РОСЖЕЛДОР

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ростовский государственный университет путей сообщения»

(ФГБОУ ВО РГУПС)

Н.С. Задорожная, А.В. Морозова

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА С ЭЛЕМЕНТАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Учебно-методическое пособие

для специальности среднего профессионального образования
09.02.09 Веб-разработка

Ростов-на-Дону
2025

УДК 519.85(07) + 06

Морозова, А.В.

Дискретная математика: учебно-методическое пособие/ Н.С. Задорожная, А.В. Морозова; ФГБОУ ВО РГУПС. – Ростов н/Д, 2025. – 64 с.

В пособии кратко изложены разделы дискретной математики: элементы математической логики, теории множеств, графов, элементы комбинаторики; даны методические указания по решению типовых задач, в конце каждого раздела приведены задачи к выполнению аудиторных, домашних заданий и для самостоятельной работы по дисциплине «Дискретная математика с элементами математической логики».

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов 2-го курса специальности СПО 09.02.09 Веб-разработка.

Одобрено к изданию кафедрой «Высшая математика».

Рецензент – доктор тех. наук, доц. М.А. Мукутадзе (РГУПС)

Оглавление

1 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

1.1 Высказывания. Логические связки

Утверждение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно, называется (простым) высказыванием. Например, высказывание «3 > 2» истинно, а высказывание «9 – простое число» ложно.

Будем обозначать высказывания прописными буквами латинского алфавита X, Y, Z, …, истинное высказывание цифрой 1, ложное – цифрой 0.

Из простых высказываний с помощью логических связок можно построить составные высказывания. Рассмотрим следующие логические связки:

Название	Прочтение	Обозначение
Отрицание	не	$-$
Конъюнкция	и	$\wedge$
Дизъюнкция	или	$\vee$
Импликация	если, … то	$\rightarrow$
Эквиваленция	тогда и только тогда, когда	$\leftrightarrow$

Все возможные комбинации истинности и ложности составного высказывания отражает таблица истинности. Пусть X и Y произвольные высказывания.

Отрицанием высказывания X называется высказывание $\overline{X}$, которое истинно, когда X ложно, и ложно, когда X истинно.

Таблица истинности для отрицания

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

Конъюнкцией двух высказываний X и Y называется высказывание $X \wedge Y$ истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны.

Таблица истинности для конъюнкции

X	Y	$X \wedge Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Употребляются также обозначения конъюнкции $X \,\&\, Y$, $X \cdot Y$, XY.

Дизъюнкцией двух высказываний X и Y называется высказывание $X \vee Y$, которое истинно, если истинно хотя бы одно из высказываний.

Импликацией двух высказываний X и Y называется высказывание $X \rightarrow Y$, которое ложно тогда и только тогда, когда X истинно, а Y ложно.

Эквиваленцией (эквивалентностью) двух высказываний X и Y называется высказывание $X \leftrightarrow Y$, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны или оба ложны.

Таблица истинности для дизъюнкции

X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица истинности для импликации

X	Y	$X \to Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Таблица истинности для эквиваленции

X	Y	$X \leftrightarrow Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логическими связками можно пользоваться многократно, получая более сложные составные высказывания. Например, $(X \vee \overline{Y})$, $\overline{(X \vee Y)} \to Z$. Во избежание неоднозначности лучше всегда использовать скобки. Если скобки опущены, то порядок выполнения операций: $-$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$. Поэтому такие выражения, как $X \vee Y \wedge Z$, $X \to Y \vee Z$, $X \wedge Y \leftrightarrow Z \vee \overline{X}$, можно интерпретировать как $X \vee (Y \wedge Z)$, $X \to (Y \vee Z)$, $(X \wedge Y) \leftrightarrow (Z \vee \overline{X})$.

Рассмотрим другие логические связки:

Название	Прочтение	Обозначение
Штрих Шеффера	Антиконъюнкция	$\mid$
Стрелка Пирса	Антидизъюнкция	$\downarrow$
Сумма по модулю два	Антиэквивалентность	$\oplus$

Штрих Шеффера, или антиконъюнкция, по определению

$$X \mid Y = \overline{X \wedge Y}.$$

Таблица истинности штриха Шеффера

X	Y	$X \mid Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Стрелка Пирса, или антидизъюнкция, по определению $X \downarrow Y = \overline{X \vee Y}$.

Таблица истинности стрелки Пирса

X	Y	$X \downarrow Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Сумма по модулю два, или антиэквивалентность, по определению $X \oplus Y = \overline{X \leftrightarrow Y}$.

Таблица истинности суммы по модулю два

X	Y	$X \oplus Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Замечание. Если число простых высказываний *n*, то таблица истинности содержит 2^n строк.

1.2 Эквивалентность высказываний

Сложные высказывания, имеющие различное строение, но являющиеся истинными в одних и тех же случаях, называются логически эквивалентными (равносильными). Эквивалентность обозначается символом « $\equiv$ » или « $=$ ».

С помощью таблиц истинности можно доказать следующие логические эквивалентности.

Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{X}} = X$.

Законы идемпотентности: $X \vee X = X$, $X \wedge X = X$.

Коммутативные законы: $X \vee Y = Y \vee X$, $X \wedge Y = Y \wedge X$.

Ассоциативные законы: $X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z$,
$X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$.

Дистрибутивные законы: $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$,
$X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$.

Законы де Моргана: $\overline{X \vee Y} = \overline{X} \wedge \overline{Y}$, $\overline{X \wedge Y} = \overline{X} \vee \overline{Y}$.

Законы нуля и единицы: $X \vee 1 = 1$, $X \vee 0 = X$,
$X \wedge 1 = X$, $X \wedge 0 = 0$.

Законы поглощения: $X \vee (X \wedge Y) = X$, $X \wedge (X \vee Y) = X$.

Закон исключенного третьего: $X \vee \overline{X} = 1$.

Закон противоречия: $X \wedge \overline{X} = 0$.

Замечание. Известно, что

$$X \leftrightarrow Y = (\overline{X} \vee Y)\cdot(X \vee \overline{Y}),\ X \to Y = \overline{X} \vee Y,\ X \vee Y = \overline{\overline{X} \wedge \overline{Y}},\ X \wedge Y = \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}},$$

следовательно, любое высказывание можно выразить через пару логических связок «$-$ и $\wedge$» или «$-$ и $\vee$».

1.3 Булевы функции

Булевой или логической функцией n переменных $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется функция, принимающая значения 0 или 1, аргументы которой также принимают значения 0 и 1.

Две булевы функции называют равными, если для любых одинаковых наборов значений аргументов обе функции принимают одинаковые значения.

Логическую функцию n переменных можно задать таблицей истинности, содержащей 2^n строк. Число различных логических функций n переменных равно 2^{2^n}.

Если n = 1, то число различных булевых функций равно 4.

Таблица истинности булевых функций одной переменной:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Название булевых функций одной переменной:

$f_1(x)$= 0 – константа 0, $f_2(x) = x$ – тождественная функция,

$f_3(x) = \overline{x}$ – отрицание, $f_4(x)$= 1 – константа 1.

Если n = 2, то различных булевых функций 16.

Таблица истинности булевых функций двух переменных:

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Наименования элементарных логических функций:

$f_1(x,y)$ = 0, $f_{16}(x,y)$ = 1 – константы; $f_2(x,y) = x \cdot y$ – конъюнкция;

$f_4(x,y) = x$ – переменная x; $f_6(x,y) = y$ – переменная y;

$f_7(x,y) = x \oplus y$ – сумма по модулю 2; $f_8(x,y) = x \vee y$ – дизъюнкция;

$f_9(x,y) = x \downarrow y$ – стрелка Пирса; $f_{10}(x,y) = x \leftrightarrow y$ – эквивалентность;

$f_{11}(x,y) = \overline{y}$ – отрицание переменной y;

$f_{12}(x,y) = y \to x$ – конверсия импликации;

$f_{13}(x,y)=\bar{x}$ – отрицание переменной x; $f_{14}(x,y)=x\to y$ – импликация;

$f_{15}(x,y)=x\mid y$ – штрих Шеффера, $f_3(x,y)$, $f_5(x,y)$ – функции запрета.

Иногда при задании логической функции ограничиваются указанием ее набора значений. Например, $f_3(x,y)$ = (0010).

Суперпозицией функций f_1, f_2, …, $f_к$ называется булева функция, полученная путем подстановки этих функций друг в друга вместо переменных, а также с помощью переименования переменных. Выражение, описывающее суперпозицию, называют формулой.

Формулы, реализующие одну и ту же функцию, называют равносильными.

Каковы бы ни были формулы x, y, z, справедливы следующие равносильности:

$\bar{\bar{x}}=x$ – закон двойного отрицания,

$x\cdot x=x$, $x\vee x=x$ – законы идемпотентности,

$x\cdot y=y\cdot x$, $x\vee y=y\vee x$ – коммутативные законы,

$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$, $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$ – ассоциативные законы,

$x\cdot(y\vee z)=(x\cdot y)\vee(x\cdot z)$, $x\vee(y\cdot z)=(x\vee y)\cdot(x\vee z)$ – дистрибутивные законы,

$\overline{x\cdot y}=\bar{x}\vee\bar{y}$, $\overline{x\vee y}=\bar{x}\cdot\bar{y}$ – законы де Моргана,

$x\cdot 0=0$, $x\cdot 1=x$, $x\vee 0=x$, $x\vee 1=1$ – тождества с константами,

$x\cdot(x\vee y)=x$, $x\vee(x\cdot y)=x$ – законы поглощения,

$\bar{x}\vee x=1$ – закон исключенного третьего,

$\bar{x}\cdot x=0$ – закон противоречия.

Все равносильности могут быть проверены построением таблиц истинности.

1.4 Нормальные формы

Введем обозначение

$$x^{\sigma}=\begin{cases}x, & если\ \ \sigma=1,\\ \bar{x}, & если\ \ \sigma=0.\end{cases}$$

Элементарной конъюнкцией называется выражение $x_{i_1}^{\sigma_{i_1}}\cdot x_{i_2}^{\sigma_{i_2}}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}^{\sigma_{i_k}}$, где все переменные, входящие в конъюнкцию, различны, $k\geq 1$; $\sigma_{i_1},\sigma_{i_2},\ldots,\sigma_{i_k}$ принимают значения 0 или 1.

Например, элементарные конъюнкции: $x_1\cdot x_2$, $x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_3}$, $x_2\cdot\overline{x_3}\cdot x_4$; элементарные конъюнкции относительно переменных x, y, z: $x\cdot\bar{y}$, x, $x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) данной булевой функции называют ее представление в виде дизъюнкции некоторых элементарных конъюнкций.

Например: $(\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3) \vee (x_1 \cdot x_2) \vee \overline{x_3}$ – ДНФ.

Элементарной дизъюнкцией называется выражение $x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \vee x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} \vee \ldots \vee x_{i_k}^{\sigma_{i_k}}$, где все переменные, входящие в дизъюнкцию, различны, $k \geq 1$.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) данной булевой функции называют ее представление в виде конъюнкции некоторых элементарных дизъюнкций.

Например: $\overline{x_1} \cdot (x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x_2} \vee x_3)$ – КНФ.

Любая логическая функция может иметь много представлений в виде ДНФ и КНФ.

1.5 Совершенная дизъюнктивная и совершенная конъюнктивная нормальные формы

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) данной булевой функции называют ее представление в виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) данной булевой функции называют ее представление в виде:

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \bigwedge_{f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0} (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}).$$

Теорема.

Всякая булева функция *n* переменных, отличная от константы 0, имеет единственную СДНФ. Всякая булева функция *n* переменных, отличная от константы 1, имеет единственную СКНФ.

Пример. Построить СДНФ и СКНФ для функции *f(x, y, z)*, заданной таблицей истинности:

x	*y*	*z*	*f(x, y, z)*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Решение. Для нахождения СДНФ выпишем двоичные наборы, на которых функция равна 1, и составим соответствующие этим наборам элементарные конъюнкции:

(010): $x^0 \cdot y^1 \cdot z^0 = \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}$; (101): $x^1 \cdot y^0 \cdot z^1 = x \cdot \overline{y} \cdot z$; (111): $x^1 \cdot y^1 \cdot z^1 = x \cdot y \cdot z$.
Получаем СДНФ: $f(x, y, z) = (\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}) \vee (x \cdot \overline{y} \cdot z) \vee (x \cdot y \cdot z)$.

Построим СКНФ. Выпишем наборы, на которых функция равна 0 и составим соответствующие этим наборам элементарные дизъюнкции:

(000): $x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}} = x \vee y \vee z$; (001): $x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{1}} = x \vee y \vee \overline{z}$; (011):

$x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{1}} = x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$; (100): $x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}} = \overline{x} \vee y \vee z$;

(110): $x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{0}} = \overline{x} \vee \overline{y} \vee z$;

СКНФ: $f(x, y, z) = (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)$.

Задачи

1 Какие из следующих выражений являются высказываниями
а) 2 > 4.
б) 1 – x^2 > 0.
в) Москва – столица России.
г) Сегодня шел дождь.
д) Решите эту задачу.
е) 8 – четное число.
ж) Что это?

2 Составить таблицу истинности высказывания $(Y \to X) \oplus (Z \mid \overline{Y})$.

Решение.

X	Y	Z	$\overline{Y}$	$Y \to X$	$Z \mid \overline{Y}$	$(Y \to X) \oplus (Z \mid \overline{Y})$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0

3 Докажите тождественную истинность высказывания $(X \wedge (X \to Y)) \to Y$.
Решение. Составим таблицу истинности:

X	Y	$X \to Y$	$X \wedge (X \to Y)$	$(X \wedge (X \to Y)) \to Y$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Последний столбец таблицы состоит из одних 1, следовательно, высказывание тождественно истинно.

4 Докажите эквивалентность высказываний
$f_1 = (\overline{X} \vee Y) \cdot (X \vee \overline{Y})$ и $f_2 = (X \cdot Y) \vee (\overline{X} \cdot \overline{Y})$.

Решение. Составим таблицу истинности:

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \vee Y$	$X \vee \overline{Y}$	f_1	$X \cdot Y$	$\overline{X} \cdot \overline{Y}$	f_2
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1

Поскольку значения для высказываний f_1 и f_2 в таблице истинности совпали, то f_1 и f_2 эквивалентны.

Учитывая определение эквиваленции, можем записать равносильные формулы

$$X \leftrightarrow Y = (\overline{X} \vee Y) \cdot (X \vee \overline{Y}),\; X \leftrightarrow Y = (X \cdot Y) \vee (\overline{X} \cdot \overline{Y}).$$

5 Для каждого из следующих высказываний определите, будет ли оно тождественно истинным, тождественно ложным или выполнимым: а) $X \wedge \overline{X}$; б) $X \to X$; в) $(X \to Y) \leftrightarrow (\overline{Y} \to (\overline{X} \vee Y))$; г) $(X \to Y) \leftrightarrow (\overline{Y} \to \overline{X})$; д) $(X \to Y) \vee (Y \to X)$; е) $(X \to Y) \to Z$; ж) $(\overline{X \to Y}) \leftrightarrow \overline{X} \vee Y$; з) $(Y \wedge \overline{Z}) \to X$.

6 Докажите эквивалентность высказываний $X \to Y$ и $\overline{Y} \to \overline{X}$.

7 Если X логически истинно, а Y и Z логически ложны, то что можно сказать о высказываниях:

а) $(\overline{X} \wedge Y) \wedge Z$; б) $(X \vee Y) \wedge \overline{Z}$; в) $(X \to Y) \leftrightarrow Z$; г) $\overline{(X \downarrow Y) \oplus Z}$;

д) $(X \to \overline{Y}) | (Z \wedge X)$; е) $(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \downarrow X)$; ж) $(X \cdot Y) \oplus (\overline{X} \cdot \overline{Y})$?

8 Используя таблицу истинности, докажите равносильности

$X \to Y = \overline{X} \vee Y$, $X \vee Y = \overline{\overline{X} \wedge \overline{Y}}$, $X \wedge Y = \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}}$.

9 Докажите тождественную истинность высказывания $X \to (Y \to X)$ с помощью равносильных преобразований.

Решение. Запишем цепочку преобразований:

$$X \to (Y \to X) = X \to (\overline{Y} \vee X) = \overline{X} \vee (\overline{Y} \vee X) = (\overline{X} \vee X) \vee \overline{Y} = 1 \vee \overline{Y} = 1.$$

10 Докажите эквивалентность $(X \to Y) \to X = X$ с помощью равносильных преобразований.

11 Преобразуйте высказывание $(X \to Y) \leftrightarrow Z$ к виду, не содержащему импликацию и эквиваленцию.

12 С помощью равносильных преобразований установить, что
а) $X \,|\, X = \overline{X}$, б) $(X \,|\, X) \,|\, (Y \,|\, Y) = X \vee Y$, в) $(X \,|\, Y) \,|\, (X \,|\, Y) = X \wedge Y$.

13 С помощью равносильных преобразований показать, что

а) $X\downarrow X=\overline{X}$, б) $(X\downarrow X)\downarrow(Y\downarrow Y)=X\wedge Y$, в) $(X\downarrow Y)\downarrow(X\downarrow Y)=X\vee Y$.

14 Определите число различных булевых функций от $n = 3$ переменных.

15 Постройте СДНФ и СКНФ для функций $f_1(x,y,z)=(01100011)$, $f_2(x,y,z)=(10010110)$, $f_3(x,y,z)=(00100110)$, $f_4(x,y,z)=(11010101)$.

16 Постройте КНФ функции $f(x,y,z)=(\overline{x}\vee y)\to\overline{z}$ и докажите тождественную истинность данной функции и найденной КНФ с помощью таблицы.

