\}$ ,  $\vec{b} = \{0; -2; 5\}$ .

*Решение.*  $\vec{c} = 3 \cdot \{2; -6; -1\} - 4 \cdot \{0; -2; 5\} = \{6; -18; -3\} - \{0; -8; 20\} = \{6; -10; -23\}$ .

Получим условие коллинеарности векторов в координатной форме.

Два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны (параллельны) тогда и только тогда, если существует вещественное число  $\lambda$  такое, что

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}.$$

В координатной форме это условие выражается в пространстве тремя равенствами

$$\alpha_1 = \lambda \beta_1, \alpha_2 = \lambda \beta_2, \alpha_3 = \lambda \beta_3.$$

Так как  $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lambda, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \lambda, \frac{\alpha_3}{\beta_3} = \lambda$ , то условие коллинеарности, или параллельности, векторов в пространстве выражают в форме равенств

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3}.$$

Аналогично для векторов на плоскости имеем

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

В словесном выражении полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

*Векторы коллинеарны (параллельны) тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны.*

## 2.8 Скалярное произведение векторов в координатной форме

Рассмотрим векторы в пространстве.

Пусть разложения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  по ортонормированному базису  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  имеют вид

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}; \quad \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}.$$

Из определения скалярного произведения векторов для ортонормированного базиса имеем:

$$(\vec{i}, \vec{i}) = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos(\vec{i}, \vec{i}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1;$$

$$(\vec{j}, \vec{j}) = |\vec{j}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos(\vec{j}, \vec{j}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1;$$

$$(\vec{k}, \vec{k}) = |\vec{k}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos(\vec{k}, \vec{k}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1;$$

$$(\vec{i}, \vec{j}) = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0;$$

$$(\vec{i}, \vec{k}) = |\vec{i}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos(\vec{i}, \vec{k}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0;$$

$$(\vec{j}, \vec{k}) = |\vec{j}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Итак

$$(\vec{i}, \vec{i}) = (\vec{j}, \vec{j}) = (\vec{k}, \vec{k}) = 1; \quad (\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, \vec{k}) = (\vec{j}, \vec{k}) = 0.$$

Тогда на основании свойств скалярного произведения векторов, а также правил сложения векторов и умножения вектора на число получаем

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= ((x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}), (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k})) = \\ &= x_1 x_2 (\vec{i}, \vec{i}) + y_1 x_2 (\vec{j}, \vec{i}) + z_1 x_2 (\vec{k}, \vec{i}) + \\ &= x_1 y_2 (\vec{i}, \vec{j}) + y_1 y_2 (\vec{j}, \vec{j}) + z_1 y_2 (\vec{k}, \vec{j}) + \\ &= x_1 z_2 (\vec{i}, \vec{k}) + y_1 z_2 (\vec{j}, \vec{k}) + z_1 z_2 (\vec{k}, \vec{k}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \end{aligned}$$

Таким образом, для скалярного произведения векторов в координатной форме имеем:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Заметим, что *аналогичное выражение имеет место и для векторов на плоскости*, только надо в рассматриваемых соотношениях формально положить третью координату равной нулю. Так, если записать векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на плоскости в виде разложения по ортонормированному базису  $(\vec{i}, \vec{j})$

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}; \quad \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j},$$

то

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

В словесном выражении полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

*Скалярное произведение векторов в координатной форме равно сумме попарных произведений соответствующих координат.*



Условие ортогональности (перпендикулярности) векторов в координатной форме в пространстве *принимает* вид:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0,$$

а на плоскости:

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

**Пример.**

Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} = \{2; -3; -1\}$ ,  $\vec{b} = \{1; -2; 8\}$ .

*Решение.*  $(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) + (-1) \cdot 8 = 2 + 6 - 8 = 0$ .

В данном примере скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равно нулю, следовательно, эти векторы ортогональны (перпендикулярны).

Рассмотрим некоторые задачи, решаемые скалярным произведением.

#### 1. Нахождение угла между векторами.

Так как скалярное произведение  $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ , то

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Пусть разложения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  в пространстве по ортонормированному базису  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  имеют вид

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}; \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Тогда  $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$  и

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Если разложения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на плоскости по ортонормированному базису  $(\vec{i}, \vec{j})$  имеют вид

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}; \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j},$$

то  $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$  и  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

## 2.9 Прямая на плоскости

### 1. Общее уравнение прямой

Пусть задана декартова прямоугольная система координат на плоскости и линейное уравнение

$$Ax + By + C = 0 \quad (2.1)$$

в этой системе, причем  $A^2 + B^2 \neq 0$ , т.е. хотя бы одно из действительных чисел  $A$  и  $B$  не равно нулю.

Покажем, что уравнение (2.1) есть уравнение прямой.

Выберем точку  $M_0(x_0, y_0)$ , координаты которой удовлетворяют этому уравнению:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Вычтем из уравнения (2.1) почленно полученное равенство:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (2.2)$$

Левую часть этого уравнения можно рассматривать как скалярное произведение некоторого вектора  $\vec{N} = \{A, B\}$  на вектор  $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ , где координаты произвольной точки  $M(x, y)$  удовлетворяют уравнению (3.1.1). Тогда уравнение (2.2) можно представить в форме

$$(\vec{N}, \overrightarrow{M_0M}) = 0.$$

Вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  перпендикулярен вектору  $\vec{N}$  и, значит, все точки  $M(x, y)$  лежат на прямой, проходящей через точку  $M_0$  (рис. 2.11) перпендикулярно к вектору  $\vec{N}$ .

Обратно, для любой точки  $M(x, y)$ , лежащей на указанной прямой, вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  перпендикулярен вектору  $\vec{N}$ .

Следовательно, уравнение (2.1) есть уравнение прямой.

Определение. Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0$$

называется *общим уравнением прямой*.

Вектор  $\vec{N} = \{A, B\}$ , перпендикулярный к прямой (2.1), называется *нормальным вектором* этой прямой.

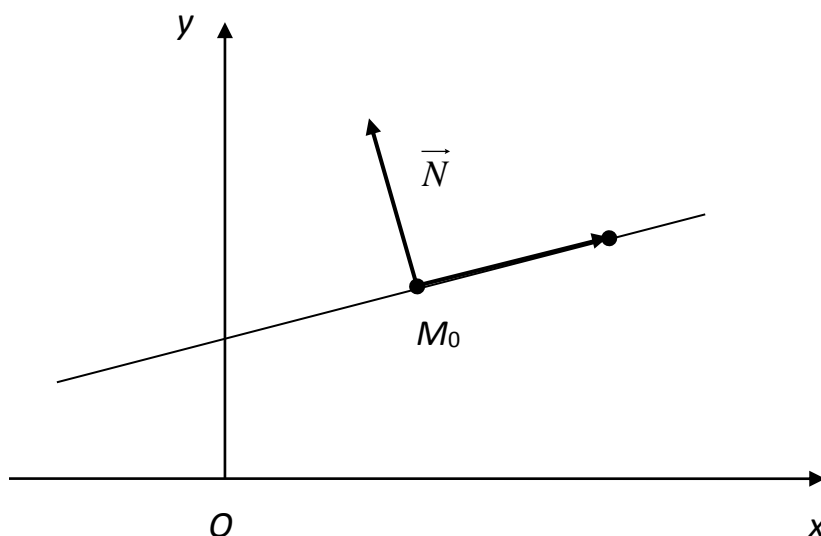


Рис. 2.11 Общее уравнение прямой

Отметим *частные случаи* положения прямой относительно системы координат.

1) Если в уравнении (2.1) свободный член  $C = 0$ , т.е.

$$Ax + By = 0,$$

то прямая проходит через начало координат, так как координаты точки  $O(0;0)$  удовлетворяют уравнению.

2) Если  $A = 0$ , то нормальный вектор  $\vec{N} = \{0, B\}$ ,  $B \neq 0$ , параллелен оси ординат, значит, сама прямая параллельна оси абсцисс и имеет уравнение

$$By + C = 0 \text{ или } y = -C/B.$$

3) Если  $B = 0$ , то нормальный вектор  $\vec{N} = \{A, 0\}$ ,  $A \neq 0$ , параллелен оси абсцисс, значит, сама прямая параллельна оси ординат и имеет уравнение

$$Ax + C = 0 \text{ или } x = -C/A.$$

4) Если в двух последних случаях  $C = 0$ , то прямые совпадают с осями координат:

$$y = 0 - \text{ ось абсцисс } \text{ и } x = 0 - \text{ ось ординат.}$$

Заметим, что уравнение (2.1) можно умножить на любое число, не равное нулю, и полученное уравнение будет уравнением той же самой прямой.

## 2. Параметрические уравнения прямой

Положение прямой на плоскости определяется следующими данными:

- 1) точкой  $M_0(x_0, y_0)$ , через которую проходит прямая, называемой *начальной точкой*;
- 2) вектором  $\vec{s} = \{m, n\}$ , параллельным прямой, называемым *направляющим вектором прямой*.

Составим сначала уравнение прямой в векторной форме.

Пусть даны *начальный вектор*  $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$  и *направляющий вектор* прямой  $\vec{s}$  (рис. 2.12).

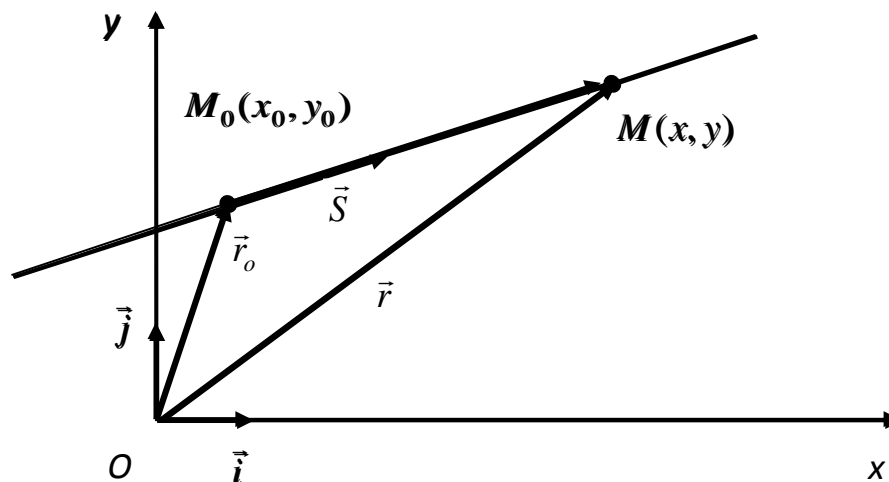


Рис. 2.12 Уравнение прямой на плоскости в векторной форме

Пусть  $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$  – радиус-вектор произвольной точки  $M(x, y)$  прямой.

Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}.$$

Так как  $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$ , то существует такое число  $t$ , что  $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$ .

Полагая  $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ ,  $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0$ ,  $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$ , получаем *уравнение прямой в параметрической векторной форме*:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s} \quad (2.3)$$

Когда параметр  $t$  пробегает все вещественные значения  $-\infty < t < +\infty$ , конец вектора  $\vec{r}$  пробегает все точки прямой.

Выразим векторы  $\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{s}$  в координатной форме:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}, \quad \vec{s} = \{m, n\} = m\vec{i} + n\vec{j}$$

и подставим в уравнение (2.3):

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + t(m\vec{i} + n\vec{j}) \quad \text{или} \quad x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0 + mt)\vec{i} + (y_0 + nt)\vec{j}.$$

Приравнивая координаты при ортах  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$ , получим *параметрические уравнения прямой* на плоскости

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases} \quad \text{где } -\infty < t < +\infty. \quad (2.4)$$

Определение. Координаты  $m$  и  $n$  направляющего вектора прямой  $\vec{s} = \{m, n\}$  называются направляющими коэффициентами прямой.

**Пример.**

Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(2;3)$  параллельно вектору  $\vec{s} = \{-5;4\}$ .

*Решение.*

Координаты начальной точки  $x_0 = 2, y_0 = 3$ , направляющие коэффициенты искомой прямой  $m = -5, n = 4$ . Параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = 2 - 5t, \\ y = 3 + 4t. \end{cases}$$

### 3. Каноническое уравнение прямой

Преобразуем параметрические уравнения прямой (2.4) к виду

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = t, \\ \frac{y - y_0}{n} = t, \end{cases}$$

откуда следует *каноническое уравнение прямой*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \quad (2.5)$$

проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$  и имеющей направляющий вектор  $\vec{s} = \{m, n\}$ .

Заметим, что уравнение (2.5) может быть получено и из условия коллинеарности векторов  $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$  и  $\vec{s} = \{m, n\}$ , согласно которому соответствующие координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

#### 4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть через две данные точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$  требуется провести прямую. Возьмем на этой прямой любую (текущую) точку  $M(x, y)$  и рассмотрим векторы  $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1\}$  и  $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$  (рис. 2.12). Эти векторы коллинеарны (лежат на одной прямой), поэтому их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (2.6)$$

Полученное уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через две данные точки*.

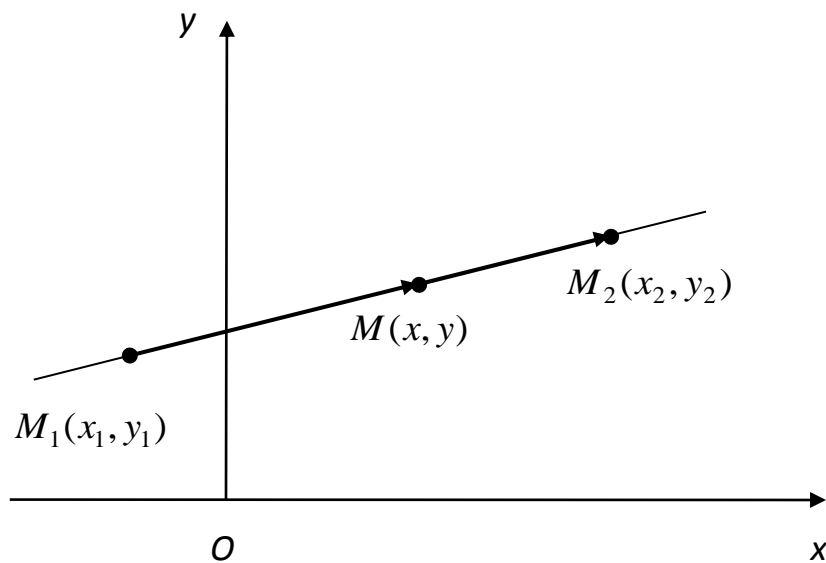


Рис. 2.13 Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две данные точки

Заметим, что данное уравнение можно рассматривать также и как каноническое уравнение прямой с начальной точкой  $M_1(x_1, y_1)$  и направляющим вектором прямой  $\vec{s} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ .

### 5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть дана начальная точка прямой  $M_0(x_0, y_0)$  и ее направляющий вектор  $\vec{s} = \{m, n\}$ . Запишем параметрические уравнения прямой (2.4) в виде

$$\begin{cases} x - x_0 = mt, \\ y - y_0 = nt. \end{cases}$$

Если  $m \neq 0$ , то разделив почленно второе уравнение на первое, получим

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{n}{m}.$$

Но  $\frac{n}{m} = \operatorname{tg} \varphi$ , где  $\varphi$  – угол, образованный прямой с положительным направлением оси абсцисс (рис. 2.15).

Число  $k = \operatorname{tg} \varphi$  называется *угловым коэффициентом прямой*.

