РОСЖЕЛДОР
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»
(ФГБОУ ВО РГУПС)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий по общеобразовательной дисциплине «Математика»

для специальности
09.02.09 Веб-разработка

Базовая подготовка
среднего профессионального образования

Автор: Токарева Е.С.

Ростов-на-Дону
2025

СОДЕРЖАНИЕ

Пояснительная записка

Федеральными государственными образовательными стандартами среднего профессионального образования предусматривается формирование умений самостоятельного принятия решений и профессиональных задач, заниматься самообразованием. В этой связи, большое значение приобретает организация самостоятельной деятельности обучающихся на учебных занятиях. Разработка данного методического материала является актуальной, поскольку способствует развитию таких умений.

Методические указания предназначены для организации самостоятельной работы обучающихся на уроках математики.

Методические указания содержат следующие элементы: содержание практической работы, теоретические сведения к практической работе, решение типовых примеров для выполнения работы, вопросы для подготовки к практической работе, рекомендуемую литературу.

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а также для получения практических навыков. Практические задания выполняются обучающимися самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а также с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания.

Данная работа содержит методические указания к практическим работам по дисциплине «Математика» и предназначена для обучающихся по специальностям среднего профессионального образования.

Цель методических указаний: оказание помощи обучающимся в выполнении практических работ по предмету «Математика».

Целями проведения практических занятий являются:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины «Математика»;

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- выработка при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность.

Все представленные варианты практических работ даны одинаковой степени трудности.

Практическая работа выполняется в сроки, установленные в соответствии с календарно-тематическим планом. За каждую практическую работу обучающийся должен получить положительную оценку.

Промежуточной формой изучения дисциплины является экзамен для всех специальностей. Обучающиеся, не выполнившие все практические работы, не аттестуются и к экзамену не допускаются. Методические указания разработаны в соответствии с учебной программой. В зависимости от содержания они могут выполняться обучающимися индивидуально или фронтально.

Практическое занятие №1

«Выполнение арифметических операций с действительными и комплексными числами, преобразования числовых выражений»

Цель работы: выполнять арифметические действия над числами, сочетая различные приемы, проверка и углубление знаний по теме

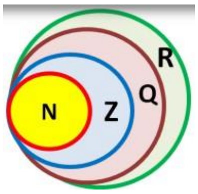
Сведения из теории:

Иррациональным числом называется бесконечная десятичная непериодическая дробь. Иррациональные числа, как и рациональные, могут быть положительными и отрицательными.

Например, число 0,123456…., в котором после запятой записаны подряд все натуральные числа, является положительным иррациональным числом. Число -5, 246810…., в которм после запятой записаны подряд все четные числа, является отрицательным иррациональным числом.

Числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $-\sqrt[3]{3}$, π также являются иррациональными, так как можно доказать, что они могут быть представлены в виде бесконечных десятичных непериодических дробей.

Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел.



Действия с бесконечными десятичными дробями.

Известно как выполняются действия над конечными десятичными дробями. Арифметические операции над действительными числами, т.е. бесконечными десятичными дробями, заменяются операциями над их приближениями.

Пример. Вычислить приближенные значения $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Решение:

1. Воспользуемся калькулятором и найдем значения $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$

Имеем $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots\ldots$, $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots.$

2. Найдем $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ с точностью до единицы

$\sqrt{2} \approx 1{,}4$ и $\sqrt{3} \approx 1{,}7$, тогда $\sqrt{2}+\sqrt{3} \approx 1{,}4+1{,}7 = 3{,}1 \approx 3$

3. Найдем $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ с точностью до одной десятой

$\sqrt{2} \approx 1{,}41$ и $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, тогда $\sqrt{2}+\sqrt{3} \approx 1{,}41+1{,}73 = 3{,}14 \approx 3{,}1$

4. Найдем $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ с точностью до одной сотой

$\sqrt{2} \approx 1{,}414$ и $\sqrt{3} \approx 1{,}732$, тогда $\sqrt{2}+\sqrt{3} \approx 1{,}414+1{,}732 = 3{,}146 \approx 3{,}15$

Анальгично, вычисляя произведение $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ с точностью до 0,1, получаем

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\approx 1{,}41\cdot 1{,}73=2{,}4393\approx 2{,}4$$

Все основные действия над рациональными числами сохраняются и для действительных чисел (переместительный, сочетательный и распределительный законы, правила сравнения, правила раскрытия скобок и т.д.).