Решение. Запишем цепочку равносильных преобразований:

$$(\overline{x}\vee y)\to\overline{z}=\begin{bmatrix}\textit{исключим связку}\to\textit{с помощью}\\ \textit{эквивалентности } X\to Y=\overline{X}\vee Y\end{bmatrix}=\overline{(\overline{x}\vee y)}\vee\overline{z}=$$

$$=\begin{bmatrix}\textit{применим закон де Моргана}\\ \overline{X\vee Y}=\overline{X}\wedge\overline{Y}\end{bmatrix}=(\overline{\overline{x}}\wedge\overline{y})\vee\overline{z}=\begin{bmatrix}\textit{применим закон двойного}\\ \textit{отрицания } \overline{\overline{x}}=x\end{bmatrix}=$$

$$=(x\wedge\overline{y})\vee\overline{z}=\begin{bmatrix}\textit{применим дистрибутивный закон}\\ (X\wedge Y)\vee Z=(X\vee Z)\wedge(Y\vee Z)\end{bmatrix}=(x\vee\overline{z})\wedge(\overline{y}\vee\overline{z})\text{ – КНФ.}$$

Докажем тождественную истинность с помощью таблицы:

x	y	z	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{z}$	$\overline{x}\vee y$	$(\overline{x}\vee y)\to\overline{z}$	$x\vee\overline{z}$	$\overline{y}\vee\overline{z}$	$(x\vee\overline{z})\wedge(\overline{y}\vee\overline{z})$
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0

Т.к. двоичные наборы $(\overline{x}\vee y)\to\overline{z}$ и $(x\vee\overline{z})\wedge(\overline{y}\vee\overline{z})$ совпали, то эквивалентность доказана.

17 Приведите к ДНФ функцию $f(x,y,z)=\overline{(y\to x)}\downarrow(z\to y)$.

Решение. Перейдем от операций $\to$ и $\downarrow$ к $\wedge$, $\vee$, $-$:

$$f(x,y,z)=\overline{(y\to x)}\downarrow(z\to y)=\overline{\overline{(\overline{y}\vee x)}\vee(\overline{z}\vee y)}=\overline{\overline{(\overline{y}\vee x)}}\wedge\overline{(\overline{z}\vee y)}=$$

$$=(\overline{y}\vee x)\wedge(\overline{y}\wedge z)=(\overline{y}\wedge\overline{y}\wedge z)\vee(x\wedge\overline{y}\wedge z)=(\overline{y}\wedge z)\vee(x\wedge\overline{y}\wedge z)\text{ – ДНФ.}$$

18 Приведите к ДНФ функцию $f(x,y,z)=(x\leftrightarrow y)\to z$ и с помощью таблицы докажите эквивалентность.

19 Приведите к КНФ функцию $f(x,y,z)=(x \mid y)\leftrightarrow z$. Проверьте эквивалентность с помощью таблицы.

20 Найдите СДНФ для ДНФ $f(x,y,z)=x\cdot y\vee \bar{y}\cdot z\vee \bar{x}\cdot z$.

Решение. Запишем цепочку равносильных преобразований:

$$f(x,y,z)=x\cdot y\vee \bar{y}\cdot z\vee \bar{x}\cdot z = x\cdot y\cdot 1\vee 1\cdot \bar{y}\cdot z\vee \bar{x}\cdot 1\cdot z =$$

$$=x\cdot y\cdot (z\vee \bar{z})\vee (x\vee \bar{x})\cdot \bar{y}\cdot z\vee \bar{x}\cdot (y\vee \bar{y})\cdot z =$$

$$=x\cdot y\cdot z\vee x\cdot y\cdot \bar{z}\vee x\cdot \bar{y}\cdot z\vee \bar{x}\cdot \bar{y}\cdot z\vee \bar{x}\cdot y\cdot z\vee \bar{x}\cdot \bar{y}\cdot z =$$

$$=x\cdot y\cdot z\vee x\cdot y\cdot \bar{z}\vee x\cdot \bar{y}\cdot z\vee \bar{x}\cdot \bar{y}\cdot z\vee \bar{x}\cdot y\cdot z.$$

21 Найдите СДНФ для ДНФ $f(x,y,z)=\bar{x}\cdot \bar{y}\vee y\cdot z\vee x\cdot z$.

Задание 1

Для заданной булевой функции *f (x, y, z):*
1 Построить таблицу истинности.
2 Найти двоичную форму булевой функции.
3 Составить СДНФ функции.
4 Составить СКНФ функции.

№	*f(x, y, z)*	№	*f(x, y, z)*	№	*f(x, y, z)*
1	$(x\to (y\downarrow z))\oplus y$	11	$(x\vee \bar{z})\to (\bar{y}\downarrow z)$	21	$((x\downarrow \bar{y})\leftrightarrow z)\oplus y$
2	$((x \mid z)\to y)\oplus \bar{z}$	12	$(\bar{x}\vee y)\leftrightarrow (z\oplus x)$	22	$(y\vee z)\to (x\leftrightarrow \bar{y})$
3	$((x\downarrow y)\to z)\leftrightarrow y$	13	$(y\vee z)\to (x\leftrightarrow \bar{y})$	23	$(\bar{y}\to z)\leftrightarrow (x\downarrow y)$
4	$((y \mid z)\to \bar{x})\leftrightarrow z$	14	$(x\vee \bar{y})\to (\bar{z} \mid y)$	24	$(\bar{x}\wedge y)\to (\bar{z}\leftrightarrow x)$
5	$((x\downarrow y)\to \bar{z})\oplus x$	15	$(z\to \bar{x})\leftrightarrow (x\downarrow y)$	25	$(x\downarrow \bar{y})\to (y\leftrightarrow \bar{x})$
6	$(y\vee z)\to (x\leftrightarrow \bar{y})$	16	$(x\vee \bar{z})\downarrow (y\vee z)$	26	$(z\to x)\leftrightarrow (y\vee x)$
7	$(x\downarrow y)\oplus (\bar{y}\to z)$	17	$(x\wedge \bar{y})\leftrightarrow (\bar{z}\vee y)$	27	$(x\leftrightarrow \bar{y})\vee (z\to x)$
8	$((x \mid y)\to z)\leftrightarrow y$	18	$(\bar{x}\wedge z)\to (y\leftrightarrow x)$	28	$(x\to y)\wedge (\bar{y}\leftrightarrow z)$
9	$(\bar{x}\vee y)\to (y\leftrightarrow \bar{z})$	19	$(x\downarrow y)\oplus (\bar{y}\leftrightarrow z)$	29	$(x\vee \bar{z})\downarrow (y\to z)$
10	$((x\leftrightarrow \bar{y})\to z)\downarrow y$	20	$(\bar{x}\vee y)\leftrightarrow (z\to x)$	30	$(x\leftrightarrow y)\vee (\bar{z}\to x)$

Пример решения задания 1

1 Построим таблицу истинности булевой функции, заданной формулой

$$f=(\bar{x}\vee z)\leftrightarrow (x\to \bar{y})$$

x	y	z	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \vee z$	$x \to \overline{y}$	$(\overline{x} \vee z) \leftrightarrow (x \to \overline{y})$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0

2 Найдем двоичную форму заданной функции. По последнему столбцу таблицы истинности запишем двоичный набор функции f = 11110110.

3 Составим СДНФ функции. Функция принимает значение 1 на наборах 000, 001, 010, 011, 101, 110. Набору 000 соответствует элементарная конъюнкция $\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$. Набору 001 соответствует элементарная конъюнкция $\overline{x}\,\overline{y}\,z$. И так далее: 010 – $\overline{x}\,y\,\overline{z}$, 011 – $\overline{x}yz$, 101 – $x\overline{y}z$, 110 – $xy\overline{z}$. Получаем СДНФ $f = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z}$.

4 Составим СКНФ функции. Функция принимает значения 0 на наборах 100 и 111. Набору 100 соответствует элементарная дизъюнкция $\overline{x} \vee y \vee z$. Набору 111 соответствует элементарная дизъюнкция $\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$. Запишем СКНФ $f = (\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$.

Задание 2

Для заданной булевой функции *f(x, y, z):*

1 Преобразовать *f(x, y, z)* в СДНФ.

2 Преобразовать *f(x, y, z)* в КНФ.

№	$f(x, y, z)$	№	$f(x, y, z)$	№	$f(x, y, z)$	№	$f(x, y, z)$
1	$\overline{x}y \vee x\overline{z}$	9	$\overline{x}y \vee xy\overline{z} \vee y$	17	$\overline{x}y \vee y\overline{z} \vee xy$	25	$\overline{z} \vee y\overline{z} \vee xy$
2	$xy \vee \overline{y}z \vee \overline{z}$	10	$y \vee x\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}$	18	$x \vee y\overline{z}$	26	$yz \vee x\overline{z} \vee \overline{x}z$
3	$\overline{z} \vee x\overline{z} \vee yz$	11	$\overline{x}y \vee \overline{y}\,\overline{z}$	19	$\overline{x}y \vee \overline{z} \vee x\overline{y}$	27	$\overline{x}y \vee x\overline{y}\,\overline{z}$
4	$\overline{y}z \vee \overline{x}y \vee \overline{z}$	12	$\overline{x}yz \vee \overline{z}$	20	$\overline{x}z \vee y\overline{z}$	28	$\overline{x}y \vee \overline{y}z$
5	$\overline{x}y \vee x\overline{z} \vee z$	13	$\overline{y}z \vee x\overline{z} \vee y$	21	$\overline{z} \vee x\overline{y}$	29	$\overline{y} \vee y\overline{z} \vee x$
6	$\overline{y} \vee \overline{x}z \vee y\overline{z}$	14	$xy\overline{z} \vee y$	22	$\overline{x}y \vee x\overline{z}$	30	$y\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}$
7	$\overline{x} \vee y\overline{z} \vee xz$	15	$\overline{x}y \vee \overline{y}z$	23	$\overline{z} \vee x\overline{y} \vee \overline{x}y$	31	$y\overline{z} \vee x \vee \overline{x}\,\overline{y}$
8	$z \vee y\overline{z} \vee x\overline{y}$	16	$\overline{x}yz \vee \overline{z}$	24	$x\overline{y} \vee \overline{z}$	32	$x\overline{z} \vee y \vee \overline{x}y$

Пример решения задания 2

Выполним задание 2 для функции $f(x,y,z) = x \vee y\bar{z} \vee \bar{x}yz$.

1 Преобразуем данную функцию в СДНФ:

$$f(x,y,z) = x \vee y\bar{z} \vee \bar{x}yz = x \cdot 1 \cdot 1 \vee 1 \cdot \mathrm{y}\bar{\mathrm{z}} \vee \bar{x}yz = x \cdot (y \vee \bar{y}) \cdot (z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x}) \cdot \mathrm{y}\bar{\mathrm{z}} \vee \bar{x}yz =$$

$$= xyz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz = xyz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz.$$

2 Преобразуем данную функцию в КНФ: $f(x,y,z) = x \vee y\bar{z} \vee \bar{x}yz =$

$$=(x \vee y \vee \bar{x})(x \vee \bar{z} \vee \bar{x})(x \vee y \vee y)(x \vee \bar{z} \vee y)(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{z} \vee z) =$$

$$= (1 \vee y)(1 \vee \bar{z})(x \vee \mathrm{y})(x \vee \bar{z} \vee y)(x \vee y \vee z)(x \vee 1) = (x \vee y)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee z).$$

2 МНОЖЕСТВА И ОТНОШЕНИЯ

2.1 Способы задания множеств. Подмножества

Множество – это любая определенная совокупность объектов, которые называются элементами множества.

Будем обозначать множества заглавными буквами *A, B, C*, …, а элементы множеств – строчными буквами *а, в, с,…*. Запись $a \in A$ означает, что элемент *а* принадлежит множеству *A*. Запись $a \notin A$ означает, что *а* не принадлежит множеству *A*.

Если число элементов множества конечно, то множество называется конечным, иначе – бесконечным. Например, множество студентов РГУПС – конечное, множество целых чисел – бесконечное.

Множество, не содержащее элементов, называют пустым и обозначают *Ø*. Например, множество студентов РГУПС, чей рост более 3 м, пусто.

Множество можно задать перечислением всех его элементов. Например, {1, 2, 3, …} – множество натуральных чисел. Для конечного множества используют запись $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. При этом порядок перечисления элементов не имеет значения и избегают повторения элементов.

В общем случае множества задают путем указания характеристического свойства, которому удовлетворяют элементы множества: $A = \{a \mid S(a)\}$. Читается – множество элементов *a*, таких, что *S(a)* – истинное высказывание.

Например, $A = \{a \mid 0 \le a \le 1\}$ – множество действительных чисел, принадлежащих отрезку [0; 1], $D = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1, x,y \in R\right\}$ – множество точек круга единичного радиуса с центром в начале координат.

Два множества *A* и *B* называются равными ($A = B$), если они составлены из одних и тех же элементов.

Пример 1. Пусть *A* = {2, 3, 4}, *B* = {4, 3, 2}, тогда *A* = *B* т. к. порядок перечисления элементов не имеет значения.

Пример 2. *Ø* ≠ {*Ø*}, т.к. *Ø* – пустое множество, не содержащее элементов, а {*Ø*} – множество, содержащее единственный элемент – пустое множество.

Пример 3. $\{\{a,\ b\},\{b,\ c\}\} \neq \{a,\ b,\ c\}$, т.к. множество слева от знака «≠» – это множество, содержащее два элемента: множества $\{a,\ b\}$ и $\{b,\ c\}$. Множество справа содержит три элемента: $a,\ b,\ c$.

Говорят, множество A включено в множество B или A является подмножеством B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. И пишут $A \subseteq B$. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то пишут $A \subset B$ (B строго включает A). Полагают, что $\varnothing \subseteq A$ для всякого множества A.

Множество всех подмножеств множества A называется **булеаном** и обозначается 2^A: $2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$.

Пример. Пусть $A = \{\ a,\ b,\ c\ \}$, тогда $2^A = \{\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\},\ \{a,\ b,\ c\}\}$.

Пусть $B = \varnothing$, тогда $2^B = \{\varnothing\}$.

Мощностью конечного множества A называют число его элементов и обозначают $|A|$. Если $|A| = n$, то $|2^A| = 2^n$. Например, $|\varnothing| = 0$, $|\{\varnothing\}| = 1$, $|\{a\}| = 1$, $|\{a,\ \{a\},\ b,\ \{a,\ b\}\}| = 4$.

В конкретных рассуждениях элементы всех множеств берутся из некоторого одного, своего для каждого случая, множества U, называемого **универсальным множеством** или универсумом. Множество U должно быть задано либо очевидно из контекста.

2.2 Операции над множествами

Объединением множеств A и B называется множество

$$\grave{A}\cup\hat{A}=\{x \mid\ x\in A \text{ èëè } x\in B\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество

$$\grave{A}\cap\hat{A}=\{\ x \mid\ x\in A \text{ è } x\in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество

$$\grave{A}\setminus\hat{A}=\{x \mid\ x\in A \text{ è } x\notin B\}.$$

Симметрической разностью множеств A и B называется множество

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$

Дополнением множества A до универсального множества U называется множество

$$\overline{A}=U\setminus A=\{\ x \mid\ x\notin A\ \}.$$

С помощью введенных операций можно выражать одни множества через другие. Если скобки в выражении опущены, то операции выполняют в следующем порядке: дополнение, пересечение, объединение (разность).

Для наглядности операции изображают на диаграмме, называемой диаграммой Эйлера – Венна. Прямоугольник обозначает универсальное множество U, а овалы внутри прямоугольника – подмножества. На рис. 2.1 – 2.5 приведены диаграммы, выражающие основные операции над множествами.

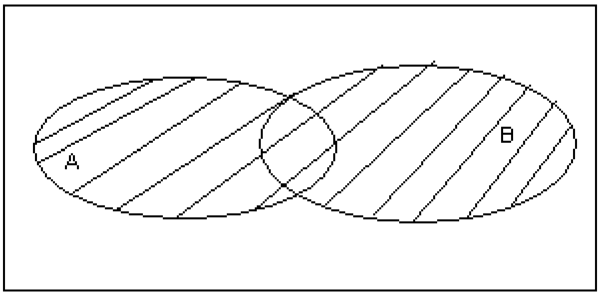


Рис. 2.1 $A \cup B$

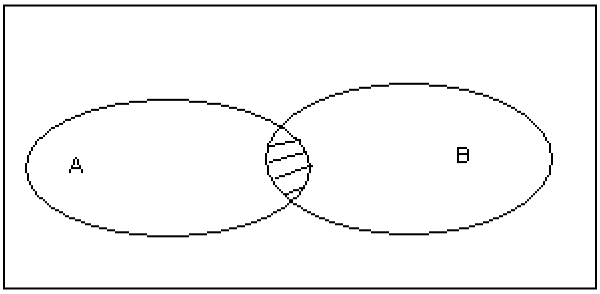


Рис. 2.2 $A \cap B$

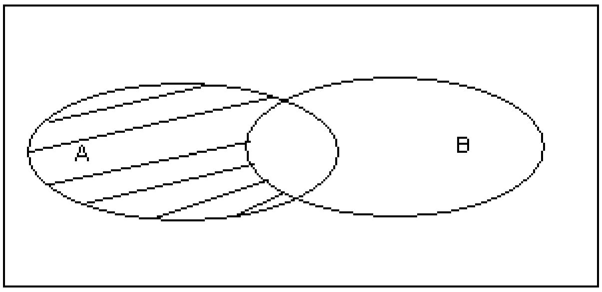


Рис. 2.3 $A \setminus B$

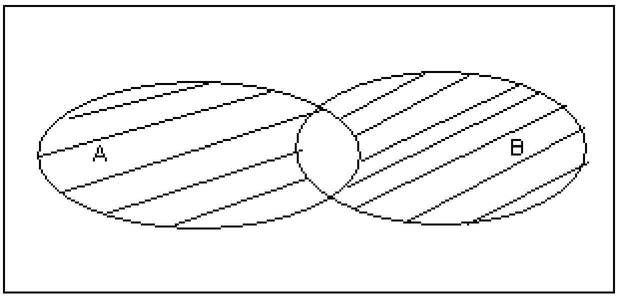


Рис. 2.4 $A \Delta B$

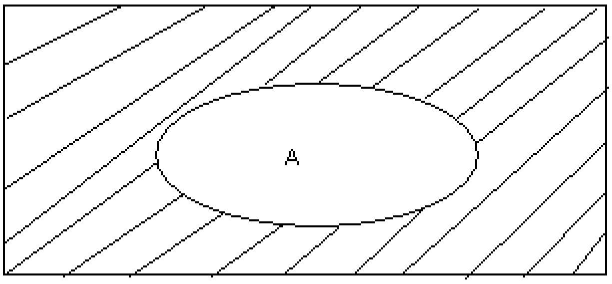


Рис. 2.5 $\overline{A}$ – заштриховано.