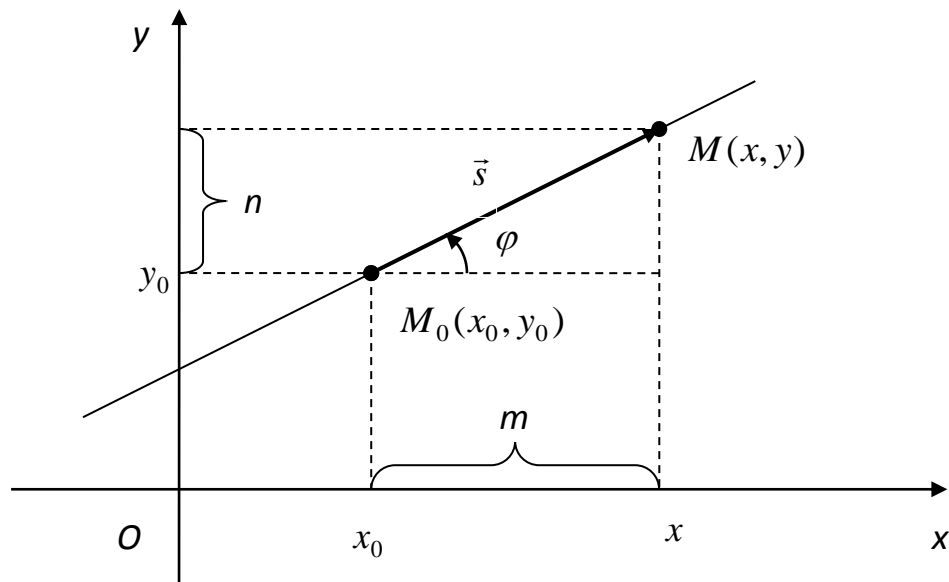


Рис. 2.15 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Заменив  $\frac{n}{m} = k$ , из последнего уравнения получим уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (2.7)$$

которое называется *уравнением прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом* или *уравнением пучка прямых с угловым коэффициентом*.

В последнем случае считается, что угловой коэффициент  $k$  принимает все возможные значения  $-\infty < k < +\infty$ , при этом все прямые пучка проходят через одну и ту же точку  $M_0(x_0, y_0)$ , называемую *центром пучка*.

Из уравнения (2.7) получаем  $y = kx + y_0 - kx_0$ . Положим  $y_0 - kx_0 = b$ , тогда  $y = kx + b$ .

Если  $x = 0$ , то  $y = b$ , где  $b$  – *величина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат*.

Уравнение прямой

$$y = kx + b, \quad (2.8)$$

где  $k$  – угловой коэффициент прямой, а  $b$  – *величина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат, называется уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Если же в параметрических уравнениях прямой (2.4)

$$\begin{cases} x - x_0 = mt, \\ y - y_0 = nt. \end{cases}$$

$m = 0$ , то направляющий вектор прямой  $\vec{s} = \{0, n\}$  и прямая параллельна оси ординат, а ее уравнение, как это следует из первого уравнения (2.4), принимает вид  $x - x_0 = 0$  или  $x = x_0$ .

## 6. Уравнение прямой в отрезках на осях

Пусть прямая не параллельна ни одной из координатных осей и не проходит через начало координат. Это значит, что в общем уравнении прямой  $Ax + By + C = 0$  ни один из коэффициентов  $A, B, C$  не равен нулю. Прямая пересекает оси координат в точках  $(a, 0), (0, b)$  (рис. 2.16).



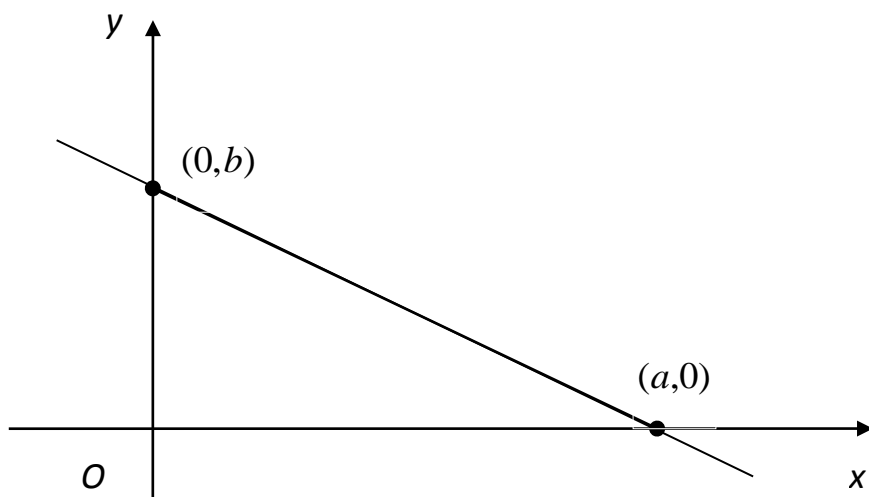


Рис. 2.16 Уравнение прямой в отрезках на осях

Выразим коэффициенты в уравнении прямой через величины отрезков на осях  $a$  и  $b$ . Подставим в общее уравнение прямой координаты точек  $(a,0)$ ,  $(0,b)$  и получим

$$A \cdot a + B \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow A = -\frac{C}{a};$$

$$A \cdot 0 + B \cdot b + C = 0 \Rightarrow B = -\frac{C}{b}.$$

Подставляя в общее уравнение прямой вместо  $A$  и  $B$  их значения, имеем

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0.$$

После переноса свободного члена  $C$  в правую часть уравнения и деления на  $-C$  получаем *уравнение прямой в отрезках на осях*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (2.9)$$

## 2.10 Угол между двумя прямыми на плоскости

1) Пусть заданы две прямые *общими уравнениями*

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

где  $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1\}$ ,  $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2\}$  – нормальные векторы прямых. Очевидно, угол  $\varphi$  между прямыми будет равен углу между их нормальными векторами, поэтому

$$\cos \varphi = \cos(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = \frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности прямых совпадает с условием перпендикулярности нормальных векторов этих прямых:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0,$$

а условием параллельности прямых является условие параллельности их нормальных векторов, что выражается пропорциональностью их соответствующих координат:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

2) Пусть две прямые заданы теперь *параметрическими или каноническими уравнениями* с направляющими векторами  $\vec{s}_1 = \{m_1, n_1\}$  и  $\vec{s}_2 = \{m_2, n_2\}$ .

Очевидно, угол  $\varphi$  между прямыми будет равен углу между их направляющими векторами, поэтому

$$\cos \varphi = \cos(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности прямых совпадает с условием перпендикулярности направляющих векторов этих прямых

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0,$$

а условием параллельности прямых является условие параллельности их направляющих векторов, что выражается пропорциональностью их соответствующих координат:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

3) Пусть теперь прямые заданы *уравнениями с угловыми коэффициентами*:

$$y = k_1x + b_1 \text{ и } y = k_2x + b_2,$$

где  $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$ ,  $k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$  (рис.2.17). Требуется вычислить  $\operatorname{tg} \varphi$ , где  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .

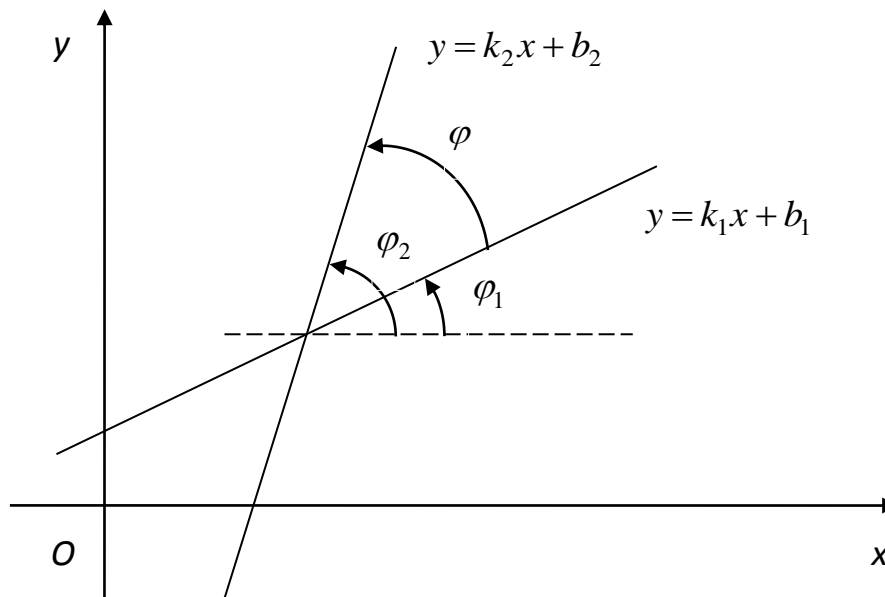


Рис. 2.17 Угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами

По формуле из тригонометрии имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Если прямые параллельны, то  $\operatorname{tg} \varphi = 0$ ,  $k_2 - k_1 = 0$ , и условие параллельности прямых выражается равенством их угловых коэффициентов:

$$k_1 = k_2.$$

Если прямые взаимно перпендикулярны, то  $\operatorname{ctg} \varphi = (1/\operatorname{tg} \varphi) = 0$ ;  $1 + k_1 k_2 = 0$ , и условие перпендикулярности прямых можно представить в виде:

$$k_1 k_2 = -1 \text{ или } k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

## 2.11 Плоскость в пространстве

### 1. Общее уравнение плоскости

Пусть задана декартова прямоугольная система координат в пространстве и линейное уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2.10)$$

в этой системе, причем  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ , т.е. хотя бы одно из действительных чисел  $A$ ,  $B$  и  $C$  не равно нулю.

Покажем, что уравнение (2.10) есть уравнение плоскости.

Выберем точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , координаты которой удовлетворяют этому уравнению:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Вычтем из уравнения (2.10) почленно полученное равенство:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2.11)$$

Левую часть этого уравнения можно рассматривать как скалярное произведение некоторого вектора  $\vec{N} = \{A, B, C\}$  на вектор  $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ , где координаты произвольной точки  $M(x, y, z)$  удовлетворяют уравнению (3.3.1). Тогда уравнение (3.3.2) можно представить в форме

$$(\vec{N}, \overrightarrow{M_0M}) = 0.$$

Вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  перпендикулярен вектору  $\vec{N}$  и, значит, все точки  $M(x, y, z)$  лежат на плоскости, проходящей через точку  $M_0$  (рис. 2.18) перпендикулярно к вектору  $\vec{N}$ .

Обратно, для любой точки  $M(x, y, z)$ , лежащей на указанной плоскости, вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  перпендикулярен вектору  $\vec{N}$ .

Следовательно, уравнение (2.10) есть уравнение плоскости.

Определение. Уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

называется *общим уравнением плоскости*.

Вектор  $\vec{N} = \{A, B, C\}$ , перпендикулярный к плоскости (2.10), называется *нормальным вектором* этой плоскости.

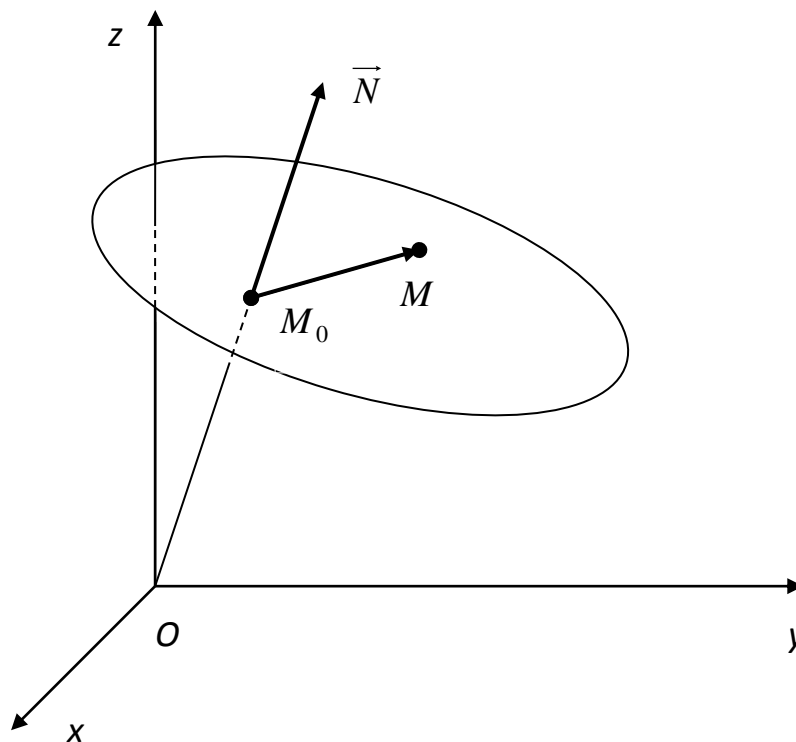


Рис. 2.18 Общее уравнение плоскости

Отметим частные случаи положения плоскости относительно системы координат:

1) если в уравнении (2.10) свободный член  $D = 0$ , т.е.

$$Ax + By + Cz = 0,$$

то плоскость проходит через начало координат, так как координаты точки  $O(0;0;0)$  удовлетворяют уравнению;

2) если две из координат нормального вектора  $\vec{N} = \{A, B, C\}$  равны нулю, то плоскость параллельна одной из координатных плоскостей. Например, для  $\vec{N} = \{A, 0, 0\}$  плоскость  $Ax + D = 0$  параллельна координатной плоскости  $yOz$ .

3) Если одна из координат нормального вектора равна нулю, то плоскость параллельна одной из координатных осей. Например, для  $\vec{N} = \{A, B, 0\}$  плоскость  $Ax + By + D = 0$  параллельна оси аппликат.

Заметим, что уравнение (2.10) можно умножить на любое число, не равное нулю, и полученное уравнение будет уравнением той же самой плоскости.

## 2. Уравнение плоскости в отрезках на осях

Пусть плоскость не параллельна ни одной из координатных осей и не проходит через начало координат. Это значит, что в общем уравнении плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  ни один из коэффициентов  $A, B, C, D$  не равен нулю. Плоскость пересекает оси координат в точках  $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$  (рис. 2.19).

Выразим коэффициенты в уравнении плоскости через величины отрезков на осях  $a, b, c$ . Подставим в общее уравнение плоскости координаты точек  $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$  и получим

$$A \cdot a + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow A = -\frac{D}{a};$$

$$A \cdot 0 + B \cdot b + C \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow B = -\frac{D}{b};$$

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot c + D = 0 \Rightarrow C = -\frac{D}{c}.$$

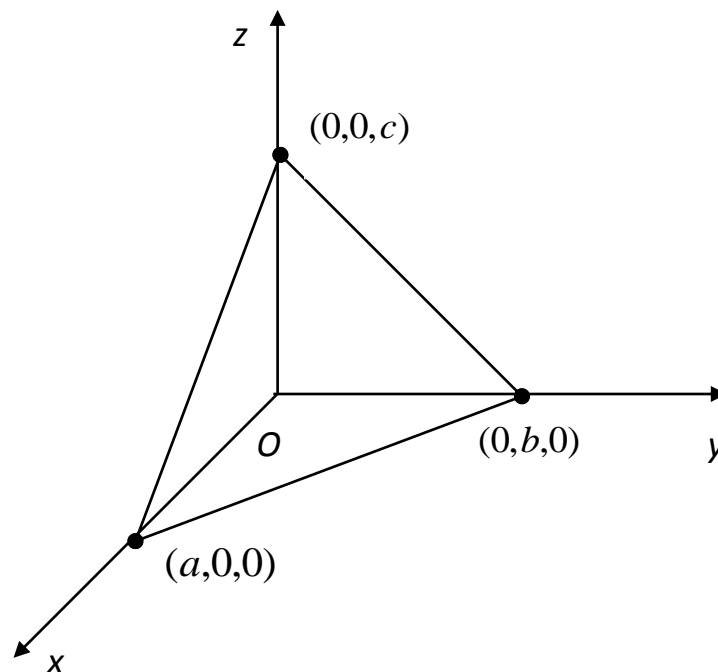


Рис. 2.19 Уравнение плоскости в отрезках на осях

Подставляя в общее уравнение плоскости вместо  $A, B, C$  их значения, имеем

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0.$$

После переноса свободного члена  $D$  в правую часть уравнения и деления на  $-D$  получаем *уравнение плоскости в отрезках на осях*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (2.12)$$

### 3. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Даны три точки  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ , не лежащие на одной прямой (рис. 2.20). Требуется найти уравнение плоскости, проходящей через эти точки.