Действительные числа обладают следующими свойствами:

Свойства сложения и вычитания

1. а + в = в + а (переместительное свойство сложения)
2. (а + в) + с = а + (в + с) (сочетательное свойство сложения)
3. а + 0 = а
4. а + (-а) = 0

Свойства умножения и деления

1. а*в = в*а (переместительное свойство умножения)
2. (а*в)*с = а*(в*с) (сочетательное свойство умножения)
3. а*1 = а
4. а * 0 = 0
5. –а = (-1)*а
6. а*$\frac{1}{a}$ = 1 (а$\neq$0)

Пример. Выяснить, каким числом (рациональным или иррациональным) является числовое значение выражения:

1) $(\sqrt{8}-3)(3+2\sqrt{2})$

Решение: Перемножим скобки

$(\sqrt{8}-3)(3+2\sqrt{2})=3\sqrt{8}+2\sqrt{16}-9-6\sqrt{2}=6\sqrt{2}+8-9-6\sqrt{2}=-1$

Ответ: является рациональным числом

2) $(\sqrt{27}-2)(3-3\sqrt{3})$

Решение: Перемножим скобки

$$(\sqrt{27}-2)(3-3\sqrt{3})=3\sqrt{27}-3\sqrt{81}-6+6\sqrt{3}=9\sqrt{3}-27-6+6\sqrt{3}=$$
$$=15\sqrt{3}-33$$

Ответ: является иррациональным числом

3) $(\sqrt{50}+4\sqrt{2})\sqrt{2}$

Решение: Раскроем скобки (распределительный закон)

$(\sqrt{50}+4\sqrt{2})\sqrt{2}=\sqrt{100}+4\cdot 2=10+8=18$

Ответ: является рациональным числом

4) $(5\sqrt{3}+\sqrt{27})\vdots\sqrt{3}$

Решение: Раскроем скобки (распределительный закон)

$$(5\sqrt{3}+\sqrt{27}) \vdots \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = 5 + 3 = 8$$

Ответ: является рациональным числом

5) $(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2$

Решение: Раскроем скобки (формулы сокращенного умножения)

$$(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 8$$

Ответ: является рациональным числом

6) $(\sqrt{5}-1)^2 - (2\sqrt{5}+1)^2$

Решение: Раскроем скобки (формулы сокращенного умножения)

$$(\sqrt{5}-1)^2 - (2\sqrt{5}+1)^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1 - 20 - 4\sqrt{5} - 1 = -15 - 6\sqrt{5}$$

Ответ: является иррациональным числом

Пример. Вычислить:

1. $\sqrt{63} \cdot \sqrt{28} = \sqrt{7 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 7 \cdot 3 \cdot 2 = 42$

2. $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100} = 10$

3. $\sqrt{50} \vdots \sqrt{8} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{50}{8}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

4. $\sqrt{12} \vdots \sqrt{27} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{12}{27}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

5. 2,31+ 7,65 + 8,69 = 7,65 + (2,31 + 8, 69). Ответ: «Применим переместительное свойство, а затем либо выполним сложение по порядку, либо применим сочетательное свойство».

6. 14,537 – (2,537 + 5,9)= (14,537 – 2,537) + 5,9= 12+ 5,9 = 17, 9.Ответ: «Применим свойство вычитания суммы из числа».

7. $({}^3/_8+{}^1/_4)\cdot 16={}^3/_8\cdot 16+{}^1/_4\cdot 16 = 6+4=10$. Применить распределительное свойство умножения.

8. $3{}^1/_4\cdot 7=(3+{}^1/_4)\cdot 7 = 3\cdot 7+{}^1/_4\cdot 7=21+{}^1/_2=21{}^1/_2$

9. $5{}^3/_8\cdot{}^2/_7+1{}^5/_8\cdot{}^2/_7={}^2/_7\cdot(5{}^3/_8+1{}^5/_8)={}^2/_7\cdot 7=2$

10. ${}^{14}/_{15}X-{}^2/_{15}X=X\cdot({}^{14}/_{15}-{}^2/_{15})=X\cdot{}^{12}/_{15}={}^4/_{15}X$.

Мнимые числа, которыми мы дополняем действительные числа, записываются в виде bi, где i – мнимая единица, причем $i^2 = -1$.

Исходя из этого, получим следующее определение комплексного числа.

Комплексным числом называется выражение вида a + bi, где a и b - действительные числа. При этом выполняются условия:

а) Два комплексных числа $a_1 + b_1i$ и $a_2 + b_2i$ равны тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

б) Сложение комплексных чисел определяется правилом:

$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$.

в) Умножение комплексных чисел определяется правилом:

$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 - a_2b_1)i$.

Запись комплексного числа в виде $a + bi$ называют алгебраической формой комплексного числа, где a – действительная часть, bi – мнимая часть, причем b – действительное число.