2.3 Свойства операций над множествами

Для любых $A, B, C \subseteq U$ справедливы соотношения:

1 Идемпотентность: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.

2 Коммутативность: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

3 Ассоциативность: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

4 Дистрибутивность:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

5 Законы поглощения: $(A \cup B) \cap A = A$; $(A \cap B) \cup A = A$.

6 Свойства нуля: $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$; $\overline{\varnothing} = U$.

7 Свойства единицы: $A \cup U = U$; $A \cap U = A$; $\overline{U} = \varnothing$.

8 Двойное дополнение: $\overline{\overline{A}} = A$.

9 Законы де Моргана: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

10 Свойства дополнения: $A \cup \overline{A} = U$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

2.4 Связь между множествами и высказываниями

Пусть *X*, *Y*, … некоторые высказывания, *U* – множество их логических возможностей; *A*, *B*, … подмножества *U*, для которых истинны соответствующие высказывания *X*, *Y*, …. Тогда *A*, *B*, … называют множествами истинности высказываний *X*, *Y*, ….

Каждой логической связке соответствует операция над множествами: отрицанию – дополнение, конъюнкции – пересечение, дизъюнкции – объединение.

Множествами истинности высказываний $\overline{X}$, $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $X \to Y$ являются соответственно $\overline{A}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A \setminus B}$.

Если высказывание *X* логически истинно, то $A = U$, если логически ложно, то $A = \varnothing$. Два высказывания *X* и *Y* эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же множества истинности ($A = B$).

Свойства множеств напоминают законы логики высказываний. Это обстоятельство нашло свое воплощение в общей теории, известной как булева алгебра.

Множество, его подмножества и законы сочетания подмножеств образуют алгебраическую систему, называемую булевой алгеброй.

Система составных высказываний, подчиняющаяся перечисленным выше законам, тоже является булевой алгеброй.

2.5 Декартово произведение множеств

Пусть даны множества $A_1, A_2, ..., A_n$. Кортежем длины *n* называют упорядоченный набор из *n* элементов ($a_1,\ a_2,...,\ a_n$), где $a_1 \in A_1,\ \ldots,\ a_n \in A_n$.

Декартовым (прямым) произведением множеств $A_1,...,A_n$ называется множество $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n)|\ a_1 \in A_1, ..., a_n \in A_n\}$.

Мощность декартова произведения находится по формуле: $|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... |A_n|$.

Декартовой *n*-й степенью множества *A* называется $\underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n-раз} = A^n$.

Пример. Пусть *A* = {1, 2}, *B* = {*a, в, c*},

тогда $A \times B =$ {(1, *a*), (1, *в*), (1, *c*), (2, *a*), (2, *в*), (2, *c*)};

$B \times A =$ {(*a*, 1), (*в*, 1), (*c*, 1), (*a*, 2), (*в*, 2), (*c*, 2)};

$A^2 = A \times A =$ {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)};

$B^2 = B \times B =$ {(*a*, *a*), (*a*, *в*), (*a*, *c*), (*в*, *a*), (*в*, *в*), (*в, c*), (*c*, *a*), (*c*, *в*), (*c, c*)};

$A \times B \times A =$ {(1, *a*, 1), (1, *в*, 1), (1, *c*, 1), (1, *a*, 2), (1, *в*, 2), (1, *c*, 2), (2, *a*, 1), (2, *в*, 1), (2, *c*, 1), (2, *a*, 2), (2, *в*, 2), (2, *c*, 2)}.

2.6 Бинарные отношения

Пусть *A* и *B* – два множества. **(Бинарным) отношением** из множества *A* во множество *B* называется любое подмножество $\Re$ множества $A \times B$: $\Re \subseteq A \times B$.

Если $(a,b) \in \Re$, то пишут $a\Re b$ и говорят, что *a* и *b* находятся в отношении $\Re$. Если *A*=*B*, то говорят, что $\Re$ – отношение на множестве *A*. Например, хорошо известны отношения, определяемые на множестве действительных чисел: $<, \leq, =, \geq, >, \neq$.

Пример 1.

Найдем элементы бинарного отношения $\Re = \{(a,b)|\ b \text{ делится на } a\}$ из множества *A* = {2, 7} во множество *B* = {1, 4, 6}. Декартово произведение $A \times B =$ {(2, 1), (2, 4), (2, 6), (7, 1),(7, 4), (7, 6)}. Оставим в декартовом произведении те пары, у которых второе число делится на первое, и получим $\Re$ = {(2, 4), (2, 6)}.

$A \times B$ – универсум *U*, и любое его подмножество есть отношение из *A* в *B*. Запишем несколько бинарных отношений $\Re_1 = \{(2, 1), (2, 4), (2, 6)\}$, $\Re_2 = \{(7, 4), (7, 6)\}$, $\Re_3 = \varnothing$, $\Re_4 = A \times B$.

На конечных множествах бинарное отношение удобно задавать матрицей. Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, $\Re \subseteq A \times B$.

Матрицей $P = (p_{ij})$ бинарного отношения $\Re$ называется матрица размера $m \times n$, элементы которой определяются так:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ } если \text{ } (a_i, b_j) \in \Re, \\ 0, \text{ } если \text{ } (a_i, b_j) \notin \Re. \end{cases}$$

Пример 2. Матрица отношения $\Re$ из предыдущего примера имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно по матрице отношения определить элементы отношения.

Пример 3. Из множества *A* = {2, 3, 4} во множество *B* = {*a*, *b*} задано отношение с помощью матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем элементы этого отношения.

Перепишем матрицу отношения в виде $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$. Запишем пары, которым в матрице отношения соответствуют единицы: $\Re = \{(2, a), (3, b), (4, b)\}$.

Областью определения $\Re_A$ бинарного отношения $\Re$ называется подмножество множества *A*, такое, что $\Re_{\grave{A}} = \{ \grave{a} \in \grave{A} \mid (\exists b \in \hat{A}) : (a,b) \in \Re \}$.

Областью значений $\Re_B$ бинарного отношения $\Re$ называется подмножество множества *B*, такое, что $\Re_{\hat{A}} = \{ b \in B \mid (\exists a \in A) : (a,b) \in \Re \}$.

В примере 1 область определения бинарного отношения $\Re_{\grave{A}} = \{ 2 \}$, область значений $\Re_{\hat{A}} = \{ 4,6 \}$.

Отношением $\Re^{-1}$, обратным к отношению $\Re$, называется подмножество декартового произведения *B*×*A*, такое, что $\Re^{-1} = \{(b,\ a) \mid (a,\ b) \in \Re\}$. Матрица обратного отношения получается транспонированием матрицы отношения $\Re$.

Пусть $\Re$ – бинарное отношение на множестве *A*, т.е. $\Re \subseteq A \times A$.

Отношение $\Re$ называется:

рефлексивным, если $(\forall a \in A) : (a,a) \in \Re$;

антирефлексивным, если $(\forall a \in A) : (a,a) \notin \Re$;

симметричным, если $(\forall a,b \in A, a \neq b) : (a,b) \in \Re \Rightarrow (b,a) \in \Re$;

антисимметричным, если $(\forall a,b \in A) : ((a,b) \in \Re, (b,a) \in \Re) \Rightarrow a = b$;

транзитивным, если $(\forall a,b,c \in A) : ((a,b) \in \Re, (b,c) \in \Re) \Rightarrow (a,c) \in \Re$.

Отношение $\Re$ называется **отношением эквивалентности**, если оно рефлексивно, симметрично, транзитивно.

Замечание. Матрица рефлексивного бинарного отношения содержит на главной диагонали только единицы. Матрица антирефлексивного бинарного отношения содержит на главной диагонали только нули. Матрица симметричного бинарного отношения не меняется при транспонировании.

Примеры:

1 На множестве всех прямых евклидовой плоскости отношение параллельности – рефлексивное отношение, т.к. каждая прямая параллельна себе.
2 На множестве всех прямых евклидовой плоскости отношение перпендикулярности – антирефлексивное отношение, т.к. никакая прямая не перпендикулярна самой себе.
3 Отношение «обучаться на одном факультете», заданное на множестве всех студентов некоторого вуза – симметричное отношение: если a обучается на одном факультете с b, то b обучается на одном факультете с a.
4 Отношение «больше», заданное на множестве действительных чисел – антисимметричное отношение, т.к. если $a > b$, то $b < a$.
5 Отношение «меньше», заданное на множестве действительных чисел – транзитивное отношение, т.к. если $a < b$ и $b < c$ то $a < c$.
6 Отношение параллельности, определенное на множестве прямых евклидовой плоскости, является отношение эквивалентности.

2.7 Функции

Функцией называется бинарное отношение $f \subseteq X \times Y$, обладающее свойством однозначности: если $(x,y_1) \in f$ и $(x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$.

Обозначение функции $f: X \to Y$ или $y = f(x)$. Говорят, что функция f отображает множество X во множество Y; x – аргумент функции или прообраз элемента Y; Y – значение функции или образ элемента x.

Аргументы функции – элементы произвольной природы. В частности может быть $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. В таком случае функцию f называют функцией n переменных и пишут: $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Функцию двух переменных $f: X^2 \to X$ называют бинарной операцией.

Область определения f_x и область значений f_y задаются так же, как для бинарных отношений.

Если $f_x = X$, то функция называется **тотальной**, в противном случае называется частично определенной. Если $f_y = Y$, то функция f называется **сюръективной** или сюръекцией.

Обратное бинарное отношение f^{-1}, не обязательно является функцией, т.к. условие однозначности может быть нарушено.

Пример. Определить, какие из бинарных отношений являются функциями.

1 {(1, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 5)}. В это отношение входят две разные упорядоченные пары с одинаковым первым элементом, т.е. нарушено условие однозначности. Данное отношение не функция.

2 {(1, 2), (2, 3), (3, 3)} – это функция с областью определения f_x={1, 2, 3} и множеством значений f_y = {2, 3}.

3 $\left\{(x,y) \mid y = x^2, x, y \in R\right\}$ – это функция, т. к. для любого x y определяется единственным образом.

4 $\left\{(x,y) \mid x = y^2, x, y \in R\right\}$ –это отношение не является функцией, т.к. входят, например, пары (1, 1), (1, -1).

Функция $f: X \to Y$ называется **инъекцией,** или инъективной, если $(x_1, y) \in f$ и $(x_2, y) \in f \Rightarrow x_1 = x_2$.

Функция $f: X \to Y$ одновременно инъективная и сюръективная называется **биективной**, или биекцией. Биекция – взаимно однозначное соответствие между областью определения и множеством *Y*.

Проиллюстрируем различные виды функций рис. 2.6–2.9.

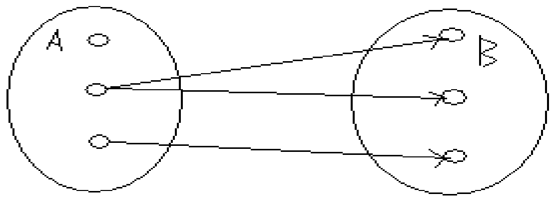


Рис. 2.6. Отношение, но не функция

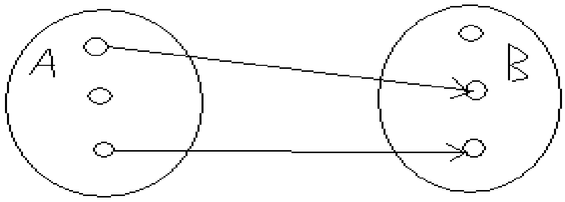


Рис. 2.7. Инъекция, но не сюрьекция

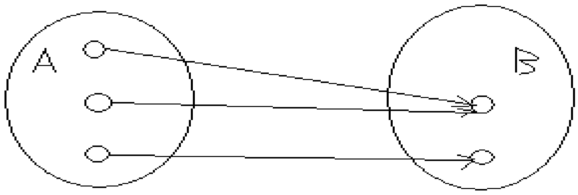


Рис. 2.8. Сюрьекция, но не инъекция

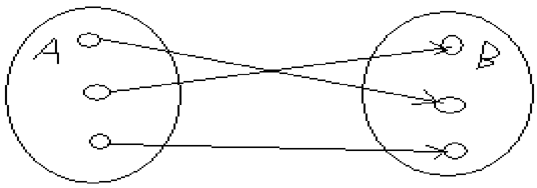


Рис. 2.9. Тотальная биекция

Пусть $A \subseteq X$, тогда множество $f(A)=\{\, y \in Y \mid \exists x \in A,\, y=f(x) \,\}$ называется образом множества *A*.

Пусть $B \subseteq Y$, тогда множество $f^{-1}(B)=\{\, x \in X \mid \exists y \in B,\, y=f(x) \,\}$ называется прообразом множества *B*.

Пример: Пусть $y=x^2$. Найти образы множеств [0; 2], [-1; 1), (-2; 1], (-2;0) $\cup$ (1,5; 3). Найти прообразы множеств [0; 1], [4; 9], [0,04; 0,36].

Решение:

f ([0; 2]) = [0; 4]; *f* ([-1; 1)) = [0; 1]; *f* ((-2; 1]) = [0; 4); *f* ((-2;0) $\cup$ (1,5; 3)) = (0; 9).

f^{-1}([0; 1]) = [-1; 1]; f^{-1}([4; 9]) = [-3; -2]$\cup$[2; 3]; f^{-1}([0,04;0,36]) = [-0,6; -0,2]$\cup$[0,2; 0,6].

Задачи:

1 Какое из соотношений: $A \subset B,\, B \subset A,\, A=B$ имеет место для следующих пар множеств: *а*) *A* = {1, 2, 3}, *B* = {3, 2, 1}; *б*) *A* = {*a*, *b*, *d*}, *B* = {*a*, *b*, *c*, *d*}; *в*) *A* = {1, 2, 3, 4}, *B* = {1, 2, 3}; *г*) *A* = Ø , *B* = {1, 2}; *д*) $A=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$, *B* = {2, 3}?

2 Пусть *U* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, *A* = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, B = {3, 6, 9, 10}. Определить $A \cup B,\, A \cap B,\, A \setminus B,\, B \setminus A,\, A \Delta B,\, \overline{A},\, \overline{B}$.

3 Даны множества *A* = {-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}, *B* = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, *C* = {4, 5, 6, 7, 8, 9}, *D* = {2, 4, 6, 8}. Задайте списками множества: *а*) $A \cup B \cup C \cup D$, *б*) $A \cap B \cap C \cap D$, *в*) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$, *г*) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$, *д*) $A \,\Delta\, B$.

4 Пусть *A* = {1, 2, 3}. Запишите булеан множества *A*.

5 Докажите закон де Моргана: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Доказательство. Множества $\overline{A \cap B}$ и $\overline{A} \cup \overline{B}$ равны, если они состоят из одних и тех же элементов, т.е. если $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ и $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$. Пусть

$$x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x \notin A \Rightarrow x \in \overline{A} \Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B} \\ \textit{или} \\ x \notin B \Rightarrow x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$ Т.е. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

Пусть $$x \in \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x \in \overline{A} \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \notin A \cap B \\ \textit{или} \\ x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in \overline{A \cap B}.$$ Т.е. $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$,

следовательно $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

6 Докажите закон де Моргана: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

7 Каждому множеству поставьте в соответствие высказывание, имеющее это множество своим множеством истинности, и с помощью таблиц истинности укажите, какие из этих множеств пусты: *а*) $(A \cap B) \cap (\overline{B} \cap C)$; *б*) $(A \cup B) \cap (\overline{A \cup B})$; *в*) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$; *г*) $(A \cap B) \setminus A$; *д*) $(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$.

Решение: *а*) Множеству $(A \cap B) \cap (\overline{B} \cap C)$ соответствует высказывание $(X \wedge Y) \wedge (\overline{Y} \wedge Z)$, имеющее это множество своим множеством истинности.

Составим таблицу истинности:

X	Y	Z	$\overline{Y}$	$X \wedge Y$	$\overline{Y} \wedge Z$	$(X \wedge Y) \wedge (\overline{Y} \wedge Z)$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

Т.к. высказывание логически ложно, то его множество истинности пусто.

8 С помощью диаграмм Эйлера – Венна проверьте справедливость следующих равенств: *а*) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$; *б*) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;

в) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$; *г*) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

9 Докажите эквивалентность высказываний: а) $X \vee (Y \wedge Z)$ и $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$; б) $X \wedge (Y \vee Z)$ и $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$ с помощью таблиц истинности и с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

10 Проверьте все свойства операций над множествами с помощью диаграмм Эйлера – Венна. Переведите эти свойства в законы для составных высказываний, и проверьте их с помощью таблиц истинности.

11 Из множеств A_1 =$\{1, 2, 3\}$, A_2 = $\{a, b\}$ составьте кортежи.

Решение: Из данных множеств можно составить 6 кортежей длины 2: (1, *a*), (1, *b*), (2, *a*), (2, *b*), (3, *a*), (3, *b*).

12 Пусть $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2\}$. Выписать все элементы декартова произведения $A \times B$, $B \times A$.

Решение: $A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2), (z, 1), (z, 2)\}$, $B \times A = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}$.