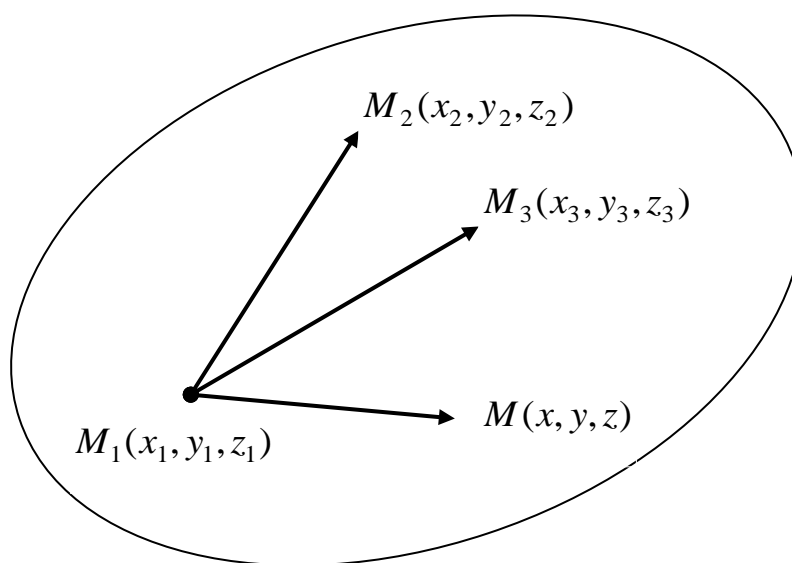


Рис.2.20 Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Пусть  $M(x, y, z)$  – произвольная точка плоскости. Чтобы точка  $M$  лежала в плоскости, проходящей через точки  $M_1, M_2, M_3$ , необходимо и достаточно, чтобы векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$  были *компланарны*.

Условие компланарности векторов выражается равенством нулю их смешанного произведения

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0.$$

Если выразить векторы в координатной форме:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M} &= \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}, \\ \overrightarrow{M_1M_2} &= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}, \\ \overrightarrow{M_1M_3} &= \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\},\end{aligned}$$

то смешанное произведение можно записать в виде определителя, и *уравнение плоскости, проходящей через три данные точки*, примет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.13)$$

Чтобы привести уравнение (2.13) к общему виду, достаточно вычислить коэффициенты  $A, B, C, D$ , разлагая определитель по элементам первой строки.

Заметим, что если бы точки  $M_1, M_2, M_3$  лежали на одной прямой, то вторая и третья строки в определителе уравнения (2.13) были бы пропорциональны и все коэффициенты уравнения плоскости были бы нулями.

## 2.12 Угол между двумя плоскостями

*Углом между двумя плоскостями* называется угол между векторами, нормальными к этим плоскостям (рис. 2.21).

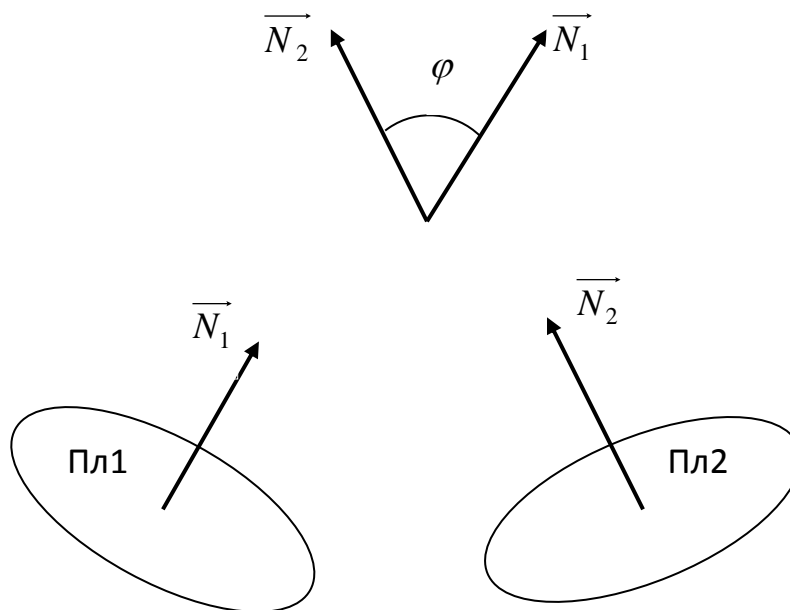


Рис.2.21 Угол между плоскостями



Пусть плоскости Пл1 и Пл2 заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Нормальные векторы к этим плоскостям соответственно равны

$$\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\} \text{ и } \vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}.$$

Тогда

$$\cos \varphi = \cos(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = \frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей совпадает с условием перпендикулярности нормальных векторов этих плоскостей:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0,$$

а условием параллельности плоскостей является условие параллельности их нормальных векторов, что выражается пропорциональностью их соответствующих координат:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

## 2.13 Прямая в пространстве

### 1. Параметрические уравнения прямой

Положение прямой в пространстве можно определить следующими данными:

- 1) точкой  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , через которую проходит прямая, называемой *начальной точкой*;
- 2) вектором  $\vec{s} = \{m, n, p\}$ , параллельным прямой, называемым *направляющим вектором прямой*.

Составим сначала уравнение прямой в векторной форме.

Пусть даны *начальный вектор*  $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$  и *направляющий вектор* прямой  $\vec{s}$  (рис. 2.22).

Пусть  $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$  – радиус-вектор произвольной точки  $M(x, y, z)$  прямой.

Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}.$$

Так как  $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$ , то существует такое число  $t$ , что  $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$ .

Полагая  $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ ,  $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0$ ,  $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$ , получаем уравнение прямой в параметрической векторной форме:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s} \quad (2.14)$$

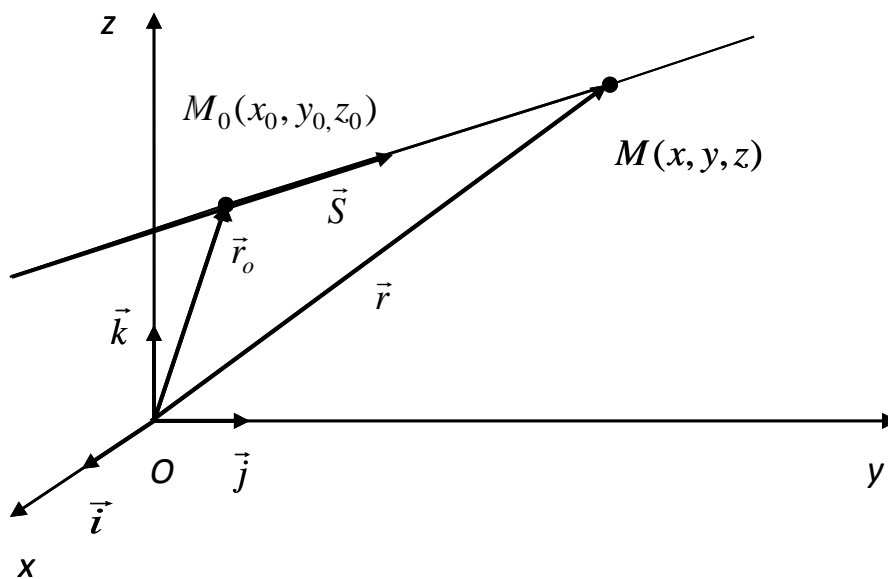


Рис. 2.22 Уравнение прямой в пространстве в векторной форме

Когда параметр  $t$  пробегает все вещественные значения  $-\infty < t < +\infty$ , конец вектора  $\vec{r}$  пробегает все точки прямой.

Выразим векторы  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}_0$ ,  $\vec{s}$  в координатной форме:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}, \quad \vec{s} = \{m, n, p\} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$$

и подставим в уравнение (3.5.1):

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + t(m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k})$$

или

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_0 + mt)\vec{i} + (y_0 + nt)\vec{j} + (z_0 + pt)\vec{k}.$$

Приравнивая координаты при ортах  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , получим *параметрические уравнения прямой* в пространстве

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad \text{где } -\infty < t < +\infty. \quad (2.15)$$

Определение. Координаты  $m, n, p$  направляющего вектора прямой  $\vec{s} = \{m, n, p\}$  называются направляющими коэффициентами прямой.

Пример.

Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(2;3;-1)$  параллельно вектору  $\vec{s} = \{-5;4;7\}$ .

Решение.

Координаты начальной точки  $x_0 = 2, y_0 = 3, z_0 = -1$ , направляющие коэффициенты искомой прямой  $m = -5, n = 4, p = 7$ . Параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = 2 - 5t, \\ y = 3 + 4t, \\ z = -1 + 7t. \end{cases}$$

## 2. Канонические уравнения прямой

Преобразуем параметрические уравнения прямой (2.15) к виду

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = t, \\ \frac{y - y_0}{n} = t, \\ \frac{z - z_0}{p} = t, \end{cases}$$

откуда следуют *канонические уравнения прямой*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad (2.16)$$

проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и имеющей направляющий вектор  $\vec{s} = \{m, n, p\}$ .

Заметим, что уравнение (3.5.3) может быть получено и из условия коллинеарности векторов  $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$  и  $\vec{s} = \{m, n, p\}$ , согласно которому соответствующие координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

### 3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть через две данные точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  требуется провести прямую. Возьмем на этой прямой произвольную точку  $M(x, y, z)$  и рассмотрим векторы  $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$  и  $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$  (рис. 2.23). Эти векторы коллинеарны (лежат на одной прямой), поэтому их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (2.17)$$

Полученное уравнение называется *уравнением прямой в пространстве, проходящей через две данные точки*.

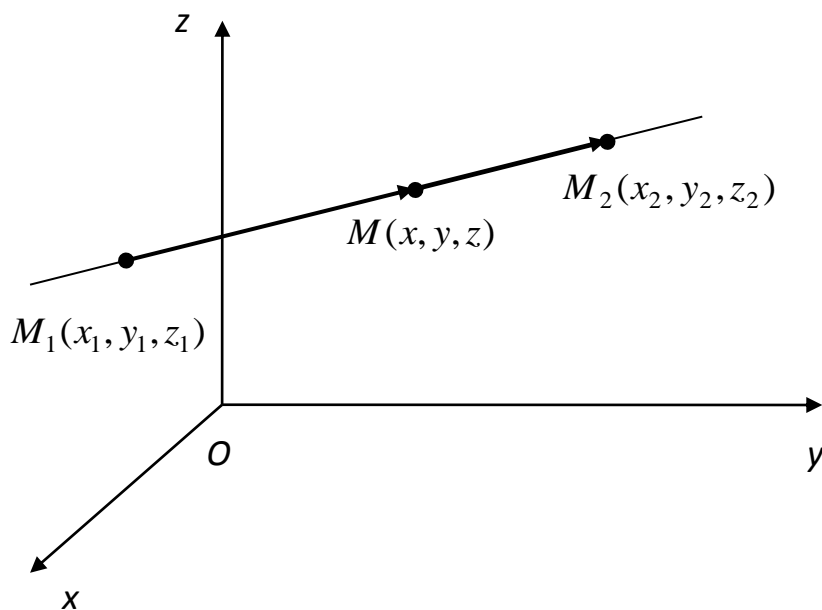


Рис. 2.23 Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две данные точки

Заметим, что данные уравнения можно рассматривать также и как канонические уравнения прямой с начальной точкой  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и направляющим вектором прямой  $\vec{s} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ .

## 2.14 Угол между двумя прямыми в пространстве

Пусть две прямые заданы в пространстве *параметрическими или каноническими уравнениями* с направляющими векторами  $\vec{s}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$  и  $\vec{s}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ .

Очевидно, угол  $\varphi$  между прямыми будет равен углу между их направляющими векторами, поэтому

$$\cos \varphi = \cos(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

*Условие перпендикулярности прямых* совпадает с условием перпендикулярности направляющих векторов этих прямых

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$$

а *условием параллельности прямых* является условие параллельности их направляющих векторов, что выражается пропорциональностью их соответствующих координат:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

## 2.15 Угол между прямой в пространстве и плоскостью

Если через данную прямую провести плоскость, перпендикулярную к данной плоскости, то пересечение плоскостей даст прямую, которая называется проекцией данной прямой на данную плоскость (рис. 3.13). Угол  $\varphi$  между прямой и ее проекцией на данную плоскость называется *углом между прямой и плоскостью*. Всегда можно считать  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ .

Если  $\vec{N}$  – нормальный вектор плоскости, а  $\vec{s}$  – направляющий вектор прямой (рис. 2.24), то

$$\sin \varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \left|\cos(\vec{s}, \vec{N})\right| \geq 0.$$

Модуль взят потому, что угол между векторами  $\vec{N}$  и  $\vec{s}$  может оказаться тупым.

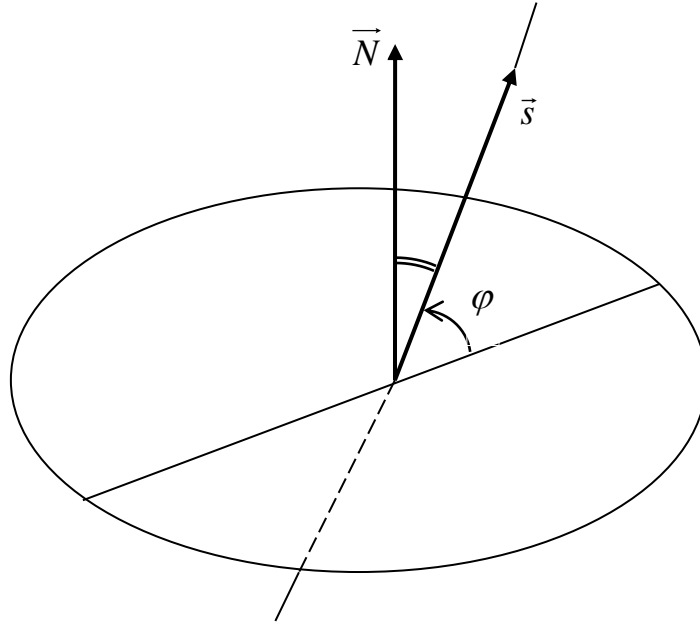


Рис. 2.24 Угол между прямой и плоскостью

Пусть заданы общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \vec{N} = \{A, B, C\}$$

и канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad \vec{s} = \{m, n, p\}.$$

Тогда

$$\sin \varphi = \left|\cos(\vec{s}, \vec{N})\right| = \frac{|\vec{N}, \vec{s}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{s}|}$$

или

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Если плоскость и прямая параллельны, то  $\sin \varphi = 0$ , и условие параллельности прямой и плоскости выражается равенством

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Если  $\vec{N} \perp \vec{s}$ , то прямая перпендикулярна к плоскости, и условия перпендикулярности прямой и плоскости выражаются равенствами

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

### 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

#### 3.1 Логические символы

В математике для сокращения записи некоторые часто используемые словесные выражения заменяют логическими символами.

*Символом*  $\forall$  заменяют выражение «для каждого» или «для любого», или «для всех». Запись  $\forall x : \text{ПР}$  означает, что «для всех  $x$  имеет место предложение ПР».

**Пример.** Запись

$$\forall x : x^2 + 3 > 0$$

можно прочитать так: «для всех  $x$  сумма  $x^2 + 3$  больше нуля».