Комплексное число $a + bi$ считается равным нулю, если его действительная и мнимая части равны нулю: $a = b = 0$

Комплексное число $a + bi$ при $b = 0$ считается совпадающим с действительным числом a: $a + 0i = a$.

Комплексное число $a + bi$ при $a = 0$ называется чисто мнимым и обозначается bi: $0 + bi = bi$.

Два комплексных числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются сопряженными.

Над комплексными числами в алгебраической форме можно выполнять следующие действия.

1) Сложение. Суммой комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называется комплексное число z, действительная часть которого равна сумме действительных частей z_1 и z_2, а мнимая часть - сумме мнимых частей чисел z_1 и z_2, то есть $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Числа z_1 и z_2 называются слагаемыми.

Сложение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1°. Коммутативность: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

2°. Ассоциативность: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

3°. Комплексное число $-a-bi$ называется противоположным комплексному числу $z = a + bi$. Комплексное число, противоположное комплексному числу z, обозначается $-z$. Сумма комплексных чисел z и $-z$ равна нулю: $z + (-z) = 0$

Пример. Выполните сложение $(3 - i) + (-1 + 2i)$.

$(3 - i) + (-1 + 2i) = (3 + (-1)) + (-1 + 2)i = 2 + 1i$.

2) Вычитание. Вычесть из комплексного числа z_1 комплексное число z_2, значит найти такое комплексное число z, что $z + z_2 = z_1$.

Теорема. Разность комплексных чисел существует и притом единственна.

Пример. Выполните вычитание $(4 - 2i) - (-3 + 2i)$.

$(4 - 2i) - (-3 + 2i) = (4 - (-3)) + (-2 - 2)i = 7 - 4i$.

3) Умножение. Произведением комплексных чисел $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ называется комплексное число z, определяемое равенством: $z = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$.

Числа z_1 и z_2 называются сомножителями.

Умножение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1°. Коммутативность: $z_1z_2 = z_2z_1$.

2°. Ассоциативность: $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$

3°. Дистрибутивность умножения относительно сложения:

$(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$.

4°. $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ - действительное число.

На практике умножение комплексных чисел производят по правилу умножения суммы на сумму и выделения действительной и мнимой части.

Пример. Выполните умножение (2 + 3i) (5 – 7i).

1 способ. (2 + 3i) (5 – 7i) = (2· 5 – 3· (- 7)) + (2· (- 7) + 3· 5)i = (10 + 21) + +(- 14 + 15)i = 31 + i.

2 способ. (2 + 3i) (5 – 7i) = 2· 5 + 2· (- 7i) + 3i· 5 + 3i· (- 7i) = 10 – 14i + +15i + 21 = 31 + i.

4) Деление. Разделить комплексное число z_1 на комплексное число z_2, значит найти такое комплексное число z, что $z \cdot z_2 = z_1$.

Теорема. Частное комплексных чисел существует и единственно, если $z_2 \neq 0 + 0i$.

На практике частное комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} =$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Пример. Найти частное $\frac{2 - 3i}{5 + 2i}$.

1 способ.

$$\frac{2-3i}{5+2i} = \frac{2\cdot 5 + (-3)\cdot 2}{5^2 + 2^2} + \frac{5\cdot(-3) - 2\cdot 2}{5^2 + 2^2} i = \frac{10-6}{25+4} + \frac{-15-4}{25+4} i = \frac{4}{29} - \frac{19}{29} i.$$

2 способ.

$$\frac{2-3i}{5+2i} = \frac{(2-3i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} = \frac{10-4i-15i-6}{5^2-(2i)^2} = \frac{4-19i}{25+4} = \frac{4}{29} - \frac{19}{29} i.$$

5) Возведение в целую положительную степень.

а) Степени мнимой единицы.

Пользуясь равенством $i^2 = -1$, легко определить любую целую положительную степень мнимой единицы. Имеем:

$i^3 = i^2\, i = -i$,

$i^4 = i^2\, i^2 = 1$,

$i^5 = i^4\, i = i$,

$i^6 = i^4\, i^2 = -1$,

$i^7 = i^5\, i^2 = -i$,

$i^8 = i^6\, i^2 = 1$ и т. д.

Это показывает, что значения степени i^n, где n – целое положительное число, периодически повторяется при увеличении показателя на 4 .

Поэтому, чтобы возвести число i в целую положительную степень, надо показатель степени разделить на 4 и возвести i в степень, показатель которой равен остатку от деления.

Пример. Вычислите: $(i^{36} + i^{17}) \cdot i^{23}$.

$i^{36} = (i^4)^9 = 1^9 = 1$,

$i^{17} = i^{4\cdot 4+1} = (i^4)^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$.

$i^{23} = i^{4\cdot 5+3} = (i^4)^5 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i$.