13 Пусть $A = \{a, b\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Выписать все элементы декартовых произведений: $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$, . $A \times B \times A$.

14 Пусть $A = \{2, 3, 4\}$. Определите $A \times A$. Укажите элементы бинарного отношения $\Re = \{(a,b) \mid a < b,\ a,\ b \in A\}$.

Решение.

$A \times A = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.

Оставляем в декартовом произведении только те пары, у которых первое число меньше второго. Тогда $\Re = \{(2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

15 Пусть $A = \{1, 2, 7\}$, $B = \{2, 6\}$. Укажите элементы отношения $\Re = \{(a,b) \mid b \text{ делится на } a,\ a \in A, b \in B\}$. Определите матрицу отношения.

16 На множестве натуральных чисел задано бинарное отношение $\Re = \{(a,b) \mid a + b < 5,\ a,\ b \in N\}$. Укажите элементы отношения.

17 $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{2, 7\}$. С помощью матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ задано бинарное отношение из A в B. Укажите элементы этого отношения.

18 Определить обратное отношение в задаче 15. Запишите матрицу обратного отношения.

Решение. $\Re = \{(1,\ 2),\ (1,\ 6),\ (2,\ 2),\ (2,\ 6)\}$. Меняем местами элементы в упорядоченных парах множества $\Re$. Получим обратное отношение $\Re^{-1} = \{(2,\ 1),$ $(6,\ 1),\ (2,\ 2),\ (6,\ 2)\}$.

Матрица обратного отношения получается транспонированием матрицы отношения $\Re$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

19 Определите обратное отношение в задаче 14. Запишите матрицу обратного отношения.

20 На множестве $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ задано бинарное отношение $\Re = \{(1,1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3)\}$. Определить, является ли отношение рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным.

Решение: Т. к. элементы (1, 1), (2, 2), (3, 3) принадлежат $\Re$, то отношение рефлексивно. В силу рефлексивности $\Re$ не антирефлексивно.

Т.к. обратное отношение $\Re^{-1}$ совпадает с отношением $\Re$, то $\Re$ является симметричным отношением. В силу симметричности отношение $\Re$ не антисимметрично.

Для всех $a,\ b,\ c \in A$ из одновременного выполнения условий $(a,\ b) \in \Re$ и $(b,\ c) \in \Re$ следует, что $(a,\ c) \in \Re$. Следовательно, отношение $\Re$ транзитивно.

Отношение $\Re$ рефлексивно, симметрично, транзитивно, следовательно, $\Re$ – отношение эквивалентности.

21 Определить, является ли отношение $\Re = \left\{ (x, y) \middle| \ 2x^2 + y^2 = 4,\ x,\ y \in R \right\}$ рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным.

22 На множестве действительных чисел задано отношение $\Re = \left\{ (a,b) \middle| \ a < b,\ a,\ b \in R \right\}$. Определить является ли отношение рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным.

23 На множестве прямых евклидовой плоскости задано отношение $\Re = \left\{ (a,b) \middle| \ a \perp b \right\}$. Определить является ли отношение рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным.

24 Являются ли следующие отношения функциями: *а*) {(1, 1), (1, 2), (2, 3)}; *б*) {(1, 2), (2, 3), (4, 5)}; *в*) $\left\{ (x, y) \middle| \ y = x^2 - 2x + 3,\ x \in R \right\}$; *г*) $\left\{ (x, y) \middle| \ x = y^2 + 1,\ x \in R \right\}$.

25 Является ли отношение $\{(1,\ b_1),\ (2,\ b_3),\ (3,\ b_3)\}$, определяемое на декартовом произведении множеств $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ и $B = \{ b_1, b_2, b_3 \}$, функцией? Если да, то является ли данная функция сюръекцией, инъекцией?

Решение. Т.к. каждому элементу множества A соответствует единственный элемент множества B, то данное отношение является функцией.

Поскольку элемент b_3 имеет два прообраза 2 и 3, то функция не является инъекцией. Элемент b_2 не входит ни в одну пару, следовательно, функция не является сюръекцией.

26 Какая из указанных функций f : [0; 1]→[0; 2] *а*) $y = 2x^2$; *б*) $y = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$; *в*) $y = x^2 + 1$; *г*) $y = 2^x$; *д*) $y = 2\cos\frac{\pi x}{2}$; *е*) $y = 2\sin(\pi x)$ инъективна, сюръективна, биективна?

27 Пусть $y = 4 - x^2$. Найти образы множеств [0; 1], [1; 2), (-2; 2], (-2;-0,5)$\cup$(0;1). Найти прообразы множеств [0;3], [3; 4].

28 $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, $\varphi(x) = x^3 + 1$. Запишите композиции функций $f(g(x))$, $g(f(x))$, $\varphi(g(x))$, $g(\varphi(x))$, $f(g(\varphi(x)))$, $g(f(\varphi(x)))$.

Задание 3

Дано универсальное множество U = {-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6}, числовой промежуток X и уравнение.

1 Найти A – множество целых чисел, принадлежащих заданному промежутку и B – множество корней заданного уравнения.

2 Найти множества: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$.

3 Найти 2^A – множество всех подмножеств множества A и его мощность.

№	X	уравнение	№	X	уравнение
1	[-3; 0)	$(x+1)^2(x^2-4x)=0$	2	[-2; 0)	$(x^2+x)(x-5)=0$
3	(-2; 1]	$(x-1)^2(x^2-3x)=0$	4	[-1, ; 2)	$(x+2)(x^2-4x+3)=0$
5	(-1; 2]	$x^3(x^2-8x+12)=0$	6	(0; 3]	$(x-2)(x^2-1)=0$
7	[0; 2]	$x(x^2+2x-3)=0$	8	(1; 4]	$(x^2-x)(x-2)=0$
9	[1; 3]	$(x-2)(x^2-9x+18)=0$	10	[2; 4]	$(x^2-4)(x-4)=0$
11	(2; 5]	$(x+2)(x^2-9x+20)=0$	12	[0; 2)	$(x+1)(x^2-x)=0$
13	(3; 6]	$(x+1)(x^2-11x+30)=0$	14	(-1; 3)	$(x-1)(x^2-3x)=0$
15	[3; 5]	$(x^2-9)(x-5)=0$	16	[1; 4)	$x(x^2-4x+3)=0$
17	[4; 6]	$(x^2-1)(x-5)=0$	18	(0; 4)	$(x-2)(x^2-9x+18)=0$
19	[3; 6)	$(x^2-4)(x-4)=0$	20	(1; 5)	$(x^2-9)(x-4)=0$
21	(-3; 0]	$(x+2)(x^2-4x)=0$	22	[2; 5)	$(x^2-4)(x-3)=0$
23	(-2; 1]	$(x-2)(x^2-x)=0$	24	[3; 6)	$(x-5)(x^2-x)=0$
25	[-2; 1)	$x(x^2-8x+12)=0$	26	(2; 6)	$(x+1)(x^2-9x+20)=0$
27	(-1; 2]	$(x-2)(x^2-1)=0$	28	(3; 6)	$(x-4)(x^2-11x+30)=0$
29	[-1; 2)	$(x^2-x)(x-3)=0$	30	(3; 6]	$(x-2)(x^2-16)=0$

Пример решения задания 3

Выполним задание, если A – множество целых чисел, принадлежащих промежутку (-2; 2) и B – множество корней уравнения $x^3 + x^2 - 2x = 0$

1 Найдем множество A = {-1; 0; 1}. Для нахождения множества B разложим левую часть уравнения на множители $x(x+2)(x-1) = 0$, имеем B = {-2; 0; 1}.

2 $A \cup B$ = {-1; 0; 1} ∪ {-2; 0; 1} = {-2; -1; 0; 1};

$A \cap B$ = {-1; 0; 1} ∩ {-2; 0; 1} = {0; 1};

$A \setminus B$ = {-1; 0; 1} \ {-2; 0; 1} = {-1};

$B \setminus A$ = {-2; 0; 1} \ {-1; 0; 1} = {-2};

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ = {-1} ∪ {-2} = {-2; -1};

$\overline{A} = U \setminus A$ = {-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6} \ {-1; 0; 1} = {-3; -2; 2; 3; 4; 5; 6}.

$\overline{B} = U \setminus B$ = {-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6} \ {-2; 0; 1} = {-3; -1; 2; 3; 4; 5; 6}.

3 2^A = { Ø, {-1}, {0}, {1}, {-1; 0}, {-1; 1}, {0; 1}, {-1; 0; 1}}. Множество 2^A содержит 8 элементов, $|2^A| = 8$.

Задание 4

Даны множества точек плоскости *A, B, C*. Изобразите на плоскости в системе координат *XOY* множество *D*, полученное из множеств *A, B,* и *C.*

Вариант	Множества *A, B, C, D*	Вариант	Множества *A, B, C, D*
1	$A=\{(x,y) \mid x^2+y^2-4y \le 0\}$ $B=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4\}$ $C=\{(x,y) \mid \lvert x\rvert \le 2, 0 \le y \le 1\}$ $D=(A \cap B) \setminus C$	16	$A=\{(x,y) \mid x^2+y^2+8y \le 0\}$ $B=\{(x,y) \mid x^2+y^2 - 8x \le 0\}$ $C=\{(x,y) \mid 0 \le x \le 4, \lvert y\rvert \le 4\}$ $D=C \setminus (A \cup B)$
2	$A=\{(x,y) \mid xy \ge 2\}$ $B=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4\}$ $C=\{(x,y) \mid \lvert x\rvert \le 2, \lvert y\rvert \le 2\}$ $D=(A \cap C) \cup B$	17	$A=\{(x,y) \mid xy \le 1\}$ $B=\{(x,y) \mid xy \ge -1\}$ $C=\{(x,y) \mid 0 \le x \le 3, \lvert y\rvert \le 2\}$ $D=C \mid (A \cap B)$
3	$A=\{(x,y) \mid x+y \le 2\}$ $B=\{(x,y) \mid \lvert x\rvert \le 2, \lvert y\rvert \le 2\}$ $C=\{(x,y) \mid 2x^2+y \le 0\}$ $D=(A \cap B) \setminus C$	18	$A=\{(x,y) \mid \lvert x\rvert \le 1, \lvert y\rvert \le 4\}$ $B=\{(x,y) \mid x \ge 0\}$ $C=\{(x,y) \mid x^2+y^2-2x \le 0\}$ $D=(A \cap B) \setminus C$

4	$A=\{(x,y) \mid x^2+y^2+6y\le 0\}$ $B=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 9\}$ $C=\{(x,y) \mid \lvert x\rvert\le 3,\ -3\le y\le 0\}$ $D=(A\cup B)\setminus C$	19	$A=\{(x,y) \mid x^2+y^2-10y\le 0\}$ $B=\{(x,y) \mid x^2+y^2-10x\le 0\}$ $C=\{(x,y) \mid 0\le x\le 5,\ \lvert y\rvert\le 5\}$ $D=C\setminus(A\cap B)$
5	$A=\{(x,y) \mid xy\ge 4\}$ $B=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 16\}$ $C=\{(x,y) \mid \lvert x\rvert\le 4, \lvert y\rvert\le 4\}$ $D=C\setminus(A\cap B)$	20	$A=\{(x,y) \mid xy\ge 1\}$ $B=\{(x,y) \mid \lvert x\rvert\le 4, \lvert y\rvert\le 4\}$ $C=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 16\}$ $D=(B\setminus A)\cap C$
6	$A=\{(x,y) \mid y\ge \lvert x\rvert\}$ $B=\{(x,y) \mid x^2+y\le 2\}$ $C=\{(x,y) \mid \lvert x\rvert\le 1, \lvert y\rvert\le 1\}$ $D=(A\cap B)\cup C$	21	$A=\{(x,y) \mid 0\le x\le 3\}$ $B=\{(x,y) \mid -4\le y\le 0\}$ $C=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 9\}$ $D=A\cap B\cap C$
7	$A=\{(x,y) \mid x^2+y^2-4x\le 0\}$ $B=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 4\}$ $C=\{(x,y) \mid 0\le x\le 2,\ -2\le y\le 0\}$ $D=(A\cap B)\setminus C$	22	$A=\{(x,y) \mid x^2+y^2+2y\le 0\}$ $B=\{(x,y) \mid x^2+y^2+2x\le 0\}$ $C=\{(x,y) \mid -1\le x\le 0,\ -1\le y\le 0\}$ $D=C\setminus(A\cap B)$
8	$A=\{(x,y) \mid xy\ge 1\}$ $B=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 9\}$ $C=\{(x,y) \mid \lvert x\rvert\le 3, \lvert y\rvert\le 4\}$ $D=(A\cap C)\cup B$	23	$A=\{(x,y) \mid y\ge 0\}$ $B=\{(x,y) \mid x^2+y^2\ge 1\}$ $C=\{(x,y) \mid 0\le y\le 2,\ \lvert x\rvert\le 2\}$ $D=A\cap B\cap C$
9	$A=\{(x,y) \mid y\le -x^2+8\}$ $B=\{(x,y) \mid y\ge x^2\}$ $C=\{(x,y) \mid 0\le y\le 8,\ \lvert x\rvert\le 2\}$ $D=C\setminus(A\cap B)$	24	$A=\{(x,y) \mid x+y\ge 0\}$ $B=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 4\}$ $C=\{(x,y) \mid 0\le x\le 2,\ \lvert y\rvert\le 2\}$ $D=C\setminus(A\cap B)$
10	$A=\{(x,y) \mid x^2+y^2+6x\le 0\}$ $B=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 9\}$ $C=\{(x,y) \mid -3\le x\le 0,\ \lvert y\rvert\le 3\}$ $D=(A\cup B)\setminus C$	25	$A=\{(x,y) \mid y-x^2\ge 0\}$ $B=\{(x,y) \mid y-x\le 0\}$ $C=\{(x,y) \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ $D=C\setminus(A\cap B)$
11	$A=\{(x,y) \mid xy\ge 1\}$ $B=\{(x,y) \mid xy\le -1\}$ $C=\{(x,y) \mid \lvert x\rvert\le 4, \lvert y\rvert\le 5\}$ $D=(A\cup B)\cap C$	26	$A=\{(x,y) \mid x+y+1\ge 0\}$ $B=\{(x,y) \mid x\le 0,\ \ y\le 0\}$ $C=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 1\}$ $D=C\setminus(A\cap B)$
12	$A=\{(x,y) \mid y^2-x\le 0\}$ $B=\{(x,y) \mid 0\le x\le 2,\ \lvert y\rvert\le 2\}$ $C=\{(x,y) \mid x+y\ge 0\}$	27	$A=\{(x,y) \mid x\ge 0,\ \ y\ge 0\}$ $B=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 4\}$ $C=\{(x,y) \mid x+y\ge 2\}$

	$D=(B\setminus A)\cap C$		$D=A\cap B\cap C$
13	$A=\{(x,y)\mid\ x^2+y^2-4y\le 0\}$ $B=\{(x,y)\mid\ x^2+y^2-4x\le 0\}$ $C=\{(x,y)\mid\ 0\le x\le 2,\ \lvert y\rvert\le 2\}$ $D=C\setminus(A\cap B)$	28	$A=\{(x,y)\mid\ x^2+y^2\ge 1\}$ $B=\{(x,y)\mid\ x^2+y^2\le 4\}$ $C=\{(x,y)\mid\ x+y\ge 0\}$ $D=(A\cap B)\mid C$
14	$A=\{(x,y)\mid\ xy\le 1\}$ $B=\{(x,y)\mid\ xy\ge -1\}$ $C=\{(x,y)\mid\ 0\le x\le 4,\ \lvert y\rvert\le 6\}$ $D=C\setminus(A\cap B)$	29	$A=\{(x,y)\mid\ x^2+y^2-2x\ge 0\}$ $B=\{(x,y)\mid\ x^2+y^2-4x\le 0\}$ $C=\{(x,y)\mid\ y\ge 0\}$ $D=A\cap B\cap C$
15	$A=\{(x,y)\mid y^2+x\le 0\}$ $B=\{(x,y)\mid\ -1\le x\le 0\}$ $C=\{(x,y)\mid\ y\ge x\}$ $D=(B\cap A)\mid C$	30	$A=\{(x,y)\mid\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ $B=\{(x,y)\mid\ -1\le x\le 0,\ -1\le y\le 0\}$ $C=\{(x,y)\mid\ x^2+y^2\ge 1\}$ $D=(A\cup B)\cap C$

Пример решения задания 4

Даны множества: $A=\{(x,y)\mid\ x^2+y^2-2y\ge 0\}$, $B=\{(x,y)\mid\ x^2+y^2-4y\le 0\}$, $C=\{(x,y)\mid\ x\ge 0\}$, изобразить множество $D=A\cap B\cap C$.

Множество A – это область, лежащая вне круга и на окружности с центром в точке (0;1) и радиусом 1: $x^2+(y-1)^2\ge 1$ (рис. 2.10).

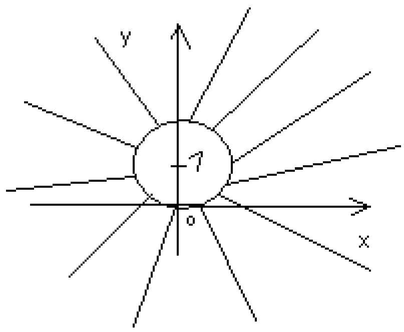


Рис. 2.10. Множество A

Множество B – это круг с центром в точке (0;2) и радиусом 2: $x^2+(y-2)^2\le 4$ (рис. 2.11).