*Символом*  $\exists$  заменяют выражение «существует» или «найдется». Запись  $\exists x : \text{ПР}$  означает, что «существует  $x$ , для которого имеет место предложение ПР».

**Пример.** Запись

$$\exists x : x^2 = 9$$

можно прочитать так: «существует  $x$ , квадрат которого равен девяти» (таких значений  $x$  в данном случае два: 3 и  $-3$ ).

*Символом*  $\Rightarrow$  заменяют выражение «следует» или «влечет за собой». Запись  $\text{ПР1} \Rightarrow \text{ПР2}$  означает, что «из предложения ПР1 следует предложение ПР2».

Пример. Запись

$$a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$$

можно прочесть так: «из неравенства  $a > b > 0$  следует неравенство  $a^2 > b^2$ ».

*Символом*  $\Leftrightarrow$  заменяют выражение «равносильно» или «эквивалентно», или «необходимо и достаточно», или «тогда и только тогда». Запись  $\text{ПР1} \Leftrightarrow \text{ПР2}$  означает, что «предложения ПР1 и ПР2 равносильны», т.е. из ПР1 следует ПР2 и обратно, из ПР2 следует ПР1.

Пример. Запись

$$a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$$

можно прочесть так: «неравенство  $a > b$  и неравенство  $a^3 > b^3$  равносильны», т.е. следуют друг из друга:

$$a > b \Rightarrow a^3 > b^3 \text{ и } a^3 > b^3 \Leftrightarrow a > b.$$

*Символом*  $:=$  заменяют выражение «равно по определению».

Пример. Запись

$$a^2 := a \cdot a$$

можно прочесть так: «квадрат величины  $a$  равен по определению произведению  $a \cdot a$ ».

*Символом*  $\wedge$  заменяют выражение «и». Запись  $\text{ПР1} \wedge \text{ПР2}$  означает, что предложения ПР1 и ПР2 справедливы одновременно.

Пример. Пусть ПР1 означает, что  $x > 3$ , а ПР2 – что  $x > 4$ :

$$\text{ПР1} := x > 3; \text{ ПР2} := x > 4.$$

Оба предложения ПР1 и ПР2 справедливы одновременно для  $x > 4$ :

$$\text{ПР1} \wedge \text{ПР2} = x > 3 \wedge x > 4 = x > 4.$$



Символом  $\vee$  заменяют выражение «или». Запись  $\text{ПР1} \vee \text{ПР2}$  означает, что справедливо хотя бы одно из предложений  $\text{ПР1}$ ,  $\text{ПР2}$  ( $\text{ПР1}$  или  $\text{ПР2}$  или оба предложения  $\text{ПР1}$  и  $\text{ПР2}$ ).

**Пример.** Пусть, как и в предыдущем примере:

$$\text{ПР1} := x > 3; \quad \text{ПР2} := x > 4.$$

Тогда, если выполняется хотя бы одно из предложений  $\text{ПР1}$ ,  $\text{ПР2}$ , то  $x > 3$ :

$$\text{ПР1} \vee \text{ПР2} = x > 3 \vee x > 4 = x > 3.$$

### 3.2 Пределы и непрерывность

**Определение.** *Бесконечной числовой последовательностью* называется бесконечный ряд чисел, каждому из которых присвоен определенный порядковый номер и которые расположены в порядке возрастания их номеров:

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots \quad \text{или} \quad \{y_n\}.$$

Числа  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$  называются *членами последовательности*, а натуральное число  $n$  – *номером члена последовательности*.

*Геометрически* последовательность изображается на числовой прямой в виде последовательности точек, координаты которых равны соответствующим членам последовательности.

*Задать последовательность* означает задать закон, при помощи которого можно определить значение любого члена последовательности, зная его порядковый номер.

Обычно последовательность задается с помощью формулы для ее  $n$ -го (общего) члена  $y_n$ .

**Пример**

$$\{y_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}.$$

Геометрическое изображение данной последовательности приведено на рис. 3.1.

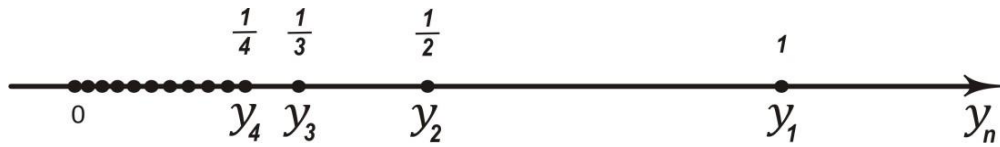


Рис. 3.1. Геометрическое изображение числовой последовательности  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

Последовательность можно задать и с помощью некоторого правила или закона, сформулированного словесно.

Введем понятие предела числовой последовательности.

Определение. Число  $A$  называется *пределом последовательности*  $\{y_n\}$ , если для любого произвольно малого положительного числа  $\varepsilon$  существует такой номер  $N(\varepsilon)$ , что для всех  $n > N$  выполняется неравенство  $|y_n - A| < \varepsilon$ .

С помощью логических символов это определение можно записать в виде

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon))(\forall n > N): |y_n - A| < \varepsilon.$$

Определение. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а последовательность, не имеющая предела, – *расходящейся*.

Если последовательность  $\{y_n\}$  сходится и имеет своим пределом число  $A$ , то символически это записывается так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \quad \text{или} \quad y_n \rightarrow A \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Так как неравенства

$$|y_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon$$

означают, что член  $y_n$  находится в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$

$$y_n \in U(A, \varepsilon),$$

то с геометрической точки зрения определение предела числовой последовательности можно сформулировать следующим образом.

Определение. Число  $A$  называется *пределом последовательности*  $\{y_n\}$ , если для любой произвольно малой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$  существует такой номер  $N(\varepsilon)$ , что все члены последовательности  $y_n$  с номерами  $n > N$  находятся в этой  $\varepsilon$ -окрестности.

Из определения следует, что любая  $\varepsilon$ -окрестность точки  $A$  содержит бесконечное число членов последовательности, а вне этой  $\varepsilon$ -окрестности может находиться лишь конечное число членов последовательности, а именно  $N(\varepsilon)$ .

С помощью логических символов это определение можно записать в виде

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon))(\forall n > N): y_n \in U(A, \varepsilon).$$

Пример. Используя определение предела последовательности, докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Возьмем любое число  $\varepsilon > 0$ . Так как  $A = 1$  и

$$|y_n - A| = |y_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1},$$

то для нахождения значений  $n$ , удовлетворяющих неравенству  $|y_n - A| < \varepsilon$ ,

достаточно решить неравенство  $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ , откуда получаем  $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ .

Следовательно, в качестве  $N$  можно взять целую часть числа  $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ , т.е.

$$N = \left[ \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right],$$

где скобками  $[ ]$  обозначена операция взятия целой части числа. Тогда неравенство  $|y_n - 1| < \varepsilon$  будет выполняться при всех  $n > N$ . Таким образом, доказано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Например, при  $\varepsilon = 0,3$  получим

$$N = \left[ \frac{1}{0,3} - 1 \right] = \left[ \frac{10}{3} - 1 \right] = \left[ \frac{7}{3} \right] = \left[ 2 \frac{1}{3} \right] = 2,$$

т.е. все члены последовательности, начиная с третьего ( $n > 2$ ), находятся в окрестности точки  $A=1$  радиусом  $\varepsilon = 0,3$  (рис. 3.2).

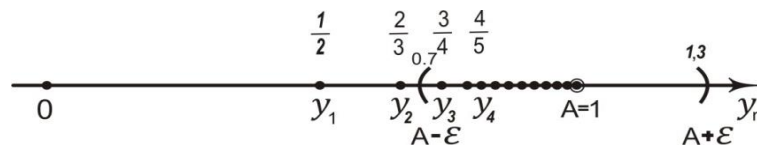


Рис. 3.2. Предел последовательности  $y_n = \frac{n}{n+1}$

### 3.3 Понятие функции и способы её задания

**Определение.** Переменная  $y$  называется *функцией* переменной  $x$ , если каждому значению переменной  $x$  из некоторой области ее изменения  $X \subset R$  по некоторому правилу или закону  $f$  ставится в соответствие одно определенное значение переменной  $y$  из некоторой области ее изменения  $Y \subset R$ .

Обозначения:  $y = f(x)$  или  $y = y(x)$ .

Используют следующие названия:

$x$  – независимая переменная или аргумент;

$y$  – зависимая переменная или функция;

$X$  – область определения функции;

$Y$  – область значений функции.

Говорят еще, что функция  $f$  *отображает* множество  $X$  на множество  $Y$ .

Задать функцию  $f$  – значит указать, как по каждому данному значению аргумента  $x$  находить соответствующее ему значение функции  $f(x)$ . Существуют пять основных способов задания функций: аналитический, табличный, графический, программный и словесный.

1) *Аналитический способ* – функция задается с помощью формул. При этом функция может быть задана явно, неявно и параметрически.

а) При *явном* задании функции зависимая переменная непосредственно выражается через независимую переменную.

### Примеры

1) Формула  $y = x^2$  задает функцию, область определения которой – числовая прямая:  $X = (-\infty, +\infty)$ , а область значений – полупрямая:  $Y = [0, +\infty)$ .

2) Формула  $y = n!$  ставит в соответствие каждому натуральному числу  $n$  число  $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . Например, если  $n = 3$ , то  $y = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ .

Область определения функции – множество всех натуральных чисел  $N$ , а область значений – множество  $\{1!, 2!, 3!, \dots, n!, \dots\}$ .

Функция  $y = n!$  называется *факториалом*, причем полагается  $0! = 1$ .

б) При *неявном* задании функции зависимая переменная не выражается непосредственно через независимую переменную.

### Примеры

$$1) \sin x + \cos y + e^{xy} + 5 = 0. \quad 2) xe^y - ye^x = 1.$$

в) При *параметрическом* задании функции и зависимая и независимая переменные являются, в свою очередь, некоторыми явно заданными функциями новой переменной, называемой параметром:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

где  $t$  – параметр, принимающий значения из некоторой области  $T \subset R$ .

### Пример. Уравнения

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

задают параметрически уравнение окружности радиусом  $R$  на плоскости  $Oxy$  с центром в начале координат, так как

$$x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t = R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2,$$

т.е.  $x^2 + y^2 = R^2$ .

2) *Табличный способ* – функция задается с помощью таблицы, в которой в определенном порядке выписываются значения аргумента и соответствующие им значения функции.

**Пример**

$x$	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1,0
$y$	5,4	7,4	8,1	8,6	7,3	6,6

3) *Графический способ* – функция задается с помощью графика в некоторой системе координат на плоскости (рис. 3.3).

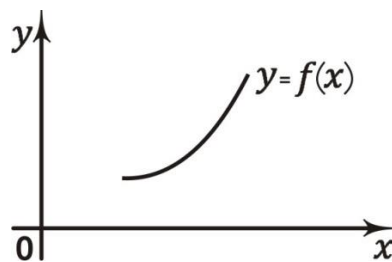


Рис. 3.3. Графическое задание функции  $y = f(x)$

4) *Программный способ* – функция задается с помощью операторов некоторого языка программирования.

**Пример.** Функция

$$y = ABS(EXP(2 * x - 1) + \sin(3 * x + \pi / 4))$$

при написании программы будет обеспечивать вычисление значений

$$y = \left| e^{2x-1} + \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \right|.$$

5) *Словесный способ* – функция задается словесным описанием.

**Пример.** Каждому действительному числу  $x$  ставится в соответствие наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ . Эта функция называется *целой частью*  $x$  и обозначается  $[x]$ .

### 3.4 Обратная функция

Пусть функция  $y = f(x)$  имеет область определения  $X$  и область значений  $Y$  (рис. 3.4), т.е. каждому значению переменной  $x \in X$  по закону  $f$  ставится в соответствие одно определенное значение переменной  $y \in Y$ .

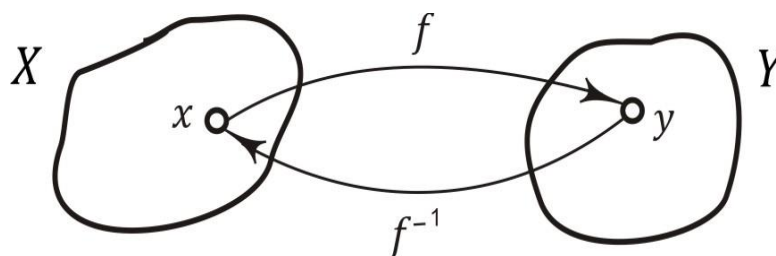


Рис. 3.4. Понятие обратной функции  $x = f^{-1}(y)$

Если же при этом каждому значению переменной  $y \in Y$  по закону  $g$  можно поставить в соответствие одно определенное значение переменной  $x \in X$ , то говорят, что задана *обратная функция*  $x = g(y)$  или  $x = f^{-1}(y)$ , имеющая область определения  $Y$  и область значений  $X$  (рис. 2.2). Таким образом, областью определения обратной функции становится область значений исходной функции, а областью значений обратной функции – область определения исходной функции.

Очевидно, что для функции  $x = f^{-1}(y)$  обратной является  $y = f(x)$ . Поэтому обе эти функции называются *взаимно обратными*.

Исходная функция  $y = f(x)$  и ее обратная функция  $x = f^{-1}(y)$  выражают одну и ту же связь между переменными  $x$  и  $y$ , поэтому одна и та же кривая служит графиком и для исходной функции и для обратной функции. Однако если для исходной функции ось  $Ox$  является осью независимой переменной, а

ось  $Oy$  – осью зависимой переменной, то для обратной функции, наоборот, ось  $Ox$  является осью зависимой переменной, а ось  $Oy$  – осью независимой переменной.

Если же вернуться к обычному обозначению независимой переменной через  $x$ , а зависимой переменной – через  $y$ , то обратную функцию можно записать в виде  $y = f^{-1}(x)$ . График обратной функции  $y = f^{-1}(x)$  симметричен графику исходной функции  $y = f(x)$  относительно биссектрисы I и III координатных углов (квадрантов) – прямой  $y = x$ .

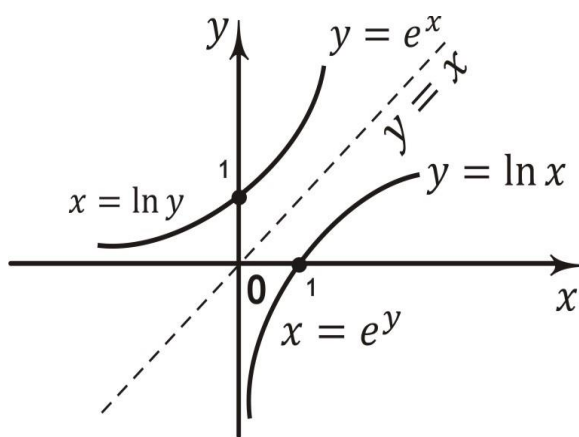


Рис. 3.5. Графики исходной функции  $y = e^x$  и обратной функции  $y = \ln x$

### Пример

Исходная функция:  $y = e^x$ ;  $X = (-\infty, +\infty)$ ;  $Y = (0, +\infty)$ .

Обратная функция:  $y = \ln x$ ;  $X = (0, +\infty)$ ;  $Y = (-\infty, +\infty)$ .

Графики исходной функции  $y = e^x$  и обратной функции  $y = \ln x$  приведены на рис. 3.5.

## 3.5 Сложная функция

**Определение.** Если в области  $X$  определена функция  $y = \varphi(x)$  с областью значений  $Y$ , а в области  $Y$  определена функция  $z = f(y)$ , то функция от функции  $z = f[\varphi(x)]$  называется сложной функцией от  $x$ , а переменная  $y$  – промежуточной переменной сложной функции (рис. 3.6).