$(i^{36} + i^{17}) \cdot i^{23} = (1 + i)(-i) = -i + 1 = 1 - i$.

б) Возведение комплексного числа в целую положительную степень производится по правилу возведения двучлена в соответствующую степень, так как оно представляет собой частный случай умножения одинаковых комплексных сомножителей.

Пример. Вычислите: $(4 + 2i)^3$

$(4 + 2i)^3 = 4^3 + 3\cdot 4^2\cdot 2i + 3\cdot 4\cdot (2i)^2 + (2i)^3 = 64 + 96i - 48 - 8i = 16 + 88i.$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант	2 вариант
№1 Найдите сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел $z_1 = -2 + 4i$ и $z_2 = 2 - 2i$. Полученные результаты изобразить на координатной плоскости. №2 Возвести число $z = 1 - 4i$ во вторую и третью степень №3 Вычислить. 1) $\frac{0{,}35^2\cdot\sqrt{3{,}27}}{0{,}9^3\cdot\sqrt{0{,}8}} =$ 2) $\frac{3\div\frac{2}{5}-0{,}09\div(0{,}15\div2\frac{1}{2})}{0{,}32*6+0{,}03-(5{,}3-3{,}88)+0{,}67}$	№1 Найдите сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел $z_1 = -1 + 3i$ и $z_2 = 2 - 3i$. Полученные результаты изобразить на координатной плоскости. №2 Возвести число $z = 4 - 3i$ во вторую и третью степень №3 Вычислить. 1) $\frac{0{,}75^2\cdot\sqrt{3{,}2}}{0{,}5^3\cdot\sqrt{0{,}2}} =$ 2) $1\frac{7}{20} \div 2{,}7 + 2{,}7 \div 1{,}35 +$ $+ (0{,}4 \div 2\frac{1}{2}) \cdot (4{,}2 - 1\frac{3}{40})$
3 вариант	**4 вариант**
№1 Найдите сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел $z_1 = -2 + 2i$ и $z_2 = 2 + i$. Полученные результаты изобразить на координатной плоскости. №2 Возвести число $z = 1 - 2i$ во вторую и третью степень №3 Вычислить. 1) $\frac{0{,}27^2\cdot\sqrt{3{,}25}}{0{,}9^3\cdot\sqrt{0{,}8}} =$ 2) $(10 \div 2\frac{2}{3} + 7{,}5 \div 10) \cdot$ $(\frac{3}{40} - \frac{7}{30} * 0{,}25 + \frac{157}{360})$	№1 Найдите сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел $z_1 = -3 + 3i$ и $z_2 = 2 - 3i$. Полученные результаты изобразить на координатной плоскости. №2 Возвести число $z = 2 - 3i$ во вторую и третью степень №3 Вычислить. 1) $\frac{0{,}65^2\cdot\sqrt{3{,}22}}{0{,}4^3\cdot\sqrt{0{,}5}} =$ 2) $(\frac{0{,}216}{0{,}15} + \frac{2}{3} \div \frac{4}{15}) + (\frac{196}{225} - \frac{7{,}7}{24\frac{3}{4}}) +$ $+0{,}695 \div 1{,}39$

Контрольные вопросы:

1. Какие числа называются натуральными?
2. Какие действия всегда выполнимы на множестве натуральных чисел?
3. Какие числа называются целыми?
4. Какие действия всегда выполнимы на множестве целых чисел?
5. Какие числа называются рациональными?
6. Какие действия всегда выполнимы на множестве рациональных чисел?
7. Какие числа называются иррациональными?

8. Какие числа называются действительными?
9. Какие действия всегда выполнимы на множестве действительных чисел?
10. Арифметические операции над действительными числами
11. Имеет уравнение $x^2 = -1$решение на множестве комплексных чисел?
12. Что называется комплексным числом?
13. Назовите мнимую и действительную части комплексного числа и какими символами их обозначают?
14. В каком случае комплексное число совпадает с действительным числом?
15. В каком случае комплексное число называется чисто мнимым?
16. Имеет смысл понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел?
17. Какие комплексные числа называются сопряженными?
18. Что называется суммой двух комплексных чисел?
19. Какие комплексные числа называют противоположными?
20. Что называется разностью двух комплексных чисел?
21. Что называется произведением двух комплексных чисел?
22. Что называется частным двух комплексных чисел?

Практическое занятие №2
«Решение прикладных задач на проценты»

Цель работы: отработка и закрепление навыка решения прикладных задач на проценты.

Сведения из теории:

Слово «процент» происходит от латинского слова procentum, что буквально означает «за сотню» или «со ста». Процентами очень удобно пользоваться на практике, так как они выражают части целых чисел в одних и тех же сотых долях. Процент – это частный вид десятичных дробей, сотая доля целого.