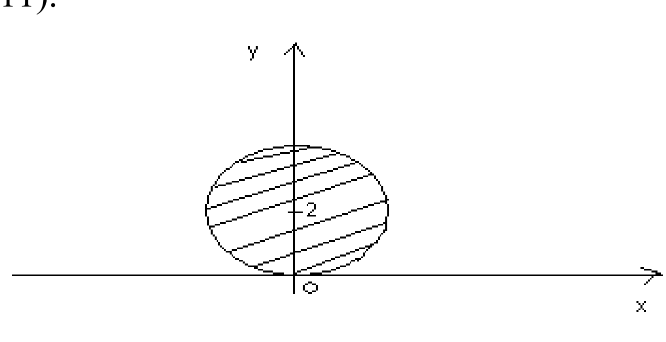


Рис. 2.11. Множество B

Множество C – правая полуплоскость (рис. 2.12).

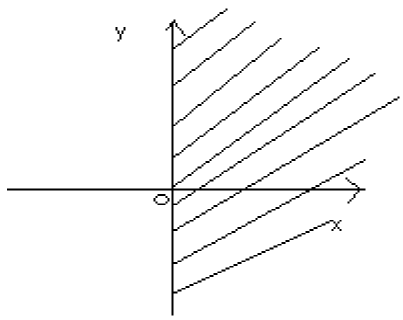


Рис. 2.12. Множество C

Изобразим на рис. 2.13 множество $A \cap B$.

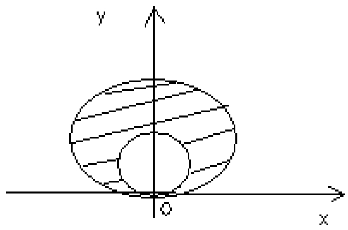


Рис. 2.13 Множество $A \cap B$

Изобразим на рис. 2.14 множество $D = A \cap B \cap C$.

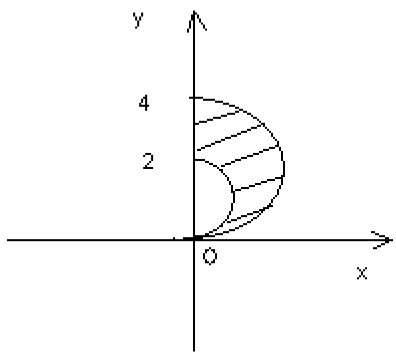


Рис. 2.14. Множество $D = A \cap B \cap C$

Задание 5

На множестве A задано бинарное отношение $\Re$. Требуется:

1 Найти декартово произведение $A \times A$.
2 Указать элементы отношения $\Re$.
3 Записать матрицу отношения $\Re$.
4 Определить, является ли отношение $\Re$ рефлексивным.
5 Определить, является ли отношение $\Re$ симметричным.
6 Определить, является ли отношение $\Re$ транзитивным.
7 Определить, является ли $\Re$ отношением эквивалентности.

Вариант	Множество A	Отношение $\Re$
1	{2, 3, 4, 5}	$\Re=\{(a,b)\mid a<b\}$
2	{1, 2, 3, 4}	$\Re=\{(a,b)\mid a\leq b\}$
3	{2, 3, 4, 7}	$\Re=\{(a,b)\mid a\vdots b\}$
4	{2, 4, 6, 8}	$\Re=\{(a,b)\mid a:b-\textit{четное}\}$
5	{1, 2, 3, 4}	$\Re=\{(a,b)\mid a-b<1\}$
6	{2, 4, 8, 10}	$\Re=\{(a,b)\mid (a-b)\vdots 3\}$
7	{1, 2, 5, 7}	$\Re=\{(a,b)\mid (a+b)\vdots 3\}$
8	{2, 6, 18, 30}	$\Re=\{(a,b)\mid a:b-\textit{нечетное}\}$
9	{1, 3, 7, 9}	$\Re=\{(a,b)\mid (a+b)\vdots 4\}$
10	{6, 7, 8, 9}	$\Re=\{(a,b)\mid b-a<1\}$
11	{3, 9, 15, 21}	$\Re=\{(a,b)\mid (a+b)\vdots 6\}$
12	{4, 8, 16, 20}	$\Re=\{(a,b)\mid a:b-\textit{четное}\}$
13	{4, 8, 16, 20}	$\Re=\{(a,b)\mid b\vdots a\}$
14	{10, 11, 12, 13}	$\Re=\{(a,b)\mid a\geq b\}$
15	{16, 17, 18, 19}	$\Re=\{(a,b)\mid a>b\}$
16	{12, 13, 14, 15}	$\Re=\{(a,b)\mid a>b\}$
17	{6, 7, 8, 9}	$\Re=\{(a,b)\mid a\geq b\}$
18	{5, 6, 10, 18}	$\Re=\{(a,b)\mid b\vdots a\}$
19	{1, 2, 4, 6}	$\Re=\{(a,b)\mid a:b-\textit{четное}\}$
20	{2, 4, 16, 22}	$\Re=\{(a,b)\mid (a+b)\vdots 6\}$
21	{2, 3, 4, 5}	$\Re=\{(a,b)\mid b-a<1\}$
22	{2, 6, 10, 14}	$\Re=\{(a,b)\mid (a+b)\vdots 4\}$
23	{3, 9, 21, 27}	$\Re=\{(a,b)\mid a:b-\textit{нечетное}\}$
24	{2, 4, 16, 22}	$\Re=\{(a,b)\mid (a+b)\vdots 3\}$
25	{1, 4, 7,10}	$\Re=\{(a,b)\mid (a-b)\vdots 3\}$
26	{5, 6, 7, 8}	$\Re=\{(a,b)\mid a-b<1\}$
27	{3, 6, 12, 18}	$\Re=\{(a,b)\mid a:b-\textit{четное}\}$
28	{2, 3, 5, 9}	$\Re=\{(a,b)\mid a\vdots b\}$
29	{5, 6, 7, 8}	$\Re=\{(a,b)\mid a\leq b\}$
30	{7, 8, 9, 10}	$\Re=\{(a,b)\mid a<b\}$

Пример решения задания 5

На множестве A = {9, 10, 11, 12} задано бинарное отношение $\Re = \{(a,b) | \; a-b<1\}$.

1 Найдем декартов квадрат $A^2 = A \times A =$ {(9, 9), (9, 10), (9, 11), (9, 12), (10, 9), (10, 10), (10, 11), (10, 12), (11, 9), (11, 10), (11, 11), (11, 12), (12, 9), (12, 10), (12, 11), (12, 12)}.

2 Укажем элементы отношения $\Re$ = {(9, 9), (9, 10), (9, 11), (9, 12), (10, 10), (10, 11), (10, 12), (11, 11), (11, 12), (12, 12)}.

3 Запишем матрицу отношения:

	9	10	11	12
9	**1**	**1**	**1**	**1**
10	**0**	**1**	**1**	**1**
11	**0**	**0**	**1**	**1**
12	**0**	**0**	**0**	**1**

или $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4 Отношение $\Re$ является рефлексивным, т.к. (9, 9), (10, 10), (11, 11), (12, 12) $\in \Re$. Все элементы главной диагонали матрицы отношения равны 1.

5 Отношение не является симметричным, т.к. матрица отношения при транспонировании меняется.

6 Пусть $(a, b), (b, c) \in \Re$, тогда

$$\begin{cases} a-b<1 \Rightarrow \; a \le b, \\ b-c<1 \Rightarrow \; b \le c, \end{cases} \Rightarrow a \le b \le c \Rightarrow a-c \le 0 < 1 \Rightarrow (a,c) \in \Re.$$

Таким образом, $\Re$ – транзитивное отношение.

7 Отношение $\Re$ – рефлексивно, транзитивно, но не симметрично, поэтому $\Re$ не является отношением эквивалентности.

3 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

3.1 Размещения, сочетания, перестановки

Комбинаторика изучает способы подсчета числа элементов в конечных множествах.

Многие комбинаторные задачи можно решить с помощью правил умножения и сложения.

Правило умножения. Пусть из некоторого конечного множества первый объект можно выбрать k_1 способами, второй объект можно выбрать k_2 способами, …, n – ый объект – k_n способами. Тогда произвольный набор перечисленных n объектов из данного множества можно выбрать $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ способами.

Пример 1: Сколько существует четырехзначных чисел с различными цифрами?

Решение: Из десяти цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 на первом месте может стоять любая из девяти цифр, кроме нуля. На втором месте – любая из оставшихся девяти цифр, кроме выбранной, на третьем месте – любая из восьми оставшихся цифр, на четвертом – любая из семи оставшихся цифр. По правилу произведения 9·9·8·7 = 4536 четырехзначных чисел с различными цифрами.

Правило сложения. При выполнении условий, перечисленных в правиле умножения, любой из объектов можно выбрать $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ способами.

Пример 2: В студенческой группе 8 девушек и 12 юношей. Сколькими способами можно выбрать из группы

а) одного человека?

б) для выполнения различных заданий двух человек одного пола?

Решение. *а*) По правилу сложения одного человека можно выбрать 8 + 12 = 20 способами.

б) По правилу умножения двух девушек можно выбрать 8·7 = 56 способами, двух юношей – 12·11 = 132 способами. Согласно правилу сложения двух человек одного пола можно выбрать 56 + 132 = 188 способами.

Если элементы в выборке могут повторяться, то говорят о **выборке с повторением** (с возвращением). Если повторение элементов в выборке невозможно, в этом случае говорят о **выборке без повторений** (без возвращения).

Если важен порядок появления элементов в выборке, то выборка называется **упорядоченной**, и говорят о размещении из *n* элементов по *k*.

Если порядок появления элементов в выборке не учитывают, то выборка называется **неупорядоченной**, и говорят о сочетании из *n* элементов по *k*.

Примеры:

1 В спортивном состязании участвуют 10 команд. В результате происходит выбор трех призеров. Поскольку порядок команд в призовой тройке важен, то выборка упорядоченная. Т.к. одна команда не может занять более одного призового места, то выборка без повторения.

2 Трехзначный телефонный номер – это выбор трех цифр из десяти. Эта выборка упорядоченная с повторением.

3 Студенческая группа из 10 человек выбирает трех представителей на конференцию. Эта выборка неупорядоченная и без повторения.

4 В почтовом отделении продаются открытки 8 видов. Покупка 10 открыток – неупорядоченная выборка с повторением.

Через A_n^k обозначают число различных размещений без повторений из *n* элементов по *k*.

Через $\overline{A}_n^k$ обозначают число различных размещений с повторениями из *n* элементов по *k*.

Число различных сочетаний без повторений из n элементов по k обозначают C_n^k.

Число различных сочетаний с повторениями из n элементов по k обозначают $\overline{C}_n^k$.

A_n^k, $\overline{A}_n^k$, C_n^k, $\overline{C}_n^k$ находят по формулам из нижеследующей таблицы.

Выборка	упорядоченная	неупорядоченная
без повторения	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
с повторением	$\overline{A}_n^k = n^k$	$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Размещение из n элементов по n называется перестановкой n элементов и обозначается P_n: $P_n = A_n^n = n!$.

Перестановки с повторениями. Пусть имеется k_1 элементов первого типа, k_2 элементов второго типа, …, k_m – элементов m – го типа. Элементы одного типа считают неразличимыми. В таком случае говорят, что перестановки с повторениями, и количество таких перестановок находится по формуле

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Пример: Сколько чисел можно составить, переставляя цифры числа 554 888?

Решение. Шесть цифр образуют перестановку, в которой повторяются $k_1 = 2$ пятерки, $k_2 = 1$ четверка и $k_3 = 3$ восьмерки. Всего таких перестановок $P(2,1,3) = \dfrac{6!}{2! \cdot 1! \cdot 3!} = 60$.

3.2 Бином Ньютона

Справедлива формула (бином Ньютона):

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где n – произвольное положительное целое число,
коэффициенты C_n^k называются биномиальными коэффициентами.

Пример: $(a+b)^4 = C_4^0 a^{4-0} b^0 + C_4^1 a^{4-1} b^1 + C_4^2 a^{4-2} b^2 + C_4^3 a^{4-3} b^3 + C_4^4 a^{4-4}\ b^4 =$

$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$

Некоторые свойства биномиальных коэффициентов:

1 $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

2 $C_n^k = C_n^{n-k}$.

3 $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$.

4 $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = 0$.

3.3 Формулы включений и исключений

Для любых конечных множеств A и B справедлива формула

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Для любых конечных множеств A, B и C справедлива формула

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Эту формулу можно обобщить на объединение любого конечного числа множеств.

Пример: 50 студентов второго курса изучают английский язык, 40 студентов – французский язык, 30 студентов – немецкий язык, 15 человек – английский и французский, 20 человек – английский и немецкий, 10 – французский и немецкий, 5 – все три языка. Определить число студентов, изучающих хотя бы один из этих языков.

Решение. Пусть

A – множество студентов, изучающих английский язык,

B – множество студентов, изучающих французский язык,

C – множество студентов, изучающих немецкий язык. Тогда

$A \cap B$ – множество студентов, изучающих английский и французский языки, $A \cap C$ – множество студентов, изучающих английский и немецкий,

$B \cap C$ – множество студентов, изучающих французский и немецкий, $A \cap B \cap C$ – множество студентов, изучающих все три языка,

$A \cup B \cup C$ – множество студентов, изучающих хотя бы один из этих языков.

По условию $|A|$ = 50, $|B|$ = 40, $|C|$ = 30, $|A \cap B|$ = 15, $|A \cap C|$ = 20, $|B \cap C|$ = 10, $|A \cap B \cap C|$ =5.

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$

= 50+40+30-15-20-10+5=80 человек изучают хотя бы один язык.

Задачи:

1 Составьте все перестановки:

а) из трех цифр: 1, 2, 3;

б) из четырех букв: *a, b, c, d*.

Решение. *а*) 123, 132, 213, 231, 312, 321;

б) *abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb, bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca, cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba, dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba.*

2 Составьте все размещения:

а) из четырех букв *a, b, c, d* по две буквы без повторения;

б) из трех цифр 1, 2, 3 по две цифры с повторением.

Решение. *а*) *ab, ba, bc, cb, cd, dc, ac, ca, ad, da, bd, db;*

б) 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.

3 Составьте все сочетания

а) из четырех букв *a, b, c, d* по три буквы без повторения;

б) из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5 по четыре цифры без повторения.

Решение. *а***)** *abc, abd, acd, bcd;*

б) 1234, 1345, 1245, 1235, 2345.

4 Вычислить:

а) A_4^2; *б*) C_{15}^{13}; *в*) $\overline{A_4^3}$; *г*) $\overline{C_3^4}$; *д*) P_5; *е*) P_7.

5 Найдите число всех размещений из 5 элементов по 3 элемента *а*) без повторения элементов; *б*) с повторением элементов.

6 Найдите число всех сочетаний из 5 элементов по 3 *а*) без повторения элементов; *б*) с повторением элементов.

7 Решите уравнения: *а*) $A_{x+2}^3 = P_4$; *б*) $3C_x^3 = 2C_{x+1}^4$.

8 На втором курсе изучают 12 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в этот день должны быть три занятия по разным предметам?

9 На собрании выступят 5 человек. Сколькими способами их можно расположить в списке?

Решение: Число перестановок из n = 5 элементов: $P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$ способов.

10 В финальном забеге на 100м участвуют 12 спортсменов. Сколько существует вариантов протокола забега?

11 Сколькими способами можно выбрать трехзначное число, в десятичной записи которого нет нуля?

Решение. Это число размещений с повторениями из 9 элементов по 3: $\overline{A_9^3} = 9^3 = 729$ способов.

12 12 спортсменов разыгрывают одну золотую, одну серебряную и одну бронзовую медали. Сколькими способами эти медали могут быть распределены между спортсменами?

13 Сколькими способами из 15 спортсменов можно отобрать команду из 6 человек?

14 Сколькими способами можно поставить в ряд на полке 4 учебника по математике, 3 – по физике, 1 – по истории?

Решение. Искомое число способов – это перестановки с повторениями

$$P(4,\,3,\,1) = \frac{(4+3+1)!}{4!\cdot 3!\cdot 1!} = \frac{8!}{4!\cdot 3!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{4!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3} = 280 \text{ способов.}$$

15 Сколько различных «слов» можно получить из всех букв слова: *а*) ананас; *б*) колобок?

16 Сколькими способами можно в строку написать 6 нулей и 4 единицы?

17 Сколько различных чисел можно получить, переставляя цифры числа 344 545?

18 Сколькими способами можно расставить на полке 5 книг, чтобы *а*) две определенные книги стояли рядом; *б*) эти две книги не стояли рядом?

19 Сколькими способами можно выбрать старосту и профорга в группе из 14 человек?

20 Сколькими способами можно выбрать четырех человек из десяти?

21 В доме 5 комнат, каждая из которых может разместить трех человек. Сколько существует вариантов расселения трех человек?

22 В кондитерской продается 10 видов пирожных. Сколько существует способов выбора трех пирожных?

23 В коробке 5 красных и 4 белых шара. Сколькими способами можно извлечь из коробки: *а*) два шара; *б*) два шара одного цвета?

24 В группе 16 человек, из них 9 человек учатся отлично. Сколькими способами можно выбрать из группы 10 человек так, чтобы среди них было 4 отличника?

Решение. Четырех отличников из 9 отличников можно выбрать C_9^4 способами. Остальных 10 – 4 = 6 человек выбираем из 16 – 9 = 7 человек C_7^6 способами. По правилу умножения $C_9^4 \cdot C_7^6 = 882$ – число способов выбора 10 человек так, что среди них 4 отличника.

25 Среди 15 деталей 6 деталей нестандартные. Сколькими способами можно взять 5 деталей так, чтобы среди них были 3 нестандартные?

26 Сколькими способами можно выбрать три лица из 10 кандидатов на вакантные должности, если должности *а*) различные; *б*) одинаковые?

27 В ящике 12 красных, 10 синих и 8 зеленых шаров. Сколькими различными способами можно вынуть 3 красных, 2 синих и 1 зеленый шар?

28 Из 10 билетов 3 выигрышных. Сколькими способами можно взять 4 билета так, чтобы среди низ был один выигрышный?

29 Сколькими способами можно распределить 6 человек по двум комнатам, если в каждой комнате должно находиться не менее двух человек?