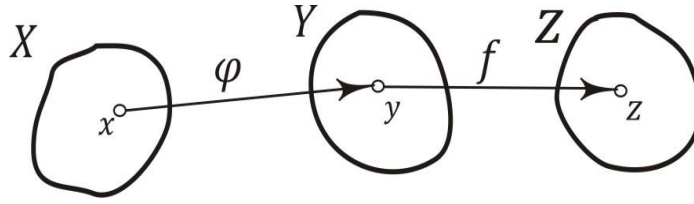


Рис. 3.6. Понятие сложной функции  $z = f[\varphi(x)]$

Пример. Функция  $z = e^{x^2}$  – сложная функция. Здесь:

$$y = \varphi(x) = x^2; \quad X = (-\infty, +\infty); \quad Y = [0, +\infty).$$

$$z = f(y) = e^y; \quad Y = [0, +\infty); \quad Z = [1, +\infty).$$

Таким образом, для сложной функции  $z = e^{x^2}$  область определения  $X = (-\infty, +\infty)$ , а область значений  $Z = [1, +\infty)$ .

Функция от функции может браться несколько раз.

Пример. В сложной функции  $y = e^{\cos(\sqrt[3]{\ln x})}$  функция от функции берется три раза.

### 3.6 Монотонность, ограниченность, четность и периодичность функций

Определение. Функция  $y = f(x)$  называется *возрастающей* в области  $X$ , если для любых  $x_1 \in X$  и  $x_2 \in X$ , таких, что  $x_2 > x_1$ , выполняется неравенство  $f(x_2) > f(x_1)$ , и *убывающей*, если выполняется неравенство  $f(x_2) < f(x_1)$ .

Функция  $y = f(x)$  называется *неубывающей* в области  $X$ , если для любых  $x_1 \in X$  и  $x_2 \in X$ , таких, что  $x_2 > x_1$ , выполняется неравенство  $f(x_2) \geq f(x_1)$ , и *невозрастающей*, если выполняется неравенство  $f(x_2) \leq f(x_1)$ .

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие функции объединяются общим названием – *монотонные функции*. Возрастающие и убывающие функции называются также *строго монотонными*.

### Примеры

1) Функция  $y = x^2$  монотонно убывает на промежутке  $(-\infty, 0)$  и монотонно возрастает на промежутке  $[0, +\infty)$  (рис. 3.7).

2) Функция  $y = x^3$  монотонно возрастает на всей числовой оси, т.е. на промежутке  $(-\infty, +\infty)$  (рис. 3.8).

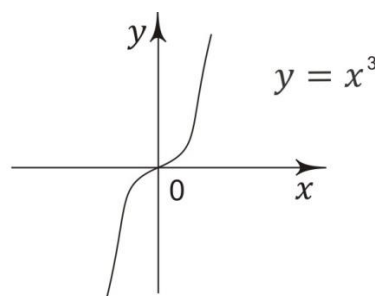
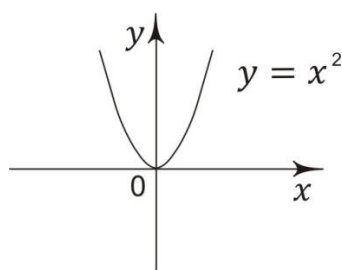


Рис. 3.7. График функции  $y = x^2$       Рис. 3.8. График функции  $y = x^3$

Определение. Функция  $y = f(x)$  называется *ограниченной сверху* (снизу) в области  $X$ , если существует такое число  $M$  ( $m$ ), что для любого  $x \in X$  выполняется неравенство  $f(x) \leq M$  ( $f(x) \geq m$ ).

Функция  $y = f(x)$ , ограниченная и сверху, и снизу в области  $X$ , называется *ограниченной* в этой области.

Условие ограниченности функции можно сформулировать и так: функция  $y = f(x)$  называется *ограниченной* в области  $X$ , если существует такое положительное число  $M$ , что для любого  $x \in X$  выполняется неравенство  $|f(x)| \leq M$ .

С помощью логических символов условие ограниченности функции  $y = f(x)$  можно записать в виде

$$(\exists M > 0)(\forall x \in X): |f(x)| \leq M,$$

а условие неограниченности – в виде

$$(\exists M > 0)(\exists x \in X): |f(x)| > M.$$

### Примеры

1) Функция  $y = \cos x$  ограничена на всей числовой прямой, так как  $|\cos x| \leq 1$  при любом  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

2) Функция  $y = 1/x$  не является ограниченной сверху на интервале  $(0,1)$ , так как не существует числа  $M$  такого, что для любого  $x \in (0,1)$  выполнялось бы неравенство  $(1/x) \leq M$ .

Определение. Функция  $y = f(x)$  называется *четной* в области  $X$ , если для любого  $x \in X$  выполняется равенство  $f(-x) = f(x)$ .

График четной функции симметричен относительно оси  $Oy$ .

Пример. Функция  $y = x^2$  является четной на всей числовой оси, так как

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \text{ для } \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

График функции  $y = x^2$  симметричен относительно оси  $Oy$  (см. рис. 5.5).

Определение. Функция  $y = f(x)$  называется *нечетной* в области  $X$ , если для любого  $x \in X$  выполняется равенство  $f(-x) = -f(x)$ .

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример.

Функция  $y = x^3$  является нечетной на всей числовой оси, так как

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \text{ для } \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

График функции  $y = x^3$  симметричен относительно начала координат (см. рис. 5.6).

Определение. Функция  $y = f(x)$  называется *периодической* в области  $X$ , если существует такое постоянное число  $T > 0$ , что для любого  $x \in X$  выполняется равенство  $f(x+T) = f(x)$ .

Минимальное из всевозможных чисел  $T$  называется *периодом* функции  $y = f(x)$ .

**Пример.** Из тригонометрии известно, что функции  $y = \sin x$  и  $y = \cos x$  являются периодическими функциями с периодом  $T = 2\pi$ , а функции  $y = \operatorname{tg} x$  и  $y = \operatorname{ctg} x$  – периодическими с периодом  $T = \pi$  в области  $X = (-\infty, +\infty)$ .

### 3.7 Элементарные функции

**Определение.** *Основными элементарными функциями* называются следующие функции:

- 1) Постоянная (константа)  $y = C$ , где  $C$  – действительное число.
- 2) Степенная функция  $y = x^\alpha$ , где  $\alpha$  – действительное число.
- 3) Показательная функция  $y = a^x$  ( $a > 0; a \neq 1$ ).
- 4) Логарифмическая функция  $y = \log_a x$  ( $a > 0; a \neq 1$ ).
- 5) Тригонометрические функции:  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ .
- 6) Обратные тригонометрические функции:  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  
 $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y = \operatorname{arcctg} x$ .

**Определение.** *Элементарными функциями* называются функции, получаемые из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции.

#### Примеры

$$1) y = \ln(1 + \cos^4 x). \quad 2) y = 3^{2x} + \operatorname{tg}\left(\frac{x-2}{x+2}\right). \quad 3) y = \frac{e^x - 2x}{x^2 + x + 6}.$$

Рассмотрим некоторые важные частные случаи элементарных функций.

**Определение.** *Целой рациональной функцией* или *многочленом* называется функция вида

$$y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

где  $n$  – натуральное число, называемое *степенью многочлена*;  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  – действительные числа, называемые *коэффициентами многочлена*.

Постоянную функцию  $C$  можно рассматривать как многочлен нулевой степени  $y = P_0(x) = a_0x^0 = a_0 = C$ .

Многочлен первой степени  $y = P_1(x) = a_0x + a_1$  называют *линейной функцией*.

Многочлен второй степени  $y = P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$  принято называть *квадратным трехчленом*.

**Примеры многочленов:**

$$1) y = P_2(x) = 3x^2 - 7x + 1. \quad 2) y = P_3(x) = x^3 - 5x^2 + 7. \quad 3) y = P_{10}(x) = 4x^{10}.$$

**Определение.** *Дробно-рациональной функцией* или *рациональной дробью* называется отношение двух многочленов

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}.$$

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе ( $n < m$ ); в противном случае ( $n \geq m$ ) рациональная дробь называется *неправильной*.

Дробно-рациональная функция  $R(x)$  определена для всех значений  $x$ , за исключением тех, при которых знаменатель  $Q_m(x)$  обращается в нуль.

**Примеры рациональных дробей:**

1) Правильная рациональная дробь

$$R(x) = \frac{5x^2 + x - 7}{8x^4 - 3x^2 + 2x}; \quad (n = 2; m = 4; n < m).$$

2) Неправильная рациональная дробь

$$R(x) = \frac{x^3 + 5x - 1}{x + 2}; \quad (n = 3; m = 1; n > m).$$

Целая рациональная функция является частным случаем дробно-рациональной функции, когда знаменатель последней – постоянная величина.

Совокупность целых рациональных и дробно-рациональных функций образует класс *рациональных функций*.

Определение. *Иррациональной функцией* называется функция, получаемая из рациональных функций и из степенных функций с рациональными нецелыми показателями с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции.

Примеры иррациональных функций:

$$1) y = \sqrt[3]{x+1}. \quad 2) y = \sqrt[5]{\frac{2x+5}{x+\sqrt{x}}}. \quad 3) y = \sqrt{x^3} + x - 2.$$

### 3.8 Предел функции

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой области  $X$  и  $x_0 \in X$ .

Рассмотрим понятие *предела функции в точке*.

Определение. Число  $A$  называется *пределом функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если для любого произвольно малого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое зависящее от него положительное число  $\delta$ , что для всех  $x \in X$ , отличных от  $x_0$  и удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Тот факт, что число  $A$  есть предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , принято записывать следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow A \quad \text{где} \quad x \rightarrow x_0.$$

Данное определение называют определением «на языке  $\varepsilon - \delta$ ».

Символическая запись определения предела функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  имеет вид:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Отметим, что условия  $x \neq x_0, |x - x_0| < \delta$  можно записать в виде  $0 < |x - x_0| < \delta$ . Так как

$$\forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow \forall x \in \dot{U}(x_0, \delta) \subset X \text{ и } |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow y \in U(A, \varepsilon),$$

то символическая запись определения предела примет вид

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \dot{U}(x_0, \delta) \subset X): y \in U(A, \varepsilon).$$

*Геометрический смысл предела функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$*  заключается в следующем: для любого произвольно малого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое зависящее от него положительное число  $\delta$ , что для всех  $x$  из проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$  график функции  $f(x)$  лежит в полосе шириной  $2\varepsilon$ , ограниченной прямыми  $y = A - \varepsilon$  и  $y = A + \varepsilon$  (рис. 5.8).

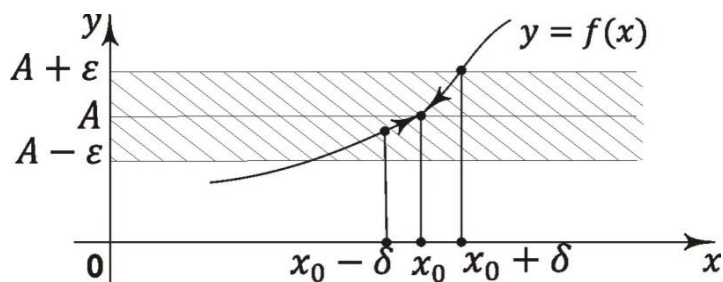


Рис. 3.9. Геометрический смысл предела функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$

Иными словами, значения функции  $y$  будут заключены в произвольной  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$  при условии, что значения аргумента  $x$  взяты в проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$ .

Заметим, что на рис. 3.9 показано, очевидно, наибольшее из всевозможных чисел  $\delta$ , найденное по заданному числу  $\varepsilon$ . Ясно и то, что в

данном случае при увеличении или уменьшении числа  $\varepsilon$  число  $\delta$  также соответственно увеличивается или уменьшается, т.е., вообще говоря,  $\delta = \delta(\varepsilon)$ .

*Замечание.* Для существования предела функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  не требуется, чтобы функция была определена в точке  $x = x_0$ .

### Примеры

1) Докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5.$$

Зададим произвольное положительное число  $\varepsilon$ . Для того чтобы при  $A = 5$  выполнялось неравенство

$$|(2x + 3) - 5| < \varepsilon,$$

необходимо выполнение неравенства

$$|2x - 2| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если положить  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ , то при любом  $\varepsilon$  для всех значений  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - 1| < \delta$ , будет выполняться неравенство  $|(2x + 3) - 5| < \varepsilon$ . А это и означает, что число 5 есть предел функции  $f(x) = 2x + 3$  при  $x \rightarrow 1$ .

2) Докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$

Зададим произвольное положительное число  $\varepsilon$ . Для того чтобы при  $A = x_0$  выполнялось неравенство

$$|x - x_0| < \varepsilon,$$

необходимо выполнение неравенства

$$|x - x_0| < \delta,$$



что всегда возможно, если выбрать  $\delta = \varepsilon$ . А это и означает, что  $x_0$  есть предел функции  $f(x) = x$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Кроме рассмотренного понятия предела функции в точке  $x_0$  (при  $x \rightarrow x_0$ ), существует также понятие *предела функции при стремлении аргумента к бесконечности*.

Определение. Число  $A$  называется *пределом функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ), если для любого произвольно малого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое зависящее от него положительное (отрицательное) число  $M$ , что для всех  $x \in X$  и  $x > M > 0$  ( $x < M < 0$ ) выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Тот факт, что число  $A$  есть *предел функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , принято записывать следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow +\infty \quad \text{или} \quad f(+\infty) = A.$$

Если же число  $A$  есть *предел функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$ , то пишут так:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow -\infty \quad \text{или} \quad f(-\infty) = A.$$

Данное определение, как и предыдущее, сформулировано «на языке  $\varepsilon - \delta$ ».

Символическая запись определения *предела функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  имеет вид:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X, x > M > 0): |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Символическая запись определения *предела функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$  имеет вид:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M(\varepsilon) < 0)(\forall x \in X, x < M < 0): |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Геометрический смысл предела функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  заключается в следующем: для любого произвольно малого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое зависящее от него положительное число  $M$ , что для всех  $x$ , больших  $M$ , график функции  $f(x)$  лежит в полосе шириной  $2\varepsilon$ , ограниченной прямыми  $y = A - \varepsilon$  и  $y = A + \varepsilon$  (рис. 3.10).

Иными словами, значения функции  $y$  будут заключены в произвольной  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$  при условии, что значения аргумента  $x$  взяты из интервала  $(M, +\infty)$ .

Геометрический смысл предела функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$  заключается в следующем: для любого произвольно малого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое зависящее от него отрицательное число  $M$ , что для всех  $x$ , меньших  $M$ , график функции  $f(x)$  лежит в полосе шириной  $2\varepsilon$ , ограниченной прямыми  $y = A - \varepsilon$  и  $y = A + \varepsilon$  (рис. 3.11).

Иными словами, значения функции  $y$  будут заключены в произвольной  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$  при условии, что значения аргумента  $x$  взяты из интервала  $(-\infty, M)$ .