Если мы говорим о предметах из некоторой заданной совокупности – деньгах, зарабатываемых в семье, материалах, продуктах питания, то процент, разумеется, 100 сотых частей самого себя. Поэтому обычно говорят, что она «принимается за 100 процентов».

Если речь идет о проценте от данного числа, то это число и принимается за 100 %. Например, 1 % от зарплаты – это сотая часть зарплаты; 100 % зарплаты – это сто сотых частей зарплаты. Т. е. вся зарплата. Подоходный налог с зарплаты берется в размере 13 %, т. е. 13 сотых от зарплаты. 3,2 % жира в молоке означает, что 3,2 сотых массы продукта составляет жир (или, другими словами, в каждых 100 граммах этого продукта содержится 3,2 грамма жира).

Основные сокращенные процентные отношения.

1. 200 % = 2;
2. 25 % = $\frac{1}{4}$
3. 100 % = 1;

4. 10% = $\frac{1}{10}$

5. 50 % = $\frac{1}{2}$;

6. 1 % = $\frac{1}{100}$

Различные обозначения:

1 %	0,01	$\frac{1}{100}$
18 %	0,18	$\frac{18}{100}$
р %	0,01р	$\frac{p}{100}$

Нахождение процентов данного числа.

Чтобы найти р % от а , надо а·0,01 р .

Пример. 15 % от 90 составляет: 90·0,15 = 13,5.

Нахождение числа по его процентам.

Если известно, что р % числа а равно в, то а = в : 0,01 р

Пример. 2 % числа х составляют 140.

а = 140 : 0,02;

а = 7000.

Ответ: 7000

Нахождение процентного отношения чисел.

Чтобы найти процентное отношение чисел, надо отношение этих чисел умножить на 100 %:

$$\frac{a}{в}\cdot 100\ \%.$$

Простые проценты.

1) Одна величина больше (меньше) другой на р %.

а – первоначальное значение

р – количество процентов

в – новое значение

а) **если а возросло на р %, то новое значение равно**

в = а(1 + 0,01р).

б) **если а уменьшили на р %, то новое значение равно**

в= а(1 – 0,01р).

в) **если а сначала уменьшили на р%, затем полученное число увеличили на р%, то новое значение равно**

в = а(1 – 0,01р) (1 + 0,01р) = а(1 –(0,01р)^2) (*)

Пример.

Увеличить число 60 на 20%.

Решение:

$60 \bullet (1+0{,}01 \bullet 20) = 60 \bullet (1+0{,}2) = 60 \bullet 1{,}2 = 72$.

Ответ: 72

Пример. В мебельном магазине старые цены заменены новыми. На сколько примерно процентов снижены цены при распродаже мебели?

Цена	Шкаф	Кровать	Стол
Старая	3999 руб.	1205 руб.	1000 руб.
Новая	3000 руб.	900 руб.	752 руб.

А. Примерно на 30%

Б. Примерно на 20%

В. Примерно на 25%

Г. Примерно на 80%

Решение:

Шкаф - $3000=3999\cdot(1-p)$

$p = 999 : 3999$

$p = 0{,}249 = 25\%$

Стол - $752 = 1000 \cdot (1-p)$

$p = 248 : 1000$

$p = 0{,}248 = 25\%$

Ответ: В

Пример. Из 59 девятиклассников школы 22 человека приняли участие в городских спортивных соревнованиях. Сколько приблизительно процентов девятиклассников приняли участие в соревнованиях?

А. 0,37%

Б. 27%

В. 37%

Г. 2,7%

Решение:

Составим пропорцию

59 уч.------------100%

22 уч.-------------x %

$X = 22 \cdot 100 : 59 = 37{,}2\%$

Ответ: В

Пример. Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 100 руб. за штуку. Торговая наценка составляет 25%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 1300 рублей.

Решение:

Пусть новая цена горшков будет в

в = 100 (1 + 0,25) = 125 р

1300 : 125 =10,4

Можно купить 10 горшков

Ответ: 10

Пример. Цену товара снизили на 30 %, затем новую цену повысили на 30%. Как изменилась цена товара?

Решение.

Пусть первоначальная цена товара а, тогда:

а – 0,3а = 0,7а – цена товара после снижения,
0,7а + 0,7а ·0,3 = 0,91а – новая цена.
1,00 – 0,91 = 0,09 или 9 %.
Используя формулу (*), получим:

$$a\left(1-\frac{p^2}{100^2}\right)=a\left(1-0,3^2\right)=0,91a$$

Ответ: цена снизилась на 9 %.

Сложные проценты.