30 Докажите свойства биномиальных коэффициентов, сформулированные на с. 34.

31 Найдите разложение $(a+b)^5$.

32 Найдите:

а) пятый член разложения $(x+2)^8$;

б) третий член разложения $(2a+b)^5$;

в) средний член разложения $(\sqrt[3]{x}-y)^6$;

г) два средних члена разложения $(x^2-y^3)^9$.

33 Согласно опросу, из 180 телезрителей 100 человек смотрят спортивные передачи, 80 – комедии, 70 – драмы, 50 – спорт и комедии, 40 – спорт и драмы, 30 – комедии и драмы, 20 – все три вида передач. *а*) Сколько человек смотрят хотя бы одного вида передачи? *б*) Сколько человек не смотрят ничего из выше перечисленного?

Задание 6

Определить:

1 Число всех размещений из n элементов по k элементов.

2 Число всех размещений с повторениями из n элементов по k элементов.

3 Число всех перестановок из $(n-k)$ элементов.

4 Число всех сочетаний из n элементов по k элементов.

5 Число всех сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов.

6 Число способов, которыми можно в строчку написать n нулей и k единиц.

№	n	k		№	n	k		№	n	k		№	n	k		№	n	k		№	n	k
1	9	6		**6**	13	4		**11**	11	3		**16**	11	2		**21**	14	3		**26**	7	5
2	10	3		**7**	7	3		**12**	13	3		**17**	11	5		**22**	11	4		**27**	9	7
3	11	6		**8**	10	4		**13**	10	6		**18**	14	4		**23**	10	8		**28**	8	5
4	10	5		**9**	13	5		**14**	12	5		**19**	12	6		**24**	9	3		**29**	7	4
5	12	4		**10**	7	6		**15**	14	2		**20**	12	3		**25**	8	4		**30**	6	3

Пример решения задания 6

Пусть $n = 14$, $k = 5$.

1 Число всех размещений из $n = 14$ элементов по $k = 5$ элементов найдем по формуле: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$; $A_{14}^5 = \dfrac{14!}{(14-5)!} = \dfrac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{9!} = 240240$.

2 Число всех размещений с повторениями из $n = 14$ элементов по $k = 5$ элементов найдем по формуле: $\overline{A}_n^k = n^k$; $\overline{A}_{14}^5 = 14^5 = 537\,824$.

3 Число всех перестановок из $n - k = 14 - 5 = 9$ элементов найдем по формуле: $P_n = n!$; $P_9 = 9! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 362\,880$.

4 Число всех сочетаний из $n = 14$ элементов по $k = 5$ элементов найдем по формуле: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$;

$$C_{14}^5 = \frac{14!}{5!(14-5)!} = \frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{5!\cdot 9!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 2002.$$

5 Число всех сочетаний с повторениями из $n = 14$ элементов по $k = 5$ элементов найдем по формуле: $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$;

$$\overline{C}_{14}^5 = C_{14+5-1}^5 = C_{18}^5 = \frac{18!}{5!\cdot 13!} = \frac{13!\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 13!} = 8\,568.$$

6 Число способов, которыми можно в строчку написать $n = 14$ нулей и $k = 5$ единиц найдем по формуле: $P(n,k) = \dfrac{(n+k)!}{n!\cdot k!}$;

$$P(14, 5) = \frac{(14+5)!}{14!\cdot 5!} = \frac{19!}{14!\cdot 5!} = \frac{14!\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19}{14!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 11\,628.$$

4 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

4.1 Основные определения

Пусть V – непустое множество, $V^{(2)}$ – множество всех его двухэлементных подмножеств, E – произвольное подмножество $V^{(2)}$.

(Неориентированным) графом *G (V, E)* называется совокупность двух множеств V и E.

V – называют множеством вершин, а его элементы вершинами графа.

E – называют множеством ребер, а его элементы – ребрами.

Говорят, что две вершины v_1 и v_2 графа **смежны**, если множество $\{v_1, v_2\}$ является ребром. Если $e = \{v_1, v_2\}$ – ребро, то вершины v_1 и v_2 называют его концами. Вершина v_1 и ребро e **инцидентны**, вершина v_2 и ребро e также инцидентны. Два ребра, имеющие общий конец, называются смежными.

Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется **петлей**. Граф с петлями называется **псевдографом**.

Ребра с одинаковыми концевыми вершинами называются кратными. Граф с кратными ребрами называется **мультиграфом**.

Обычно граф изображают диаграммой: вершины – кружками или точками, ребра – линиями. Внутри кружка пишется обозначение вершины. Часто вершины нумеруют и обозначают каждую вершину ее номером. Пример диаграммы показан на рис. 4.1. На этом рисунке изображен граф с 4 вершинами и 5 ребрами: $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_3\}\}$.

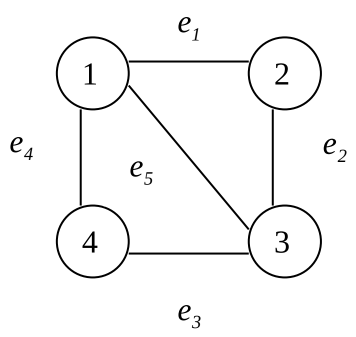


Рис. 4.1

На рис. 4.2 показаны псевдограф и мультиграф.

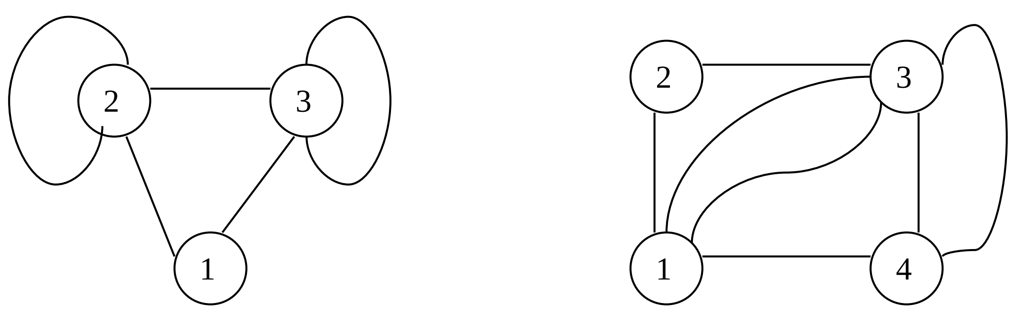


Рис. 4.2

Один и тот же граф можно изобразить по-разному. Вершины располагают по своему усмотрению и произвольно выбирают форму соединяющих линий – ребер. В этом проявляется свойство изоморфизма графов.

Если элементы множества E графа $G(V, E)$ – упорядоченные пары, то граф называется ориентированным или орграфом. Ребро орграфа называют дугой и изображают стрелкой, направленной от начальной вершины к конечной. На рис. 4.3 показан ориентированный граф с множеством вершин

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ и множеством дуг $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} =$
$= \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_3\}\}$.

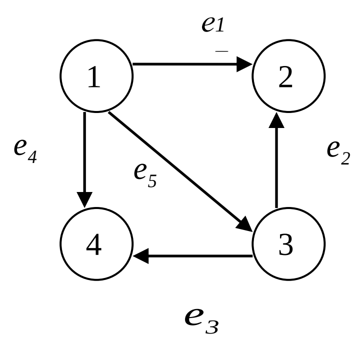


Рис. 4.3

Степенью *d(v)* вершины *v* графа *G* называется число инцидентных ей ребер. Если $d(v) = 0$, то вершина называется **изолированной**, если $d(v) = 1$, вершина называется **концевой** или висячей.

Понятие степени вершины сохраняется для мульти- и псевдографов. Полагают, что каждая петля вносит в степень соответствующей вершины двойку.

Граф называется **полным,** если любые две его вершины смежны. Полный граф с *p* вершинами обозначается K_p. Степень каждой вершины графа K_p равна (p – 1). На рис. 4.4 показаны графы K_3, K_4, K_5.

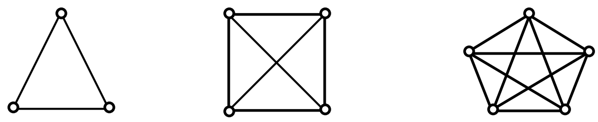


Рис. 4.4

4.2 Маршруты, цепи, циклы

Маршрутом в графе называют последовательность вершин и ребер, в которой любые два соседних элемента инцидентны: $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., , e_k, v_k$. Вершины v_0, v_k называют концами маршрута. Если $v_0 = v_k$, то маршрут называют замкнутым, в противном случае – незамкнутым или открытым.

В случае простого графа (без петель и без кратных ребер) маршрут однозначно определяется последовательностью $v_0, v_1, v_2, ..., v_k$ его вершин или последовательностью $e_1, e_2, ..., , e_k$ ребер.

Цепь – это маршрут, все ребра которого различные.

Простая цепь – это цепь, в которой все вершины различны кроме, быть может, ее концов.

Цикл – это замкнутая цепь.

Простой цикл – это простая замкнутая цепь.

Рассмотрим граф на рис. 4.5. Маршруты в этом графе будем задавать последовательностью вершин.

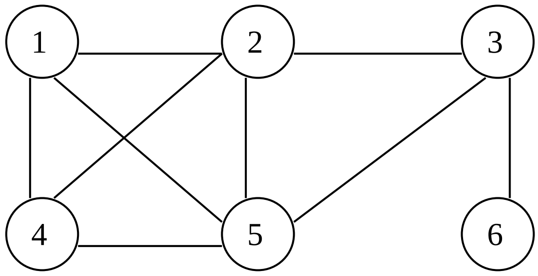


Рис. 4.5

Пример маршрута: 1–2–4–1–2–3–6.

Пример замкнутого маршрута: 1–2–4 –1–2–3–5–4–1.

Пример цепи, соединяющей вершины 2 и 5: 2–1–4–2–5.

Пример простой цепи, соединяющей вершины 2 и 5: 2–3–5 или 2–1–4–5.

Пример цикла: 2–1–4–2–5–3–2.

Примеры простых циклов: 1–2–5–4–1; 1–2–3–5–4–1; 1–2–3–5–1.

В случае орграфа вместо слова «цепь» говорят «путь», а слово «цикл» заменяют на слово «контур». Вдоль ориентированного пути нужно двигаться в направлении задаваемом ориентацией ребер.

Длиной маршрута называют число ребер в нем с учетом повторений.

Расстоянием между вершинами называют длину кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины.

Граф называют **связным,** если любые две его вершины можно соединить простой цепью. В противном случае граф называют несвязным.

На рис. 4.6 граф, состоящий из трех компонент связности.

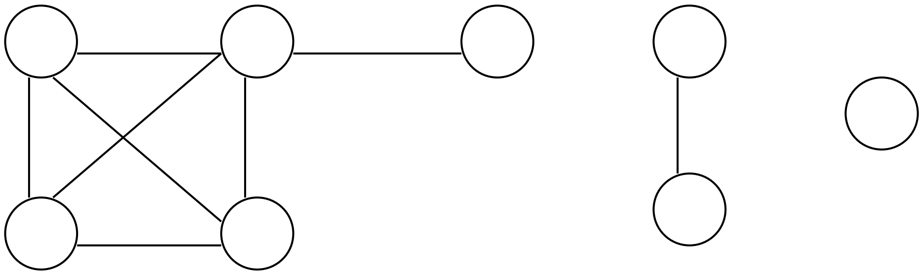


Рис. 4.6

4.3 Матричное представление графов

Пусть $G(V, E)$ – граф, $|V| = p$.

Матрицей смежности $A = (a_{ij})$ неориентированного графа G называется квадратная матрица p-го порядка, элементы которой определяются по правилу:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ смежные;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример: Для графа, изображенного на рис. 4.7, построить матрицу смежности.

Решение: Матрица смежности

$i\backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
2	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
3	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
4	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
5	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
6	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**

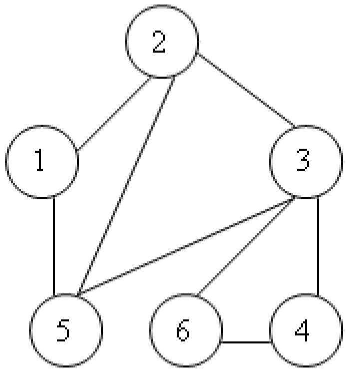


Рис. 4.7

Свойства матрицы смежности неориентированного графа

1 Число единиц в i–й строке равно степени i–й вершины, i = 1, 2, …, p.

2 Число единиц в j–м столбце равно степени j–й вершины, j = 1, 2, …, p.

3 Общее число единиц в матрице равно удвоенному числу ребер.

4 Матрица смежности симметрична относительно главной диагонали, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.

Аналогично определяются матрицы смежности A мульти- и псевдографов: a_{ij} равно числу ребер, соединяющих вершины v_i и v_j, при этом петля означает два ребра.

Матрицей смежности $A = (a_{ij})$ ориентированного графа G называется квадратная матрица p - го порядка, элементы которой определяются по правилу:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если в графе есть дуга } (v_i, v_j); \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример. Для графа, изображенного на рис. 4.8, построить матрицу смежности.

Решение. Матрица смежности

$i\backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
2	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
3	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
4	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
5	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
6	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**

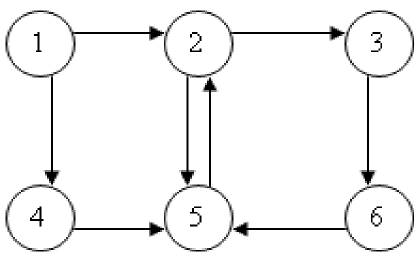


Рис. 4.8

Свойства матрицы смежности орграфа

1 Число единиц в i – й строке равно числу дуг, выходящих из i – й вершины, (степень выхода), i =1, 2, …, p.

2 Число единиц в j – м столбце равно числу дуг входящих в j – ю вершину, (степень входа), j = 1, 2, …, p.

3 Общее число единиц в матрице равно числу дуг в графе.

4 Матрица смежности не симметрична относительно главной диагонали.

Пусть $G(V, E)$ – граф, $|V| = p$, $|E| = q$.

Матрицей **инцидентности** $B = (b_{ij})$ неориентированного графа $G(V, E)$ называется матрица с p строками и q столбцами, элементы которой определяются следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ и ребро } e_j \text{ инцидентны;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример: Для графа, изображенного на рис. 4.7, постройте матрицу инцидентности.

Решение. Произвольно перенумеруем ребра графа (см. рис. 4.9).

Матрица инцидентности:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
2	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
3	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
4	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
5	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
6	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**

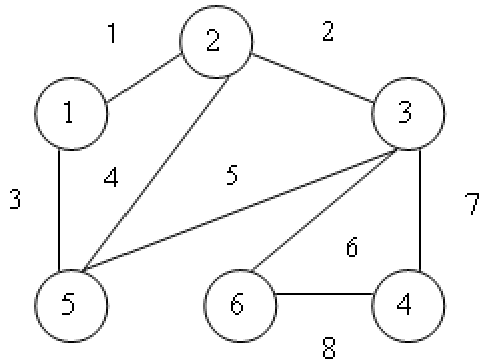


Рис. 4.9

Свойства матрицы инцидентности неориентированного графа

1 Число единиц в i–й строке равно степени i–й вершины, $i = 1, 2, \ldots, p$.

2 Число единиц в j–м столбце равно двум, т.к. любое ребро инцидентно двум вершинам, $j = 1, 2, \ldots, q$.

3 Общее число единиц в матрице равно удвоенному числу ребер графа.

Матрицей **инцидентности** $B = (b_{ij})$ ориентированного графа $G(V, E)$ называется матрица, элементы которой определяются следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если из вершины } v_i \text{ выходит дуга } e_j, \\ +1, & \text{если в вершину } v_i \text{ заходит дуга } e_j, \\ 0, & \text{если вершина } v_i \text{ и дуга } e_j \text{ не инцидентны.} \end{cases}$$

Пример: Построить матрицу инцидентности для орграфа, изображенного на рис. 4.8.

Решение: Ребро, соединяющее вершины i и j, будем обозначать символом ij. Запишем матрицу инцидентности:

	12	14	23	25	36	45	52	65
1	**-1**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
2	**1**	**0**	**-1**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**0**
3	**0**	**0**	**1**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**
4	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**0**
5	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**-1**	**1**
6	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**-1**

Свойства матрицы инцидентности орграфа

1 Число единиц с минусом в i-й строке равно степени выхода i-й вершины, $i = 1, 2,\ldots, p$.

2 Число единиц в i-й строке равно степени входа i-й вершины, $i = 1, 2,\ldots, p$.

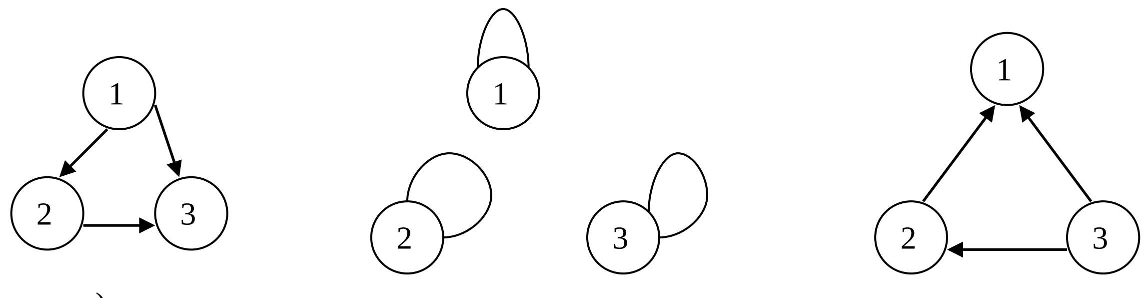
3 Число единиц в матрице равно числу единиц с минусом и равно числу дуг в орграфе.

4 В каждом столбце одна единица и одна единица с минусом, т.к. каждая дуга из одной вершины выходит и в одну вершину заходит.