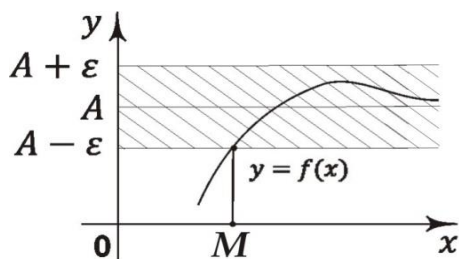


Рис. 3.10. Геометрический смысл предела функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$

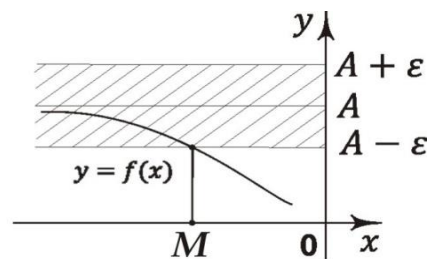


Рис. 3.11. Геометрический смысл предела функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$

## Примеры

1) Докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Зададим произвольное положительное число  $\varepsilon$ . Для того чтобы при  $A = 0$  выполнялось неравенство

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon,$$

необходимо выполнение неравенства

$$\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon},$$

которое можно записать в виде

$$x > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Если положить  $M = \frac{1}{\varepsilon}$ , то при любом  $\varepsilon$  для всех значений  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $x > M$  и  $x < -M$ , будет выполняться неравенство  $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$ . А это и означает, что число 0 есть предел функции

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{как при } x \rightarrow +\infty, \text{ так и при } x \rightarrow -\infty.$$

2) Докажем, что *предел постоянной равен самой постоянной*:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C = C,$$

где  $C$  – некоторая постоянная величина.

Зададим произвольное положительное число  $\varepsilon$ . При  $f(x) = C$  и  $A = C$  неравенство

$$|f(x) - A| = |C - C| = 0 < \varepsilon,$$

выполняется для всех значений  $x \in (-\infty, +\infty)$ , в том числе и для  $x > M$ , где  $M$  – любое положительное число.

А это и означает, что число  $C$  есть предел функции  $f(x) = C$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

### 3.9 Основные теоремы о пределах функций (свойства пределов функций)

Сформулируем основные теоремы о пределах функций. Для определенности рассмотрение проведем для случая  $x \rightarrow +\infty$ . Для остальных случаев всё аналогично.

**Теорема 3.1.** Предел алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

*Замечание.* Теорема легко распространяется на случай любого конечного числа слагаемых.

**Теорема 3.2.** Предел произведения функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

*Замечание.* Теорема легко распространяется на случай любого конечного числа сомножителей.

*Следствие.* Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (Cf(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} C \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = C \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$$

так как выше установлено, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} C = C$ .

**Теорема 3.3.** Предел частного функций равен частному пределов этих функций, если предел знаменателя отличен от нуля:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \neq 0.$$

### 3.10 Непрерывность функции в точке

Введем понятия *приращения аргумента* и *приращения функции* для функции  $y = f(x)$  (рис. 3.12).

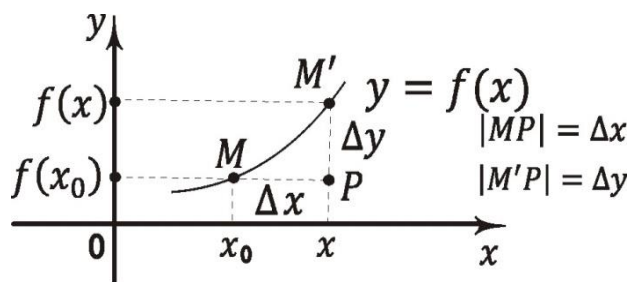


Рис. 3.12. Приращение аргумента и приращение функции  $y = f(x)$

Определение. Разность  $x - x_0$  (независимо от ее знака) называется *приращением аргумента* в точке  $x_0$  и обозначается

$$\Delta x = x - x_0.$$

Разность  $f(x) - f(x_0)$  соответствующих значений функции  $y$  называется *приращением функции* и обозначается  $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .

Приведем три эквивалентных определения непрерывности функции в точке.

Определения. Функция  $y = f(x)$ , определенная в точке  $x_0$  и некоторой ее окрестности, называется *непрерывной в точке  $x_0$* , если:

1) предел функции при  $x \rightarrow x_0$  существует и равен значению функции в точке  $x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0);$$

2) для любого произвольно малого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое зависящее от него положительное число  $\delta$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in U(x_0), |x - x_0| < \delta): |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon;$$

3) бесконечно малому приращению аргумента в точке  $x_0$  соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad \text{или} \quad \Delta y \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Геометрический смысл непрерывности функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  (рис. 3.13).

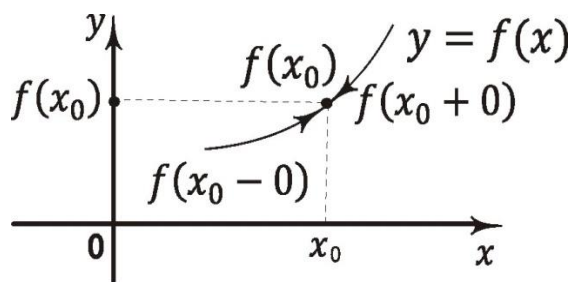


Рис. 3.13. Геометрический смысл непрерывности функции  $f(x)$  в точке  $x_0$

Из определения непрерывности функции в точке следует *свойство*:

для непрерывных функций знаки функции и предела можно менять местами:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} (x)\right),$$

так как ранее было показано, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

Данное свойство широко используется на практике для нахождения пределов непрерывных функций.

**Пример.** Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^4 + 1}.$$

Под знаком предела стоит функция  $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x^4 + 1}$ , которая определена и непрерывна для  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ , в том числе и в точке  $x_0 = 2$ . Поэтому, меняя знаки предела и функции, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^4 + 1} = \left( \frac{x^2 + 3x - 1}{x^4 + 1} \right) \Big|_{x=2} = \frac{2^2 + 3 \cdot 2 - 1}{2^4 + 1} = \frac{9}{17}.$$

### 3.11 Производная функции

Пусть функция  $y = f(x)$  определена и непрерывна для  $\forall x \in X$ .

Определение. Производной функции  $f(x)$  в точке  $x$  называется предел, если он существует, отношения приращения функции  $\Delta y$  в этой точке к приращению аргумента  $\Delta x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Производная функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  обозначается символами:

$$f'(x), f'_x, f', y'(x), y'_x, \frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx}.$$

Итак, по определению

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если для некоторого значения  $x$  выполняется условие

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty \text{ или } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty,$$

то говорят, что в точке  $x$  функция имеет *бесконечную производную*.

**Теорема 3.4.** Функция  $y = f(x)$ , имеющая производную в точке  $x$ , непрерывна в этой точке.

*Замечание.* Обратное утверждение неверно. Функция может быть непрерывной в точке, но не иметь производной в этой точке.

**Пример.** Функция  $y = |x|$  непрерывна в точке  $x = 0$  по третьему определению непрерывности функции:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-\Delta x) = 0 \text{ для } \Delta x < 0,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x) = 0 \text{ для } \Delta x \geq 0,$$

но не имеет в точке  $x = 0$  производной.

Если функция  $f(x)$  имеет конечную производную  $\forall x \in X$ , то производную  $f'(x)$  можно рассматривать как функцию от  $x$ , также определённую для  $\forall x \in X$ .

Из определения производной вытекает и способ её вычисления.

**Пример.** Найдём производную функции  $y = x^2$ .

Для любого  $x$  из области определения  $X = (-\infty, +\infty)$  приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Пользуясь определением производной и считая  $x$  фиксированным, получим

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом, производная  $(x^2)' = 2x$  определена, также как и исходная функция, в области  $X = (-\infty, +\infty)$ . Например, значение производной в точке  $x = 3$  равно  $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$ .

### 3.12 Геометрический смысл производной

Зададим на графике функции  $y = f(x)$  точки  $M(x, y)$  и  $P(x + \Delta x, y + \Delta y)$  и проведём через них секущую  $MP$  (рис. 3.14). Угол между секущей и осью  $Ox$  обозначим через  $\alpha$ . Из  $\triangle MPK$  найдём  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

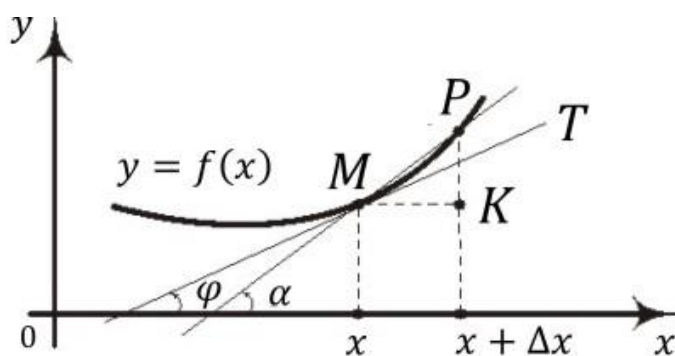


Рис. 3.14. Геометрический смысл производной  $f'(x)$

Устремим точку  $P$  вдоль кривой к точке  $M$  или, что то же самое, устремим  $\Delta x \rightarrow 0$ . При этом секущая  $MP$  будет изменять своё положение и стремиться к некоторому предельному положению (если оно существует) – прямой  $MT$ , которую называют *касательной* к графику функции в точке



$M(x, y)$ . Обозначим угол наклона касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M(x, y)$  к оси  $Ox$  через  $\varphi$ . Определим угловой коэффициент касательной

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Тем самым устанавливается *геометрический смысл производной*: производная функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  равна тангенсу угла наклона (угловому коэффициенту) касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M(x, y)$  к оси  $Ox$ .

Используя геометрический смысл производной, легко записать *уравнение касательной* к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M(x_0, f(x_0))$ :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

и уравнение нормали в этой же точке:

$$y - f(x_0) = -(1/f'(x_0))(x - x_0),$$

так как произведение угловых коэффициентов двух взаимно перпендикулярных прямых равно, как известно,  $-1$ .

### 3.13 Механический смысл производной

Пусть материальная точка движется неравномерно вдоль некоторой прямой по закону  $s = f(t)$ , где  $t$  – время, а  $s$  – путь, проходимый точкой за время  $t$ . За промежуток времени  $\Delta t$  материальная точка проходит путь  $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$ . Средняя скорость  $v_{cp}$  за промежуток времени  $\Delta t$  определяется, как известно из физики, соотношением пройденного пути ко времени:

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Скорость точки  $v$  в момент времени  $t$  или *мгновенная скорость* определяется как предел средней скорости  $v_{cp}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t).$$

Тем самым устанавливается *механический смысл производной*: скорость неравномерного движения в каждый данный момент времени равна производной от пути по времени.

### 3.14 Основные правила нахождения производных

Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  непрерывны и имеют производные для  $\forall x \in X$  и  $C$  – постоянная.

**Правило 1.** Постоянный множитель выносится за знак производной

$$(Cu)' = Cu'.$$

**Правило 2.** Производная суммы функций

$$(u + v)' = u' + v'.$$

**Правило 3.** Производная произведения функций

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

**Правило 4.** Производная частного функций ( $v(x) \neq 0$ )

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

### 3.15 Производная сложной и обратной функций

**Теорема 3.5.** Производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточной переменной на производную промежуточной переменной по независимой переменной:

$$y = y[u(x)]; \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

**Теорема 3.6** Если функция  $y = f(x)$  строго монотонна и непрерывна в некоторой области  $X$  и имеет в точке  $x \in X$  производную  $f'(x) \neq 0$ , то обратная функция  $x = g(y)$  также имеет в соответствующей точке  $y \in Y$  производную, равную

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

### 3.16 Таблица производных основных элементарных функций

Пусть функция  $u = u(x)$  имеет производную в некоторой точке  $x$  и  $C$  – постоянная. Тогда справедливы следующие формулы:

$$1 \quad (C)' = 0.$$

$$9 \quad (tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$$

$$2 \quad (x)' = 1.$$

$$10 \quad (ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'.$$

$$3 \quad (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'.$$

$$11 \quad (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$4 \quad (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'.$$

$$12 \quad (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$5 \quad (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'.$$

$$13 \quad (\arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$6 \quad (e^u)' = e^u \cdot u'.$$

$$14 \quad (\text{arcctgu})' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$7 \quad (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'.$$

$$15 \quad (\sin u)' = \cos u \cdot u'.$$

$$8 \quad (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'.$$

$$16 \quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$$

Для составления таблицы производных основных элементарных функций использованы определение производной, основные правила нахождения производных и теоремы 3.5 и 3.6 о производных сложной и обратной функций.

Формулы, приведённые в таблице, а также основные правила нахождения производных и теорема о производной сложной функции являются основными формулами дифференциального исчисления. На основе этих формул можно сделать важный вывод: *производная элементарной функции есть также элементарная функция.*

**Пример.** Найти производную функции  $y = x^2 \ln x + e^{\sin x} - 4$ .

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 \ln x + e^{\sin x} - 4)' = (x^2 \ln x)' + (e^{\sin x})' - (4)' = \\ &= (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' + e^{\sin x} (\sin x)' - (4)' = 2x \ln x + x + e^{\sin x} \cos x. \end{aligned}$$

### 3.17 Условия возрастания и убывания функции

**Достаточный признак монотонности функции.** Если функция  $y = f(x)$  в каждой точке интервала  $(a, b)$  имеет положительную (отрицательную) производную, то на этом интервала функция возрастает (убывает).

Теорема имеет простой *геометрический смысл*:

касательная к графику возрастающей функции в любой точке графика наклонена к оси  $Ox$  под острым углом  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \pi/2$ ), так как  $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi > 0$ , а касательная к графику убывающей функции наклонена к оси  $Ox$  под тупым углом  $\varphi$  ( $\pi/2 < \varphi < \pi$ ), так как  $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi < 0$  (рис. 3.15).

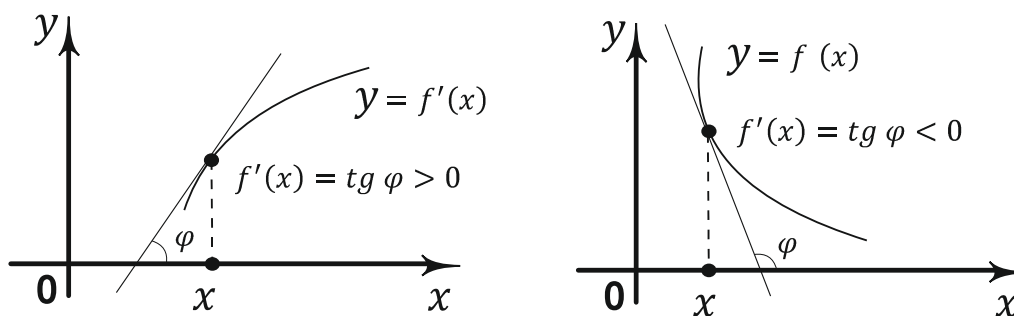


Рис. 3.15. Геометрический смысл достаточного признака монотонности функции

**Пример.** Определить интервалы монотонности функции  $y = x^3 - 3x$ .

Производная функции равна  $y' = 3x^2 - 3$ .

1. Функция возрастает для всех значений  $x$ , при которых  $y' > 0$ . Решая неравенство  $3x^2 - 3 > 0$ , находим  $x > 1$  или  $x < -1$ . Таким образом, функция возрастает в интервалах:  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

2. Функция убывает для всех значений  $x$ , при которых  $y' < 0$ . Решая неравенство  $3x^2 - 3 < 0$ , находим  $x^2 < 1$  или  $-1 < x < 1$ . Таким образом, функция убывает в интервале  $(-1; 1)$ .

### 3.18 Точки экстремума функции

**Определение.** Точка  $x_0$  называется *точкой строгого локального максимума (минимума)* функции  $f(x)$ , если для  $\forall x \in \dot{U}(x_0, \delta)$  выполняется неравенство  $f(x) < f(x_0)$  ( $f(x) > f(x_0)$ ).

Локальный максимум (*max*) и локальный минимум (*min*) объединяются общим названием *локальный экстремум* (рис. 3.16).