а – первоначальное значение величины;
в – новое значение величины;
р – количество процентов;
п – количество промежутков времени.

в = а (1 + 0,01р)^{п},

Если изменение происходит на разное число процентов, то формула выглядит так **в = а·(1 + 0,01р$_1$)(1 + 0,01р$_2$) … (1 + 0,01р$_п$)**

Пример. Вкладчик открыл счет в банке, внеся 2000 р. на вклад, годовой доход по которому составляет 12% и решил в течение 3 лет не брать процентные начисления. Какая сумма будет лежать на его счете через 3 года.

Решение:

в = а · (1 + 0,12)^3

в = 2000 · (1 + 0,12)^3 = 2808 руб.

Ответ: 2808 руб.

Пример. Зарплату рабочему повысили сначала на 10 %, а через год еще на 20 %. На сколько процентов повысилась зарплата по сравнению с первоначальной?

Решение:

Пусть зарплата рабочего была а, тогда
в = а (1 + 0,1)(1 + 0,2) = 1,32а
1,32а – а = 0,32а

Ответ: на 32 %.

Пример. Летом рюкзак стоил 880 руб. Осенью цены на рюкзаки снизились на 25%. А зимой еще на 25%. Сколько рублей заплатит покупатель, если купит рюкзак зимой?

А. 830 руб.
Б. 660 руб.
В. 495 руб.
Г. 165 руб.

Решение:

Первоначальная цена - 880 руб.
Пусть новая цена будет в руб.
в = 880 (1 – 0,25) (1 – 0,25) = 880 (1- 0,25)^2 = 495 р.

Ответ: В

Пример. Фрукты подешевели на 25%. Сколько фруктов можно теперь купить на те же деньги, на которые раньше покупали 6 кг.

Решение:

Раньше стоимость одного 1 кг – а руб.

Сейчас стоимость 1 кг – а (1 – 0,25) = 0,75 а руб.

Стоимость 6 кг - 6 · а

$\frac{6a}{0{,}75a} = 8$ (кг) – можно купить сейчас.

Ответ: 8 кг.

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант	2 вариант
№1. При смешивании первого раствора соли, концентрация которого 40%, и второго раствора этой же соли, концентрация которого 48%, получился раствор с концентрацией 42%. В каком отношении были взяты первый и второй растворы?	№1. При смешивании первого раствора кислоты, концентрация которого 30%, и второго раствора этой же кислоты, концентрация которого 50%, получили раствор, содержащий 45% кислоты. В каком отношении были взяты первый и второй растворы?
№2. В сосуд, содержащий 5 литров 12−процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?	№2. В сосуд, содержащий 7 литров 14-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?
№3. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 20 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?	№3. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 82 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?
№4. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20 000 рублей, через два года был продан за 15 842 рублей.	№4. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20 900 рублей, через два года был продан за 16 929 рублей.
№5. Митя, Антон, Гоша и Борис учредили компанию с уставным капиталом 200000 рублей. Митя внес 14% уставного капитала, Антон —	№5. Митя, Артем, Паша и Женя учредили компанию с уставным капиталом 200000 рублей. Митя внес 18% уставного капитала, Артем —

42000 рублей, Гоша — 0,12 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Борис. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1000000 рублей причитается Борису? Ответ дайте в рублях. №6. Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?	60000 рублей, Паша — 0,18 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Женя. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1100000 рублей причитается Жене? Ответ дайте в рублях. №6. Имеется два сплава. Первый содержит 15% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 140 кг, содержащий 30% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?
3 вариант №1. При смешивании первого раствора соли, концентрация которого 40%, и второго раствора этой же соли, концентрация которого 65%, получили раствор, содержащий 60% соли. В каком отношении были взяты первый и второй растворы? №2. В сосуд, содержащий 8 кг 11-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 3 кг воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора? №3. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 16 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды? №4. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 19 800 рублей, через два года был продан за	4 вариант №1. При смешивании первого раствора соли, концентрация которого 35%, и второго раствора этой же соли, концентрация которого 65%, получили раствор, содержащий 60% соли. В каком отношении были взяты первый и второй растворы? №2. В сосуд, содержащий 8 литров 24-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 4 литра воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора? №3. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 14 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды? №4. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 19100 рублей, через два года был продан за

16 038 рублей. №5. Митя, Антон, Паша и Гоша учредили компанию с уставным капиталом 100 000 рублей. Митя внес 24% уставного капитала, Антон — 55000 рублей, Паша — 0,18 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Гоша. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 600 000 рублей причитается Гоше? Ответ дайте в рублях. №6. Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 30% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?	15471 рубль. №5. Дима, Артем, Гриша и Вова учредили компанию с уставным капиталом 150000 рублей. Дима внес 17% уставного капитала, Артем — 50000 рублей, Гриша — 0,24 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Вова. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 900000 рублей причитается Вове? Ответ дайте в рублях. №6. Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 225 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Контрольные вопросы

1. Что такое процент?
2. Как найти проценты от числа?
3. Как найти число по его процентам?
4. Как процент превратить в десятичную дробь?
5. Что означает, увеличить величину на 10%?
6. Как десятичную дробь превратить в процент?