4.4 Графы и отношения

Между понятием графа и понятием отношения имеется связь – в сущности это один и тот же класс объектов, только описанный разными средствами. Любой орграф $G(V, E)$ без кратных дуг задает бинарное отношение E на множестве V, и обратно. Пара элементов принадлежит отношению $(v_i, v_j) \in E \subseteq V \times V$ тогда и только тогда, когда в графе G есть дуга (v_i, v_j).

Пример: Рассмотрим на множестве $V = \{1, 2, 3\}$ три отношения $\Re_1$, $\Re_2$, $\Re_3$: $\Re_1 = \{(x, y) \mid x < y\}$ = {(1; 2), (1; 3), (2; 3)}, $\Re_2 = \{(x, y) \mid x = y\}$ = {(1; 1), (2; 2), (3; 3)}, $\Re_3 = \{(x, y) \mid x > y\}$ = {(2; 1), (3; 1), (3; 2)}. Графы, соответствующие отношениям $\Re_1$, $\Re_2$, $\Re_3$ на множестве V, изображены на рис. 4.10 *а*), *б*), *в*).



а) *б*) *в*)

Рис. 4.10

Граф, соответствующий рефлексивному отношению, в каждой вершине имеет петлю. На рис. 4.11 *а*) граф рефлексивного отношения $\mathfrak{R} = \{(x, y) | x \le y\}$ на множестве $V = \{1, 2, 3\}$.

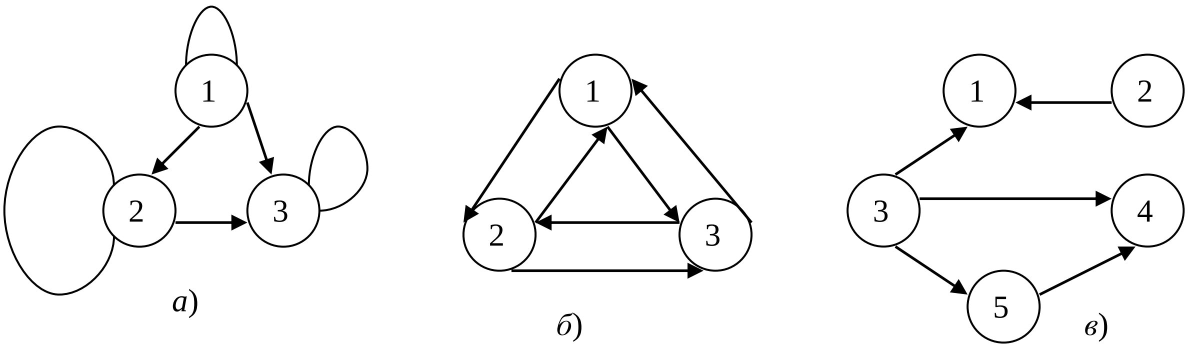


Рис. 4.11

Граф, соответствующий антирефлексивному отношению, не имеет петель. Например, графы на рис. 4.10 *а*), *в*).

Графы отношений, которые не являются ни рефлексивными, ни антирефлексивными, имеют вершины с петлями и вершины без петель одновременно.

Если в графе симметричного отношения есть дуга (x, y), то должна быть и дуга (y, x). Соответствующий граф приведен на рис. 4.11 *б*).

Если граф транзитивного отношения содержит дуги (x, y) и (y, z), то он должен содержать дугу (x, z). Например, граф на рис. 4.11 *б*), *в*).

Деревья

Деревом называют связный граф без циклов. **Лесом** называют граф без циклов. На рис. 4.12 показан лес, состоящий из трех деревьев.

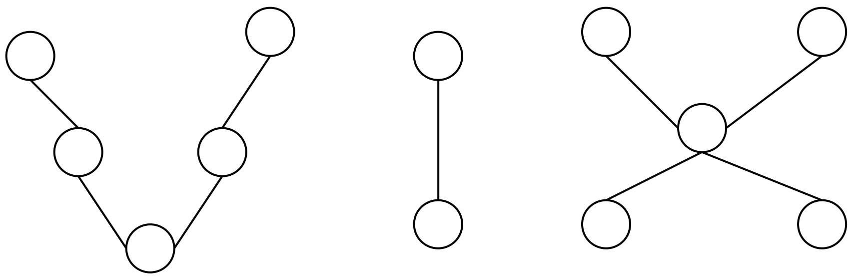


Рис. 4.12

Деревья широко используются в программировании, теории вероятностей, комбинаторике, в теории планирования и управления.

С помощью леса на рис. 4.13 представлены перестановки из 4 элементов множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Число висячих вершин равно числу перестановок.

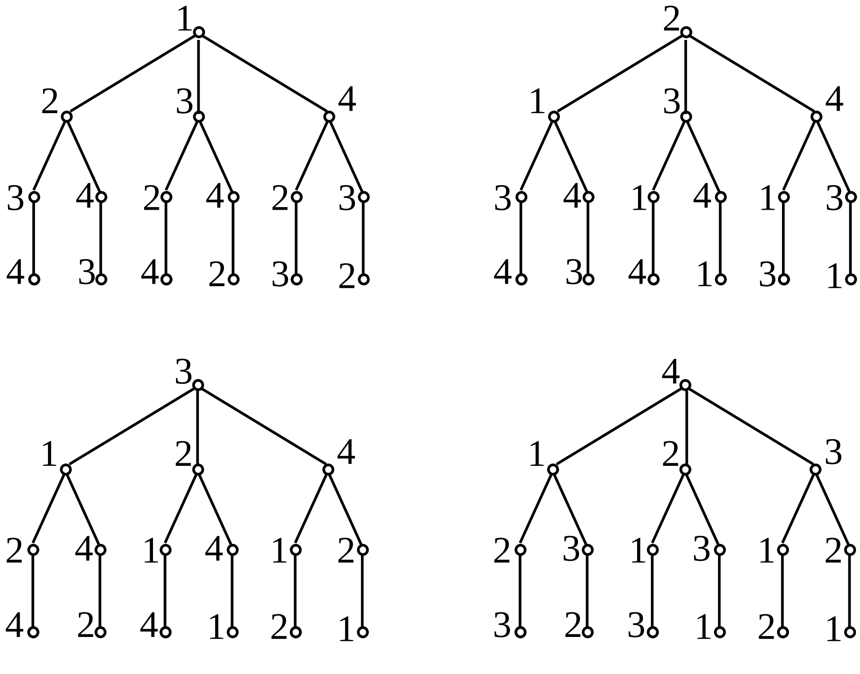


Рис. 4.13

На рис. 4.14 изображена схема местности.

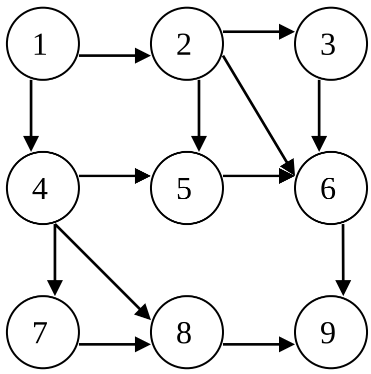


Рис. 4.14

Передвижение допускается только в направлении стрелок. Каждый пункт можно проходить не более одного раза. Выясним, сколькими способами можно попасть из пункта 1 в пункт 9. Для этого построим на рис. 4.15 дерево, начиная с вершины 1.

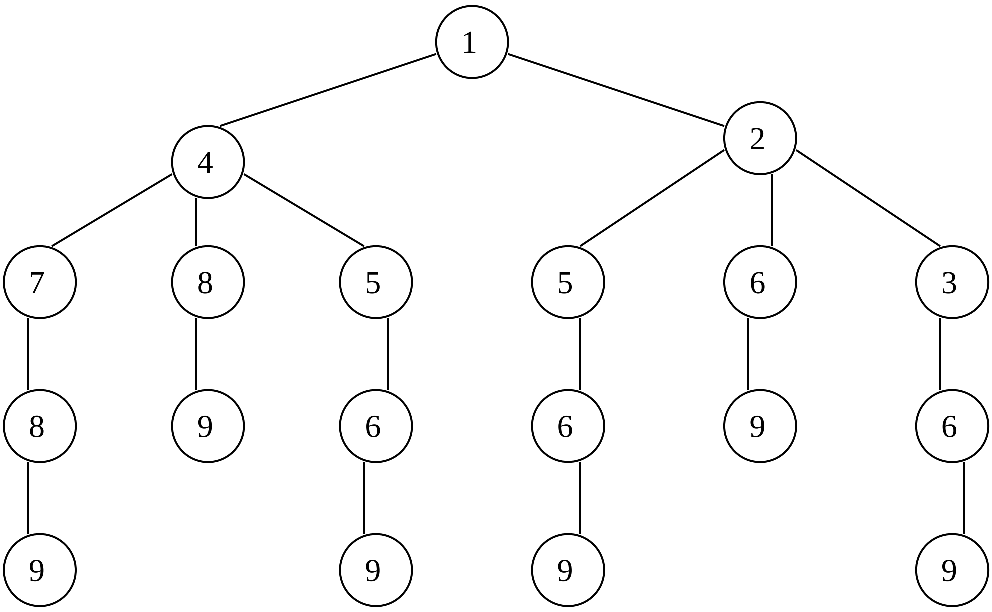


Рис. 4.15

Если на плане местности указать расстояния между пунктами, то с помощью дерева легко выбрать наикратчайший путь.

Задачи

1 Дано множество вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ и множество ребер $E = \{\{v_1,v_2\}, \{v_1,v_3\}, \{v_1,v_4\}, \{v_2,v_3\}, \{v_2,v_4\}, \{v_2,v_5\}, \{v_3,v_4\}, \{v_4,v_5\}\}$. Изобразите диаграммой неориентированный граф *G* (*V*, *E*).

2 Дано множество вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ и множество дуг $E = \{\{v_1,v_2\}, \{v_1,v_4\}, \{v_2,v_3\}, \{v_3,v_5\}, \{v_3,v_6\}, \{v_4,v_1\}, \{v_4,v_2\}, \{v_4,v_5\}, \{v_6,v_5\}\}$. Изобразите диаграммой ориентированный граф *G* (*V*, *E*).

3 На рис. 4.16 изображен граф *G* (*V*, *E*).

а) задайте множества *V* и *E* перечислением элементов;

б) постройте матрицу смежности и инцидентности.

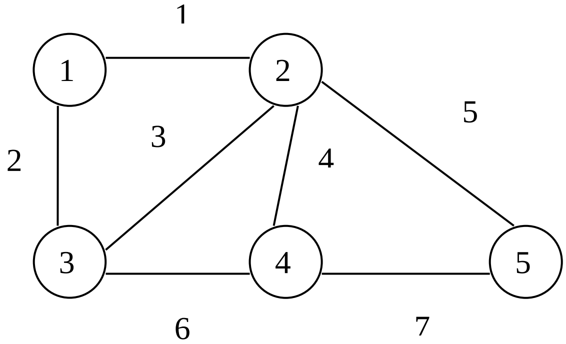


Рис. 4.16

4 На рис. 4.17 изображен орграф *G* (*V*, *E*).

а) задайте множества *V* и *E* перечислением элементов;

б) постройте матрицу смежности и инцидентности.

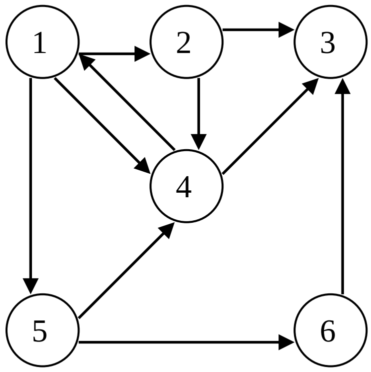


Рис. 4.17

5 Для графа, изображенного на рис. 4.5, найдите матрицу смежности и инцидентности.

6 Для графа, изображенного на рис. 4.14, найдите матрицу смежности и инцидентности.

7 Дана матрица $\begin{pmatrix} 0\,1\,1\,0 \\ 1\,0\,0\,1 \\ 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \end{pmatrix}$. Постройте неориентированный граф, для которого матрица является матрицей смежности. Найдите матрицу инцидентности.

8 Дана матрица $\begin{pmatrix} 0\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0 \end{pmatrix}$. Постройте ориентированный граф, для которого матрица является матрицей смежности. Найдите матрицу инцидентности.

9 Возможно ли, что в одной компании из n человек, каждый знаком только с двумя другими? Рассмотрите случай а) $n = 5$, б) $n = 6$.

10 Нарисуйте полный граф с n вершинами, если а) $n = 5$, б) $n = 6$.

11 Скольким ребрам инцидентна вершина в полном графе с n вершинами, если а) $n = 3$, б) $n = 5$, *в*) $n = 6$?

12 Докажите, что в полном графе с n вершинами $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер. Существует ли полный граф с шестью, с семью ребрами?

13 В полном графе с пятью вершинами найдите циклы, содержащие 4, 5, 6, 10 ребер. Какие из этих циклов простые?

14 Нарисуйте несвязный граф с n вершинами, если а) $n = 4$, б) $n = 5$, *в*) $n = 6$.

15 Нарисуйте граф без циклов:

а) с пятью вершинами и четырьмя ребрами;

б) с шестью вершинами и пятью ребрами.

16 Проверьте, что на рис. 4.18 изображен один и тот же граф.

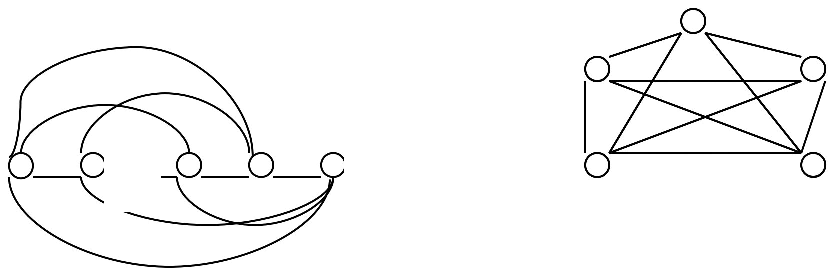


Рис. 4.18

Указание. Убедитесь, что у обоих графов *а*) одинаковое число вершин;

б) одинаковое число ребер; в) одинаковое число вершин имеет степень *m*.

17 На множестве $V = \{1, 2, 3\}$ задано отношение $\Re = \{(x,y) | x \geq y\}$. Укажите элементы множества $\Re$, матрицу отношения $\Re$. Нарисуйте орграф, соответствующий отношению $\Re$.

18 На множестве $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задано отношение $\Re = \{(x,y) | x < y\}$. Укажите элементы множества $\Re$, матрицу отношения $\Re$. Нарисуйте орграф, соответствующий данному отношению.

19 На множестве $V = \{-4; -1; 0; 2; 3\}$ задано отношение $\Re$. Изобразите орграф, соответствующий отношению $\Re$, если

а) $\Re = \{(x,y) | x < y\}$; *б)* $\Re = \{(x,y) | x > y\}$; *в)* $\Re = \{(x,y) | x \leq y\}$; *г)* $\Re = \{(x,y) | x \geq y\}$.

20 Изобразите граф с пятью вершинами, соответствующий *а*) рефлексивному отношению;

б) антирефлексивному отношению;

в) не рефлексивному и не антирефлексивному отношению.

21 Изобразите граф с пятью вершинами, соответствующий *а*) транзитивному отношению;

б) антитранзитивному отношению;

в) не транзитивному и не антитранзитивному отношению.

22 Изобразите граф с пятью вершинами, соответствующий *а*) симметричному отношению;

б) антисимметричному отношению;

в) не симметричному и не антисимметричному отношению.

23 Изобразите дерево возможных исходов при двукратном бросании игральной кости.

24 Изобразите дерево возможных исходов при трехкратном бросании монеты.

25 На рис. 4.19 приведена схема местности. Изобразите дерево всевозможных путей из пункта 1 в пункт 9.

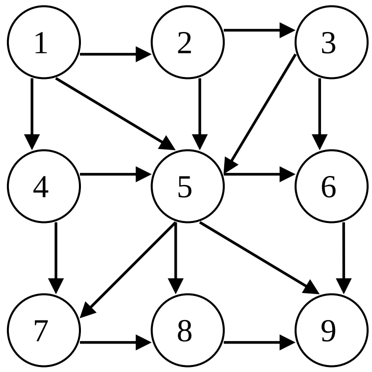


Рис. 4.19

Задание 7

По матрице смежности $\begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 0 & e & f & g \\ b & e & 0 & h & k \\ c & f & h & 0 & l \\ d & g & k & l & 0 \end{pmatrix}$ постройте граф.

Найдите матрицу инцидентности.

№	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*k*	*l*	№	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*k*	*l*
1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	16	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1
2	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	17	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1
3	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	18	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
4	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	19	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
5	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	20	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
6	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	21	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0
7	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	22	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1
8	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	23	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
9	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	24	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
10	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	25	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
11	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	26	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0
12	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	27	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0
13	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	28	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
14	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	29	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0
15	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	30	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1

Пример выполнения задания 7

По матрице смежности $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ построить граф. Найти матрицу инцидентности.

Решение. Матрица смежности пятого порядка, следовательно, в графе пять вершин: $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Все элементы главной диагонали матрицы смежности равны нулю, значит граф без петель. Т. к. $a_{12}= 1$ и $a_{15}= 1$, то вершина 1 смежна с вершинами 2 и 5; соединяем ребрами вершины 1 и 2, 1 и 5. Во второй строке матрицы $a_{23}= 1$ и $a_{25}= 1$, поэтому соединяем ребрами вершину 2 с вершиной 3 и вершиной 5. В третьей строке матрицы $a_{34}= 1$, поэтому соединяем ребром вершину 3 с вершиной 4. В четвертой строке матрицы $a_{45}= 1$, следовательно, вершины 4 и 5 соединяем ребром (см. рис. 4.20).