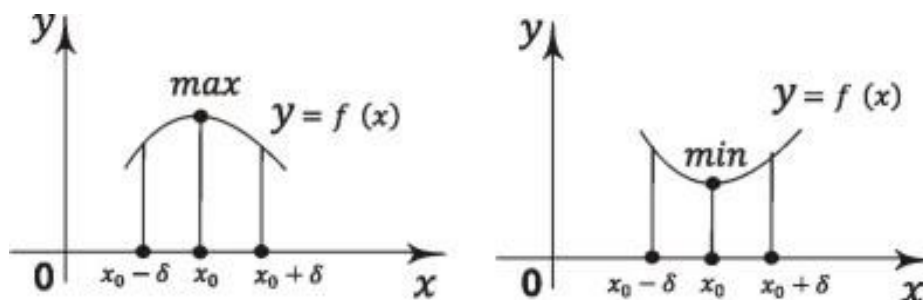


Рис. 3.16. Локальные экстремумы функции

Очевидно, что в области определения функция может иметь несколько локальных максимумов и несколько локальных минимумов, причём может

случиться и так, что какой-то локальный максимум окажется меньше какого-то локального минимума.

**Необходимое условие локального экстремума.** В точке локального экстремума производная  $f'(x)$  равна нулю или не существует.

Определение. Точки, в которых производная  $f'(x)$  равна нулю или не существует, называются *критическими точками* или *точками возможного экстремума*.

Таким образом, экстремум функции, если он существует, может иметь место только в критической точке. Однако не во всякой критической точке, как было показано выше, функция имеет экстремум. Судить о том, будет данная критическая точка точкой экстремума функции  $f(x)$  или нет, можно на основании достаточных условий экстремума.

**Первое достаточное условие локального экстремума.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в некоторой окрестности критической точки  $x_0$  и имеет производную во всех точках этой окрестности, кроме, быть может, самой точки  $x_0$ . Если при переходе слева направо через критическую точку  $x_0$  производная  $f'(x)$  меняет знак с плюса на минус, то в точке  $x_0$  функция  $f(x)$  имеет максимум, а если с минуса на плюс, то минимум.

Аналогично рассматривается случай перемены знака  $f'(x)$  с « $\rightarrow$ » на « $\leftarrow$ ».

*Геометрический смысл* первого достаточного условия локального экстремума ясен из рис. 3.16.

**Второе достаточное условие локального экстремума.** Пусть функция  $f(x)$  имеет непрерывную вторую производную в окрестности критической точки  $x_0$ . Если  $f''(x_0) < 0$ , то  $x_0$  есть точка локального максимума функции  $f(x)$ , если же  $f''(x_0) > 0$ , то  $x_0$  есть точка локального минимума функции  $f(x)$ .

*Замечание.* Если  $f'(x_0) = 0$  и  $f''(x_0) = 0$ , то вопрос о существовании локального экстремума функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  остаётся открытым. Требуется дополнительное исследование.

### 3.19 Схема исследования функции на экстремум

1. Находим первую производную  $f'(x)$  и определяем критические точки как точки, в которых  $f'(x)=0$  или  $f'(x)$  не существует. (Критические точки должны принадлежать области определения  $f(x)$ .)

2. Каждую критическую точку исследуем с помощью первого или второго достаточного условия локального экстремума.

3. Результаты исследования сводим в таблицу.

**Пример.** Найти точки локального экстремума функции  $f(x) = x^3 - 3x$ .

1. Находим первую производную:

$$f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1).$$

Решая уравнение  $3(x+1)(x-1)=0$ , получаем две критические точки:  $x=-1$  и  $x=1$ , принадлежащие области определения функции  $X = \mathbb{R}$ . Точек, в которых  $f'(x)$  не существует, в данном случае нет.




2. Исследуем найденные критические точки с помощью первого достаточного условия локального экстремума. Для этого определим знаки первой производной слева и справа от каждой критической точки. Из выражения для первой производной следует, что

$$f'(x < -1) > 0; f'(-1 < x < 1) < 0; f'(x > 1) > 0.$$

На основании первого достаточного условия локального экстремума делаем заключение, что в точке  $x=-1$  функция  $f(x) = x^3 - 3x$  имеет локальный максимум, а в точке  $x=1$  – локальный минимум. Далее находим:

$$y_{\max} = f(-1) = 2; y_{\min} = f(1) = -2.$$

3. Результаты исследования сводим в таблицу.

$X$	$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 1)$	$1$	$(1; +\infty)$
$f(x)$		2		-2	

$f'(x)$	+	0	–	0	+
		max		min	

### 3.20 Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Согласно второй теореме Вейерштрасса, такая функция достигает своего наибольшего и своего наименьшего значений либо внутри отрезка  $[a, b]$ , либо на его границах.

Приведём *схему* нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке  $[a, b]$  функции  $f(x)$ :

1. Находим все критические точки функции в интервале  $(a, b)$  и вычисляем в них значения функции.
2. Вычисляем значения функции на концах отрезка – в точках  $x = a$  и  $x = b$ .
3. Из всех вычисленных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.

**Пример.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^3 - 3x$  на отрезке  $[-3; 0]$ .

1. Находим первую производную:

$$f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1).$$

Решая уравнение  $3(x + 1)(x - 1) = 0$ , получаем две критические точки:  $x = -1$  и  $x = 1$ , принадлежащие области определения функции  $X = R$ . Точек, в которых  $f'(x)$  не существует, в данном случае нет.

Точка  $x = -1$  принадлежит заданному отрезку  $[-3; 0]$ . Значение функции  $f(-1) = 2$ . Точка  $x = 1$  не принадлежит заданному отрезку  $[-3; 0]$ . Эту точку из дальнейшего рассмотрения исключаем.



2. Вычисляем значения функции на концах отрезка в точках  $x = -3$  и  $x = 0$ :  $f(-3) = -18$ ;  $f(0) = 0$ .

3. Из всех вычисленных значений функции

$$f(-1) = 2, f(-3) = -18, f(0) = 0$$

выбираем наибольшее и наименьшее. В результате получаем, что функция  $f(x) = x^3 - 3x$  на отрезке  $[-3; 0]$  достигает своего наибольшего значения внутри отрезка —  $y_{\text{наиб}} = f(-1) = 2$ , а своего наименьшего значения на левом конце отрезка —  $y_{\text{наим}} = f(-3) = -18$ .

### 3.21 Выпуклость и вогнутость графика функции

Пусть функция  $y = f(x)$  имеет производную в каждой точке интервала  $(a, b)$ . Тогда существует касательная к графику функции  $y = f(x)$  в каждой его точке.

Определение. График функции  $y = f(x)$  называется *выпуклым* в интервале  $(a, b)$ , если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале.

График функции  $y = f(x)$  называется *вогнутым* в интервале  $(a, b)$ , если он расположен выше любой своей касательной на этом интервале (рис. 3.17).

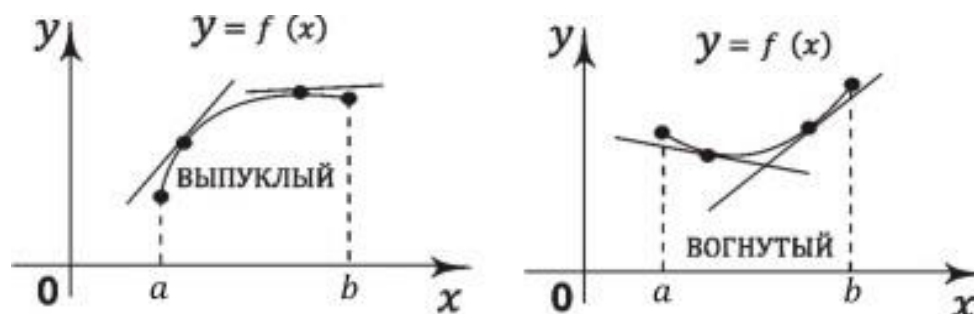


Рис. 3.17. Выпуклость и вогнутость графика функции

**Теорема 3.7.** Если во всех точках интервала  $(a,b)$  вторая производная  $f''(x) < 0$ , то график функции  $f(x)$  на этом интервале выпуклый, а если  $f''(x) > 0$ , то вогнутый.

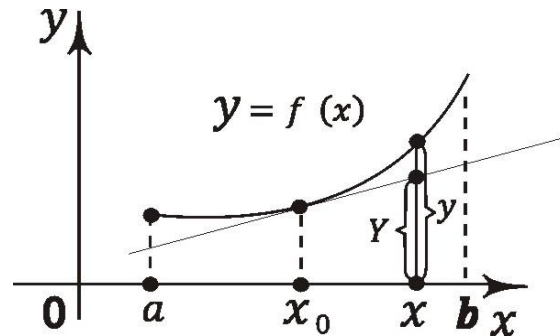


Рис. 3.18. Связь выпуклости и вогнутости графика функции со знаком второй производной

### 3.22 Точки перегиба

**Определение.** Точка графика функции, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой, называется *точкой перегиба*.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает график функции (рис. 3.19).

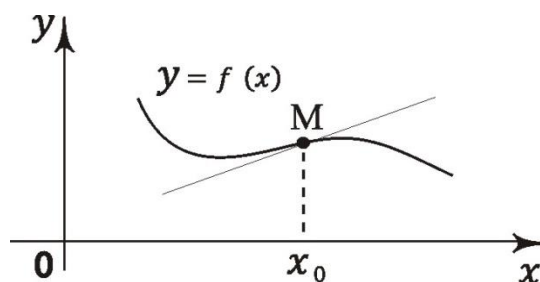


Рис. 3.19. Точка перегиба

**Необходимое условие перегиба.** В точке перегиба с абсциссой  $x_0$  вторая производная  $f''(x) = 0$ , если она существует и непрерывна, или  $f''(x)$  не существует.

Но функция в точке перегиба может и не иметь второй производной. Так, например, для функции  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  вторая производная  $f''(x) = -2/(9\sqrt[3]{x^5})$  и не существует в точке  $x_0 = 0$ . Однако  $f''(x) > 0$  для  $x < 0$  и  $f''(x) < 0$  для  $x > 0$ , т.е. на основании теоремы 3.7 график данной функции вогнутый для  $x < 0$  и выпуклый для  $x > 0$ , следовательно, имеет точку перегиба с абсциссой  $x_0 = 0$ .

Следует отметить, что условие  $f''(x) = 0$  или  $f''(x)$  не существует, будучи необходимым для существования перегиба, не является достаточным. Например, для функции  $f(x) = x^4$  производная второго порядка  $f''(x) = 12x^2$  обращается в нуль при  $x_0 = 0$ . Тем не менее, перегиба в точке с абсциссой  $x_0 = 0$  нет, так как  $f''(x) > 0$  для  $\forall x \in R$ , т.е. график данной функции вогнутый на всей числовой оси.

**Определение .** Точки, в которых вторая производная  $f''(x)$  равна нулю или не существует, называются *критическими точками* или *точками возможного перегиба*.

Таким образом, перегиб графика функции, если он существует, может иметь место только в критической точке. Однако не во всякой критической точке, как было сказано выше, график функции имеет перегиб. Судить о том, будет данная критическая точка точкой перегиба функции  $f(x)$  или нет, можно на основании достаточного условия перегиба.

**Достаточное условие перегиба.** Пусть функция  $f(x)$  имеет вторую производную во всех точках некоторой окрестности критической точки  $x_0$ , кроме, быть может, самой точки  $x_0$ . Если при переходе через критическую точку  $x_0$  вторая производная меняет знак, то точка с абсциссой  $x_0$  есть точка перегиба.

### 3.23 Схема исследования графика функции на перегиб

1. Находим вторую производную  $f''(x)$  и определяем критические точки как точки, в которых  $f''(x)=0$  или  $f''(x)$  не существует. (Критические точки должны принадлежать области определения  $f(x)$ .)

2. Каждую критическую точку исследуем с помощью достаточного условия перегиба.

3. Результаты исследования сводим в таблицу.

**Пример.** Найти точки перегиба функции  $f(x) = x^3 - 3x$ .

1. Находим вторую производную

$$f''(x) = (x^3 - 3x)'' = (3x^2 - 3)' = 6x.$$

Решая уравнение  $6x=0$ , получаем критическую точку  $x_0=0$ , принадлежащую области определения  $X = \mathbb{R}$ .

Точек, в которых  $f''(x)$  не существует, в данном случае нет.

2. Исследуем найденную критическую точку с помощью достаточного условия перегиба. Для этого определим знаки второй производной слева и справа от критической точки. Из выражения для второй производной следует, что  $f''(x) < 0$  для  $x < 0$  и  $f''(x) > 0$  для  $x > 0$ . На основании достаточного условия перегиба делаем заключение, что в точке с абсциссой  $x_0=0$  график функции  $f(x) = x^3 - 3x$  имеет перегиб.

3. Результаты исследования сводим в таблицу.

$X$	$(-\infty, 0)$	$0$	$(0, +\infty)$
$f(x)$	$\cap$	$0$	$\cup$
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$
		Перегиб	

### 3.24 Асимптоты графика функции

Определение. Прямая  $x = x_0$  называется *вертикальной асимптотой* графика функции  $y = f(x)$ , если хотя бы одно из предельных значений  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$  равно  $+\infty$  или  $-\infty$ .

Для отыскания вертикальных асимптот графика функции  $y = f(x)$  надо найти те значения  $x = x_0$ , при которых функция обращается в бесконечность. Тогда вертикальная асимптота имеет уравнение  $x = x_0$ .

Вертикальная асимптота может быть *правосторонней* (график функции приближается к ней при  $x \rightarrow x_0 + 0$ ) и *левосторонней* (график функции приближается к ней при  $x \rightarrow x_0 - 0$ ).

Определение. Прямая  $y = kx + b$  называется *наклонной асимптотой* графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ), если функцию  $f(x)$  можно представить в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ).

**Теорема 3.8.** Для того, чтобы график функции  $y = f(x)$  имел при  $x \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ) наклонную асимптоту  $y = kx + b$ , необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} [f(x) - kx].$$

В частном случае, если  $k = 0$ , *асимптота* называется *горизонтальной*.

Наклонная асимптота, как и вертикальная, может быть *правосторонней* (график функции приближается к ней при  $x \rightarrow +\infty$ ) и *левосторонней* (график функции приближается к ней при  $x \rightarrow -\infty$ ).

Пример. Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x}.$$

1. Находим вертикальные асимптоты. Точка  $x_0 = 0$  является точкой разрыва 2-го рода с бесконечным скачком для данной функции, причем:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \left( x + 2 - \frac{3}{x} \right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \left( x + 2 - \frac{3}{x} \right) = -\infty.$$

Следовательно,  $x = 0$  (ось ординат) – вертикальная (двусторонняя) асимптота (рис. 3.20).

2. Находим наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left( 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right) = 1;$$

$$b = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} [f(x) - kx] = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left( \frac{x^2 + 2x - 3}{x} - x \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left( \frac{2x - 3}{x} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left( 2 - \frac{3}{x} \right) = 2.$$

Следовательно, прямая  $y = x + 2$  является наклонной асимптотой графика данной функции как при  $x \rightarrow +\infty$ , так и при  $x \rightarrow -\infty$  (двусторонняя асимптота).

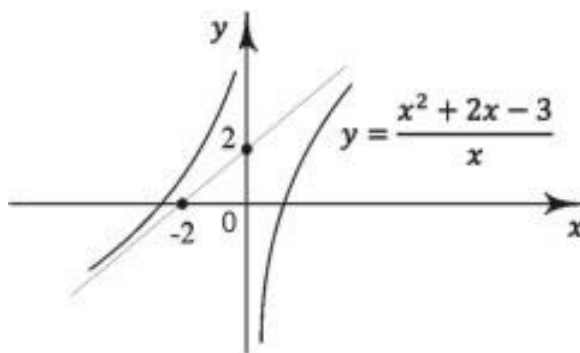


Рис. 3.20. Вертикальная и наклонная асимптоты графика функции

Из определений вертикальной и наклонной асимптот вытекает их *геометрический смысл*: прямая является асимптотой графика функции  $y = f(x)$ , если расстояние точки графика от прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

### 3.25 Общая схема исследования функции и построение ее графика

1. Найти область определения функции, точки разрыва и вертикальные асимптоты графика функции.
2. Выяснить симметрию графика функции (четность, нечетность, периодичность) и установить точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Найти наклонные асимптоты графика функции.
4. Найти интервалы возрастания и убывания и экстремумы функции.
5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции.
6. Построить график функции по результатам исследования.