Практическое занятие №3
«Преобразование рациональных, иррациональных, степенных и показательных выражений»

Цель работы: находить значения корня и степени; выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней и корней.

Сведения из теории:

Повторим определения *понятия степени* с натуральным, нулевым, целым отрицательным и рациональным показателями:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}};\ a^{-n} = 1/(a^n);\ a^0 = 1,\ a \neq 0;\ a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m},$$

$$m \in \boldsymbol{Z},\ n \in \boldsymbol{N},\ n \geq 2.$$

Свойства степеней с рациональным показателем:при любых x и y справедливы равенства:

$$a^x a^y = a^{x+y};$$

$$a^x / a^y = a^{x-y};$$

$$(a^x)^y = a^{xy};$$

$$(ab)^x = a^x b^x;$$

$$(a/b)^x = a^x / b^x.$$

Степень с действительным показателем

Свойства степеней с действительным показателем:

1. $a^{x/y} = a^{(xk)/(yk)}$, $a>0$, $y, k \in \boldsymbol{N}$, $x \in \boldsymbol{Z}$.

2. $a^x>0$, $a>0$, $x \in \boldsymbol{R}$ (любая степень положительного числа положительна).

3. $a^x>1$ при$a>1$, $x>0$.

4. $a^x<1$ при$a>1$, $x<0$.

5. $1^x=1$ (любая степень единицы равна единице).

6. $a^x<1$ при $0<a<1$, $x>0$.

7. $a^x>1$ при $0<a<1$, $x<0$.

8. Если $a>1$, $a\neq1$, то для любого положительного числа b существует единственное действительное число x такое, что $a^x=b$ при $b>0$.

9. Любая положительная степень нуля равна нулю: $a^0 = 1$

Кроме перечисленных свойств важно отметить три свойства, на которых основано решение простейших показательных уравнении и неравенств:

10. Если $a^x=a^y$, то $x=y$ при $a>0$, $x, y\neq1$.

11. Если $a^x<a^y$, то $x<y$ при $a>0$.

12. Если $a^x<a^y$, то $x>y$ при $0<a<1$.

Правила действия над степенями с действительным показателем выражаются формулами (тождествами):

13. $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$.

14. $a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$.

15. $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

16. $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$ при $a>0$, $b>0$.

17. $|ab|^{\alpha}=|a|^{\alpha}|b|^{\alpha}$ при $ab>0$.

18. $(a/b)^{\alpha}=a^{\alpha}/b^{\alpha}$при$a>0$, $b>0$.

19. $|a/b|^{\alpha}=|a|^{\alpha}/|b|^{\alpha}$при$ab>0$.

Формулы, обратные формулам 1-7, так же верны.

Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a. Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a. Запись $\sqrt{a}$ читается «квадратный корень из а», опуская при этом слово «арифметический». $\sqrt{a}$, а-подкоренное выражение, а знак $\sqrt{\ }$ -радикал (от латинского - корень).

Корнем n-й степени из числа а называется такое число b, n-я степень которого равна а, т. е. b – корень n-й степени из а $\Leftrightarrow$ $b^n = a$

Очевидно, что в соответствии с основными свойствами степеней с натуральными показателями, из любого положительного числа существует два противоположных значения корня четной степени, например, числа 4 и -4 являются корнями квадратными из 16, так как $(-4)^2 = 4^2 = 16$, а числа 3 и -3 являются корнями четвертой степени из 81, так как $(-3)^4 = 3^4 = 81$.

Кроме того, не существует корня четной степени из отрицательного числа, поскольку четная степень любого действительного числа неотрицательна. Что же касается корня нечетной степени, то для любого действительного числа существует только один корень нечетной степени из этого числа. Например, 3 есть корень третьей степени из 27, так как $3^3 = 27$, а -2 есть корень пятой степени из -32, так как $(-2)^5 = 32$.

В связи с существованием двух корней четной степени из положительного числа, введем понятие арифметического корня, чтобы устранить эту двузначность корня.

Неотрицательное значение корня n-й степени из неотрицательного числа называется арифметическим корнем.

Обозначение: $\sqrt[n]{a}$ – корень n-й степени.