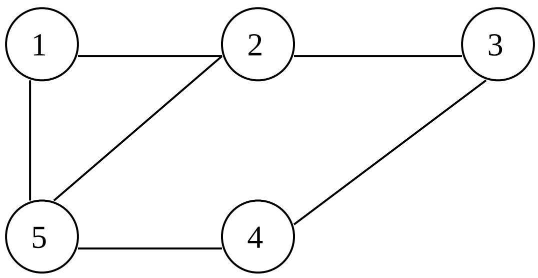


Рис. 4.20

В построенном графе пять вершин и шесть ребер, значит, матрица инцидентности имеет 5 строк и 6 столбцов. По правилу

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если вершина } v_i \textit{ инцидентна ребру } e_j; \\ 0, & \textit{иначе; } i = 1, 2, \ldots, p, \ j = 1, 2, \ldots, q. \end{cases}$$

находим матрицу инцидентности:

	12	15	23	25	34	45
1	1	1	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0
3	0	0	1	0	1	0
4	0	0	0	0	1	1
5	0	1	0	1	0	1

Задание 8

На множестве A задано отношение $\Re$ (данные взять из задания 5 на с. 30–31). Изобразите орграф, соответствующий отношению $\Re$.

Пример выполнения задания 8

На множестве A = {9, 10, 11, 12} задано бинарное отношение $\Re = \{ (a,b) |\ a - b < 1 \}$. Необходимо изобразить орграф, соответствующий отношению $\Re$.

Множество A содержит четыре элемента, значит орграф отношения $\Re$ имеет четыре вершины. В рассмотренном ранее примере выполнения задания 5 на с. 32 найдены элементы множества $\Re$ = {(9, 9), (9, 10), (9, 11), (9, 12), (10, 10), (10, 11), (10, 12), (11, 11), (11, 12), (12, 12)}.В соответствии с элементами множества $\Re$ строим дуги графа на рис. 4.21.

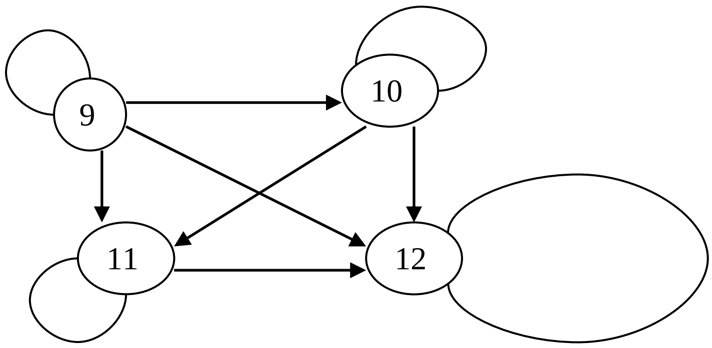


Рис. 4.21

Все вершины графа имеют петли, это согласуется с тем, что отношение $\Re$ рефлексивное. По рис. 4.21 видно, что $\Re$ транзитивно: дуги (9, 10), (10, 12) и (9, 12) принадлежат графу; также дуги (9, 11), (11, 12) и (9, 12) принадлежат графу; дуги (10, 11), (11, 12) и (10, 12) принадлежат графу.

5 ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

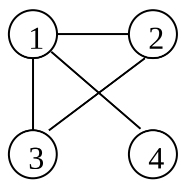
Билет № 1

1 Число способов выбора *m* элементов из *n*

1) Сочетания без повторений	1) $\frac{n!}{(n-m)!}$;
2) Размещение без повторений	2) n^m;
3) Размещения с повторениями	3) $\frac{n!}{m!(n-m)!}$;
4) Перестановки без повторений	4) $n!$.

2 Декартово произведение $A \times B$ множеств *A={a;b} B={a;c}*
1) *{a;b;a;c};*
2) *{aa;bc};*
3) *{aa;ba;ac;bc};*
4) *{a;b;c}.*

3 Неориентированный граф имеет матрицу смежности



1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4 Булева функция $(1 \vee x) \wedge y$ равна

1) 1; 3) x;
2) $x \wedge y$; 4) y.

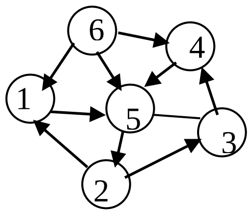
Билет № 2

1 Число различных перестановок в слове «слово»

1) 120; 3) 32;
2) 60; 4) 5.

2 Бинарное отношение транзитивно
1) быть непересекающимися множествами;
2) быть друзьями;
3) учиться в одной группе ;
4) быть паралелльными на плоскости прямыми.

3 Простая цепь из вершины 1 в вершину 4 орграфа



1) 1-5-4; 3) 1-5-2-3-4;
2) 1-2-3-4; 4) 1-6-5-2-3-4.

4 Таблица истинности логической функции $x \wedge y \to \bar{x}$:

1)

x	*y*	*F (x,y)*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2)

x	*y*	*F (x,y)*
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

3)

x	*y*	*F (x,y)*
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4)

x	*y*	*F (x,y)*
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Билет № 3

1 Для доступа в компьютерную сеть требуется код из трех неповторяющихся цифр. Число возможных вариантов такого кода

1) 720; 3)1000; 2) 30; 4)500.

2 Отношение *R*, заданное матрицей

R	*a*	*b*	*c*	*d*
a	0	1	0	1
b	1	0	1	0
c	0	1	0	1
d	1	0	1	0

1) эквивалентно; 3) транзитивно; 2) рефлексивно; 4) симметрично.

3 Таблица истинности

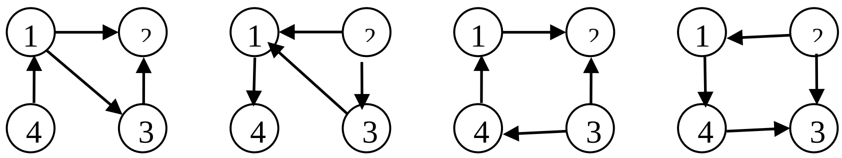
x	*y*	*F (x,y)*
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

задает

1) дизъюнкцию; 2) эквиваленцию; 3) конъюкцию; 4) импликацию.

4 Матрице инцидентности $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ соответствует орграф

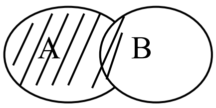
1) 2) 3) 4)



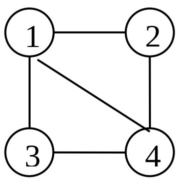
Билет № 4

1 В группе, состоящей из 5 девушек и 10 юношей, можно выбрать делегацию из 3 девушек и 2 юношей

1) 6 способами; 3) 15 способами;
2) 50 способами; 4) 450 способами.

2 Диаграмме  соответствует операция

1) B\A 2) A\B 3)A$\cup$B 4)A$\cap$B.

3 Граф  имеет степень вершины 4

4 Логической функции

X	У	F (X,Y)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

соответствует СДНФ

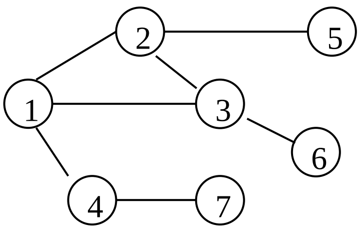
1) $\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\, y$; 2) $x\bar{y} \vee xy$; 3) $x\bar{y} \vee \bar{x}y$; 4) $xy \vee \bar{x}\bar{y}$.

Билет № 5

1 Мощность декартова произведения множеств *A={1;2;3}* и *B={a;b;c;d}*.

2 Бинарное отношение «быть перпендикулярными прямым»
1) симметрично; 2) транзитивно; 3) эквивалентно; 4) рефлексивно.

3 Цикл графа



1) 1-3-6; 2) 5-6-7-1; 3) 1-2-3; 4) 5-2-1-4-7.

4 Эквивалентные булевы функции

1) $\overline{x \wedge y}$;	1)1;
2) $\overline{x \vee y}$;	2) $\overline{x} \vee \overline{y}$;
3) $x \wedge 1$;	3) $\overline{x} \wedge \overline{y}$;
4) $x \vee 1$.	4) x.

Таблица ответов

Билет	Задача	Ответ
1	1	1-3, 2-1, 3-2, 4-4
	2	3
	3	2
	4	4
2	1	2
	2	3,4
	3	3
	4	4
3	1	1
	2	4
	3	2
	4	3
4	1	4
	2	2
	3	3
	4	1
5	1	12
	2	1
	3	3
	4	1-2, 2-3, 3-4, 4-1

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 **Галушкина, Ю.И.** Конспект лекций по дискретной математике / Ю.И. Галушкина, А.Н. Марьямов. – М.: Айрис-пресс, 2007.

2 **Горбатов, В.А.** Фундаментальные основы дискретной математики / В.А. Горбатов. – М.: Наука, Физматлит, 2000.

3 **Ерусалимский, Я.М**. Дискретная математика / Я.М. Ерусалимский. – М.: Вузовская книга, 2005.

4 **Ивлев, Ю.В.** Логика: учебник для вузов / Ю.В. Ивлев. – М.: 1998.

5 **Карпов, Ю.Г.** Теория автоматов / Ю.Г. Карпов. – СПб.: Питер, 2003.

6 **Кузнецов, О.П.** Дискретная математика для инженеров / О.П. Кузнецов. – М.: 2005.

7 **Новиков, Ф.А.** Дискретная математика для программистов / Ф.А. Новиков. – СПб.: Питер, 2004.

8 **Палий, И.А.** Дискретная математика: курс лекций / И.А. Палий. – М.: Эксмо, 2008.

9 **Просветов, Г.И.** Дискретная математика: задачи и решения: учеб. пособие / Г.И. Просветов. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.

10 **Яблонский, С,В.** Введение в дискретную математику: учеб. пособие для вузов / под ред. В.А. Садовничего; – 3-е изд. – М.: Высш. школа, 2002.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

1 Элементы математической логики

1 а), в), г), е).
5 а), ж) – тождественно ложные, б), в), г), д) – тождественно истинные,
е), з) – выполнимые.
7 а), е), ж) – ложные, б), в), г), д) – истинные.
14 256.
15 $f_1 = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee xyz$, $f_1 = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$;

$f_2 = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$, $f_2 = (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$;

$f_3 = \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$, $f_3 = (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$;

$f_4 = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xyz$, $f_4 = (x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$.

21 $f = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z$.

2 Множества и отношения

1. *а*) $A=B$, *б*) $A \subset B$, *в*) $B \subset A$, *г*) $A \subset B$, *д*) $A=B$.
2 $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $A \cap B = \{3, 6, 9\}$; $A \setminus B = \{4, 5, 7, 8\}$; $B \setminus A = \{10\}$;
$A \Delta B = \{4, 5, 7, 8, 10\}$; $\bar{A} = \{1, 2, 10\}$; $\bar{B} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.
3 *а*) {-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}; *б*) {4}; *в*) {2, 4, 5, 6}; *г*) {0, 1, 2, 3, 4, 6, 8}; *д*) {-2, -1, 5, 6}.
4 {Ø, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}.
7 *а*), *б*), *г*).
13 $A \times B$ = {(a, 3), (a, 4), (a, 5), (b, 3), (b, 4), (b, 5)}; $B \times A$ = {(3, a), (3, b), (4, a), (4, b), (5, a), (5, b)}; $A \times A$ = {(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)}; $B \times B$ = {(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)}; $A \times B \times A$ = {(a, 3, a), (a, 4, a), (a, 5, a), (b, 3, a), (b, 4, a), (b, 5, a), (a, 3, b), (a, 4, b), (a, 5, b), (b, 3, b), (b, 4, b), (b, 5, b)}.

15 $\Re$ = {(1, 2), (1, 6), (2, 2), (2, 6)}; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16 $\Re$ = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)}.
17 $\Re$ = {(3, 2), (4, 7), (5, 2)}.

19 $\Re^{-1}$ = {(3, 2), (4, 2), (4, 3)}; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

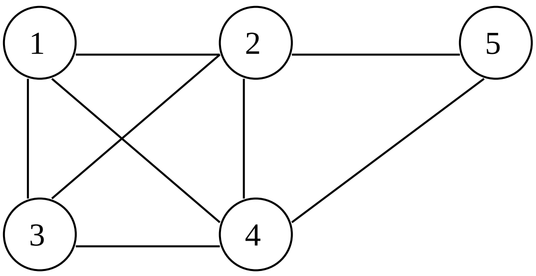
21 Не рефлексивно, не антирефлексивно, не симметрично, не антисимметрично, не транзитивно.
22 Не рефлексивно, антирефлексивно, не симметрично, антисимметрично, транзитивно.

23 Не рефлексивно, антирефлексивно, симметрично, не антисимметрично, не транзитивно.
24 *а*) нет; *б*) да; *в*) да; *г*) нет.
26 *а*) биективна; *б*) сюръективна; *в*) инъективна; *г*) инъективна; *д*) биективна; *е*) сюръективна.
27 f ([0; 1])= [3; 4]; f ([1; 2])= (0; 3]; f ((-2; 2])= [0; 4]; f ((-2; -0,5)$\cup$(0; 1)) = (0;4); f^{-1}([0; 3])= [-2; -1] $\cup$[1; 2]; f^{-1}([3; 4]) = [-1; 1].
28 $f(g(x))=sin^2 x;\ g(f(x))=sin(x^2);\ \varphi(g(x))=sin^3 x+1;$
$g(\varphi(x))=\sin(x^3+1);\ f(g(\varphi(x)))=sin^2(x^3+1);\ g(f(\varphi(x)))=sin((x^3+1)^2).$

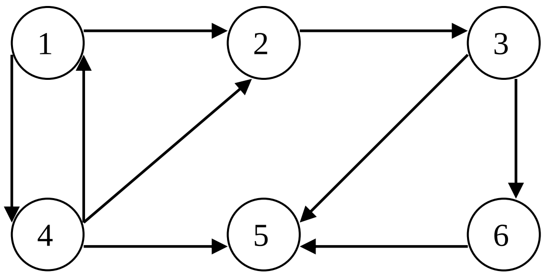
3 Элементы комбинаторики

4 *а*) 12; *б*) 105; *в*) 64; *г*) 15; *д*) 120; *е*) 5040. **5.** *а*) 60; *б*) 125. **6.** *а*) 10; *б*) 35. **7.** *а*) 2; *б*) 5. **8**. 1320. **10.** 479 001 600. **12.** 1320.
13 5005. **15.** *а*) 60; *б*) 420. **16**. 210. **17**. 60. **18.** *а*) 48; *б*) 72.
19 182. **20.** 210. **21.** 125 **22.** 220. **23.** *а*) 36; *б*) 16. **25**. 720.
26 а) 720; б) 120. **27**. 79 200. **28**. 105. **29**. 50.
31 $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.
32 *а*) 1120x^4; *б*) 80a^3b^2; *в*) -20xy^3; *г*) 126$x^{10}y^{12}$; -126x^8y^{15}.
33 *а*) 150; *б*) 30.

4 Элементы теории графов



1



2

3 *а*) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{\{v_1,v_2\}, \{v_1,v_3\}, \{v_2,v_3\}, \{v_2,v_4\}, \{v_2,v_5\}, \{v_3,v_4\}, \{v_4,v_5\}\}$;

$$б)\ A=\begin{pmatrix} 0&1&1&0&0\\ 1&0&1&1&1\\ 1&1&0&1&0\\ 0&1&1&0&1\\ 0&1&0&1&0 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1 \end{pmatrix}.$$

4 *а*) $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$, $E = \{\{v_1,v_2\}, \{v_1,v_4\}, \{v_1,v_5\}, \{v_2,v_3\}, \{v_2,v_4\}, \{v_4,v_1\}, \{v_4,v_3\}, \{v_5,v_4\}, \{v_5,v_6\}, \{v_6,v_3\}\}$;

$$б)\ A=\begin{pmatrix} 0&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix};$$

	12	14	15	23	24	41	43	54	56	63
1	**-1**	**-1**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
2	**1**	**0**	**0**	**-1**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
3	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
4	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**-1**	**-1**	**1**	**0**	**0**
5	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**-1**	**0**
6	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**-1**

$$5\ \ A=\begin{pmatrix} 0&1&0&1&1&0\\ 1&0&1&1&1&0\\ 0&1&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&1&0\\ 1&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix};$$

	12	14	15	23	24	25	35	36	45
1	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
2	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
3	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
4	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
5	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
6	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**

6 Матрица смежности:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
2	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
3	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
4	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
5	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
6	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
7	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
8	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
9	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Матрица инцидентности:

	12	14	23	25	26	36	45	47	48	56	69	78	89
1	**-1**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
2	**1**	**0**	**-1**	**-1**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
3	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
4	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**-1**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**
5	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**
6	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**-1**	**0**	**0**
7	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**
8	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**-1**
9	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**

7 Матрица инцидентности:

	12	13	24
1	**1**	**1**	**0**
2	**1**	**0**	**1**
3	**0**	**1**	**0**
4	**0**	**0**	**1**

8 Матрица инцидентности:

	12	13	14	15	23	34	51
1	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**0**	**0**	**1**
2	**1**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**0**
3	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**-1**	**0**
4	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
5	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**-1**

9 *а*) да; *б*) да;

11 *а*) 2; *б*) 4; *в*) 5.

12 В полном графе с n вершинами каждая вершина инцидентна $(n-1)$ ребру. В произведении $n(n-1)$ каждое ребро учтено дважды. *а*) да, при $n = 4$; *б*) нет.

17 $\Re = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$; матрица отношения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Учебное издание

Задорожная Наталья Сергеевна
Морозова Анна Викторовна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА С ЭЛЕМЕНТАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Учебно-методическое пособие

Редактор
Корректор
Техническое редактирование и корректура
Компьютерная правка

Подписано в печать . Формат 60x84/16.
Бумага газетная. Ризография. Усл. печ. л. .
Уч.-изд.л. . Тираж экз. Изд. № 27. Заказ №

Ростовский государственный университет путей сообщения
Ризография РГУПС

Адрес университета: 344038, г. Ростов н/Д, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, 2.