## 4. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

### НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

#### 4.1 Первообразная функция

В дифференциальном исчислении по заданной функции  $f(x)$  приходилось отыскивать ее производную  $f'(x)$ .

В интегральном исчислении рассматривается обратная задача: по заданной функции  $f(x)$  восстановить такую функцию  $F(x)$ , для которой  $f(x)$  была бы производной, т.е.  $F'(x) = f(x)$ .

Определение. Функция  $F(x)$  называется *первообразной (функцией)* для функции  $f(x)$  на интервале  $(a,b)$ , если для всех значений  $x$  из этого интервала выполняется равенство

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a,b).$$

## Примеры

1) Функция  $F(x) = \sin x$  является первообразной для функции  $f(x) = \cos x$  на всей числовой прямой, так как при любом значении  $x \in (-\infty, +\infty)$  выполняется равенство  $(\sin x)' = \cos x$ .

2) Функция  $F(x) = \sqrt{1-x^2}$  является первообразной для функции  $f(x) = -x/\sqrt{1-x^2}$  на интервале  $(-1;1)$ , так как в любой точке  $x$  этого интервала  $(\sqrt{1-x^2})' = -x/\sqrt{1-x^2}$ .

Однако задача отыскания по данной функции  $f(x)$  её первообразной решается неоднозначно. Действительно, если  $F(x)$  – первообразная для  $f(x)$ , т.е.  $F'(x) = f(x)$ , то функция  $F(x) + C$ , где  $C$  – произвольная постоянная, также является первообразной для  $f(x)$ , так как  $(F(x) + C)' = f(x)$  для любого числа  $C$ .

Например, для  $f(x) = \cos x$  первообразной является не только  $\sin x$ , но и функция  $\sin x + C$ , так как  $(\sin x + C)' = \cos x$ .

Возникает вопрос: если  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  – две первообразные для одной и той же функции  $f(x)$ , то всегда ли они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое? Оказывается, что это действительно так.

**Теорема 4.1.** Если  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  – две первообразные для функции  $f(x)$  на интервале  $(a,b)$ , то  $F_2(x) = F_1(x) + C$ , где  $C$  – некоторая постоянная.

*Следствие.* Все первообразные для функции  $f(x)$  на интервале  $(a,b)$  даются формулой  $F(x) + C$ , где  $F(x)$  – одна из первообразных для  $f(x)$ , а  $C$  – произвольная постоянная.

## 4.2 Неопределенный интеграл

**Определение.** Совокупность всех первообразных для функции  $f(x)$  на интервале  $(a,b)$  называется *неопределенным интегралом* от функции  $f(x)$  на этом интервале и обозначается символом



$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

При этом функция  $f(x)$  называется *подынтегральной функцией*,  $f(x)dx$  – *подынтегральным выражением*, а переменная  $x$  – *переменной интегрирования*.

Нахождение первообразных для функции  $f(x)$  называется *интегрированием функции  $f(x)$* .

Отметим, что подынтегральное выражение является дифференциалом первообразной:

$$f(x)dx = F'(x)dx = dF(x).$$

### Примеры

$$1) \int \cos x dx = \sin x + C, \text{ так как } (\sin x + C)' = \cos x.$$

$$2) \int 2x dx = x^2 + C, \text{ так как } (x^2 + C)' = 2x.$$

**Теорема 4.2.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на интервале  $(a, b)$ , то для неё существует первообразная на  $(a, b)$ , а следовательно, и неопределенный интеграл.

## 4.3 Основные свойства неопределенного интеграла

**Свойство 1.** Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left[ \int f(x)dx \right]' = f(x) \quad \text{и} \quad d\left[ \int f(x)dx \right] = f(x)dx.$$

**Свойство 2.** Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

**Свойство 3.** Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int Af(x)dx = A \int f(x)dx.$$

**Свойство 4.** Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Отметим, что данное свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых функций.

#### 4.4 Таблица основных интегралов

Приведем таблицу основных интегралов, которая непосредственно следует из определения интегрирования как операции, обратной дифференцированию, и таблицы производных. Справедливость всех формул легко проверить дифференцированием первообразных. Интегралы, содержащиеся в этой (или подобной ей) таблице, принято называть *табличными*.

Таблица интегралов в силу инвариантности формы дифференциала функции оказывается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования  $u$  независимой переменной ( $u = x$ ) или любой её дифференцируемой функцией ( $u = u(x)$ ).

$$1. \int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad (\alpha \neq -1); \quad \int du = u + C.$$

$$2. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

$$3. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad (a > 0, a \neq 1); \quad \int e^u du = e^u + C.$$

$$4. \int \sin u du = -\cos u + C.$$

$$5. \int \cos u du = \sin u + C.$$

$$6. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$$

$$7. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$$

$$8. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C, \quad (a \neq 0).$$

$$9. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C.$$

$$10. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$$

$$11. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C.$$

$$12. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C.$$

Отметим, что если операция дифференцирования элементарных функций снова приводит к элементарным функциям, то операция интегрирования уже может привести к неэлементарным функциям, т.е. функциям, которые не выражаются через конечное число арифметических операций и суперпозиций элементарных функций.

## 4.5 Основные методы интегрирования

**1 Непосредственное интегрирование.** Вычисление интегралов с помощью непосредственного использования таблицы простейших интегралов и основных свойств неопределенных интегралов называется *непосредственным интегрированием или методом разложения*.

**Пример**

$$\int (4 \cos x - 6x^5 + 1) dx = 4 \int \cos x dx - 6 \int x^5 dx + \int dx = 4 \sin x - x^6 + x + C.$$

**2 Метод подстановки (замены переменной).** Метод, позволяющий с помощью введения новой переменной интегрирования свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла, называется *методом подстановки* или *методом замены переменной*.

Метод основан на следующей теореме.

**Теорема 4.3.** Пусть функция  $x = \varphi(t)$  определена и дифференцируема на некотором множестве  $T$  и пусть  $X$  – множество значений этой функции, на котором определена функция  $f(x)$ . Тогда, если на множестве  $X$  функция  $f(x)$  имеет первообразную, то на множестве  $T$  справедлива *формула замены переменной в неопределенном интеграле*:

$$\int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt .$$

Пример

$$\int \sqrt{x-2}dx = \left| \begin{matrix} x=t+2; & t=x-2 \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}(x-2)^{3/2} + C .$$

Иногда формулу замены переменной полезно применять справа налево:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt \Big|_{t=\varphi(x)} .$$

Пример

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C .$$

**3. Метод интегрирования по частям.** Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы дифференцирования произведения двух функций.

**Теорема 4.4.** Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  определены и дифференцируемы на некотором промежутке  $X$  и пусть функция  $u'(x)v(x)$  имеет первообразную на этом промежутке. Тогда на промежутке  $X$  функция  $u(x)v'(x)$  также имеет первообразную и справедлива *формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле*:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

*Замечание.* Так как  $u'(x)dx = du$ ,  $v'(x)dx = dv$ , то формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле можно записать в виде

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

**Пример**

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos x dx}_{dv} = \left| \begin{array}{l} u = x; dv = \cos x dx \\ du = dx; v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

*Замечание.* Формула интегрирования по частям может применяться неоднократно.

**Пример**

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} &= \left| \begin{array}{l} u = x^2; dv = e^x dx \\ du = 2x dx; v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2 \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} = \left| \begin{array}{l} u = x; dv = e^x dx \\ du = dx; v = e^x \end{array} \right| = \\ &= x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = (x^2 - 2x + 2)e^x + C. \end{aligned}$$

## ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### 4.6 Определение определенного интеграла

Пусть непрерывная функция  $y = f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$ . Разобьем этот отрезок на  $n$  произвольных частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.$$

В каждом из полученных *частичных отрезков*  $[x_{i-1}, x_i]$  выберем произвольную точку  $\xi_i$  ( $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ). Через  $\Delta x_i$  обозначим разность  $x_i - x_{i-1}$ , которую условимся называть *длиной частичного отрезка*  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Образуем сумму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,$$

которую назовем *интегральной суммой* для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , соответствующей данному разбиению отрезка  $[a, b]$  на частичные отрезки и данному выбору промежуточных точек  $\xi_i$ . *Геометрический смысл суммы*  $S_n$  очевиден: это сумма площадей прямоугольников с основаниями  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  и высотами  $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$  (если  $f(x) \geq 0$  на отрезке  $[a, b]$ ) (рис. 4.1).

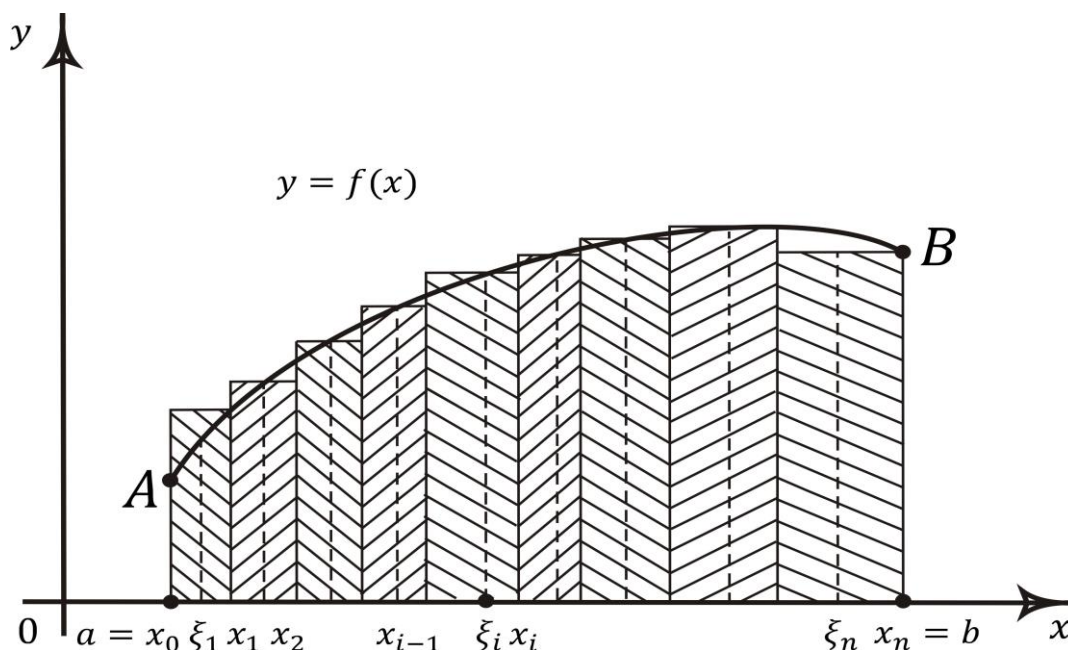


Рис. 4.1. Геометрический смысл интегральной суммы и определенного интеграла

Обозначим через  $\Delta$  длину наибольшего частичного отрезка разбиения:

$$\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}.$$

**Определение.** *Определенным интегралом* от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  называется предел интегральных сумм при стремлении к нулю длины наибольшего частичного отрезка разбиения, если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка  $[a, b]$  на частичные отрезки, ни от выбора в каждом из них точки  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Функция  $f(x)$  называется *интегрируемой* на отрезке  $[a, b]$ . Числа  $a$  и  $b$  называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*, а

отрезок  $[a, b]$  – *отрезком интегрирования*. Функция  $f(x)$  называется также *подынтегральной функцией*,  $f(x)dx$  – *подынтегральным выражением*,  $x$  – *переменной интегрирования*.

Из определения следует, что определенный интеграл представляет собой некоторое число и не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = C.$$

Из определения определенного интеграла и рис. 4.1 следует *геометрический смысл определенного интеграла*: определенный интеграл от неотрицательной функции  $f(x)$  по отрезку  $[a, b]$  численно равен площади криволинейной трапеции  $aABb$ , т.е. фигуры, ограниченной осью  $Ox$ , графиком функции  $y = f(x)$  и двумя прямыми  $x = a$  и  $x = b$ .

**Теорема 4.5** *существования определенного интеграла* (без доказательства).

Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то для нее на этом отрезке существует определенный интеграл.

*Замечание.* Класс интегрируемых функций шире, чем класс непрерывных функций. Например, интегрируемыми являются также кусочно-непрерывные на отрезке  $[a, b]$  функции.

## 4.7 Основные свойства определенного интеграла

**Свойство 1.** Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx.$$

**Свойство 2.** Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

**Свойство 3.** Если отрезок интегрирования  $[a, b]$  разбить на два отрезка  $[a, c]$  и  $[c, b]$ , то интеграл по всему отрезку  $[a, b]$  будет равен сумме интегралов по отрезкам  $[a, c]$  и  $[c, b]$ :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

**Свойство 4.** При перемене местами пределов интегрирования интеграл изменяет знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

**Свойство 5.** Интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

**Свойство 6.** Интеграл от постоянной величины равен этой постоянной, умноженной на длину отрезка интегрирования:

$$\int_a^b A dx = A(b - a).$$

**Свойство 7.** Если  $m$  и  $M$  – наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

**Свойство 8.** Абсолютная величина интеграла от данной функции не превышает интеграла от абсолютной величины этой же функции:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

**Свойство 9 (Теорема о среднем).** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то на этом отрезке существует такая точка  $c$ , что справедлива формула



$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

называемая *формулой среднего значения* функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

#### 4.8 Формула Ньютона – Лейбница

Выведем основную формулу интегрального исчисления – формулу Ньютона – Лейбница. Эта формула дает способ вычисления определенного интеграла через первообразную от подынтегральной функции, не прибегая к составлению интегральной суммы и к вычислению ее предела.

**Теорема 4.6.** Если  $F(x)$  есть какая-либо первообразная от непрерывной на отрезке  $[a, b]$  функции  $f(x)$ , то справедлива *формула Ньютона – Лейбница*:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

**Пример**

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

#### 4.9 Замена переменной в определенном интеграле

**Теорема 4.7.** Пусть  $f(x)$  – непрерывная функция на отрезке  $[a, b]$ . Тогда, если: 1) функция  $x = \varphi(t)$  дифференцируема на отрезке  $[\alpha, \beta]$  и  $\varphi'(t)$  непрерывна на  $[\alpha, \beta]$ ; 2) множеством значений функции  $x = \varphi(t)$  является отрезок  $[a, b]$ ; 3)  $\varphi(\alpha) = a$  и  $\varphi(\beta) = b$ , то справедлива *формула замены переменной в определенном интеграле*:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

### Пример

$$\int_0^1 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = a \sin t; \quad dx = a \cos t dt; \\ t = \arcsin \frac{x}{a}; \\ \alpha = \arcsin 0 = 0; \quad \beta = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \cdot d(2t) \right) =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{2} \left[ \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) - \left( 0 + \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right] = \frac{\pi a^2}{4}.$$

## 4.10 Интегрирование по частям в определенном интеграле

**Теорема 4.8.** Если функции  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют непрерывные производные на отрезке  $[a, b]$ , то справедлива формула интегрирования по частям в определенном интеграле:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

### Пример

$$\int_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x; \quad dv = dx; \\ du = \frac{dx}{x}; \quad v = x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x} = (x \ln x - x) \Big|_1^e = (e \ln e - e) - (1 \cdot \ln 1 - 1) = 1.$$