Число n называется степенью арифметического корня. Если n=2, то степень корня не указывается и пишется $\sqrt{a}$. Корень второй степени принято называть квадратным, а корень третьей степени – кубическим.

$$\sqrt{a} = в,\ в^2 == а,\ а \geq 0,\ \ в \geq 0$$

$$\sqrt[n]{a} = в,\ в^n = а$$

1. n - четное

$а \geq 0,\ \ в \geq 0$ $\qquad (\sqrt{a})^2 = а,\ а \geq 0$

2. n - нечетное

а, в - любые $\qquad (\sqrt[n]{a})^n = а$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

а, если $а \geq 0$ $\qquad$ - а, если $а < 0$

$$\sqrt{(a-в)^2} \quad = \quad |a-в|$$

а - в. если а $\geq$ в   в - а, если а $<$ в

Свойства корней

1. $\sqrt{ав}=\sqrt{a}\sqrt{в}$, а $\geq$ 0, в $\geq$ 0
2. $\sqrt[n]{ав}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{в}$, а ≥ 0, в ≥ 0
3. $\sqrt{\frac{a}{в}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{в}}$, а $\geq$ 0, в $>$ 0
4. $\sqrt[n]{\frac{a}{в}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{в}}$, а ≥ 0, в > 0
5. $\sqrt[mn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^k}$,а ≥ 0
6. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$, m, n, k - натуральные числа

*Пример***.** Вычислите: $\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}$.

Решение: используя свойства степеней, имеем:

$$\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}=\sqrt[5]{\left(7-\sqrt{17}\right)\left(7+\sqrt{17}\right)}=\sqrt[5]{7^2-(\sqrt{17})^2}=\sqrt[5]{49-17}=$$
$$=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2.$$

*Пример***.** Вычислите: $\dfrac{7^{-1}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}-64^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{-2}}{5^{-1}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}}$.

Решение: упростим заданное выражение, использую свойства степеней:

$$\frac{7^{-1}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}-64^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{-2}}{5^{-1}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{7}\cdot 49^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}}{\frac{1}{5}-9^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{7}\sqrt{49}-\sqrt{\frac{1}{64}}\cdot\frac{1}{9}}{\frac{1}{5}-\sqrt{9}}=\frac{\frac{1}{7}\cdot 7-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}}{\frac{1}{5}-3}=$$

$$=\frac{1-\frac{1}{72}}{-2\frac{4}{5}}=\frac{\frac{72}{72}-\frac{1}{72}}{-\frac{14}{5}}=\frac{\frac{71}{72}}{\left(-\frac{14}{5}\right)}=\frac{71}{72}\cdot\left(-\frac{5}{14}\right)=-\frac{355}{1008}.$$

Пример. Вычислите: $\dfrac{8^{-\frac{2}{3}}\cdot 25^{-\frac{1}{2}}-2^{-1}}{64^{0,25}\cdot 2^{0,5}}$.

Решение: упростим заданное выражение, использую свойства степеней:

$$\frac{8^{-\frac{2}{3}}\cdot 25^{-\frac{1}{2}}-2^{-1}}{64^{0,25}\cdot 2^{0,5}}=\frac{(2^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}}{(2^6)^{0,25}\cdot 2^{0,5}}=\frac{2^{-2}\cdot\sqrt{\frac{1}{25}}-\frac{1}{2}}{2^{1,5}\cdot 2^{0,5}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}{2^2}=\frac{\frac{1}{20}-\frac{1}{2}}{4}=$$

$$=\frac{-\frac{9}{20}}{4}=-\frac{9}{80}.$$

Пример. Упростите выражение:

1. $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{xy}+\sqrt[3]{y}\right)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}\right)\left(\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=$
$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\left(\sqrt[6]{x}\right)^3+\left(\sqrt[6]{y}\right)^3\right)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=x-y.$

2. $\sqrt{21-12\sqrt{3}}=\sqrt{12-12\sqrt{3}+9}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2}=\left|2\sqrt{3}-3\right|=2\sqrt{3}-3.$

Задания для самостоятельного решения:

1вариант	2вариант
№1 Вычислить 1) $\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}$ 2) $\sqrt[5]{7^5\cdot 3^5}\div\sqrt{\sqrt{625}}$ 3) $\frac{\left(\sqrt[3]{b^{-2}}\right)^2\cdot b^3}{\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$ 4) $\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^{-1}}}\right)^{\frac{3}{4}}$ 5) $\frac{4\cdot\sqrt[6]{4\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{8\cdot\sqrt[3]{4}}}$ №2 Преобразовать $\left(\frac{3ab}{5cd^{-1}}\right)^4\cdot\left(\frac{ac^{-4}}{b^2d^3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{a^{-2}b^2}{cd^{-3}}\right)^4$	№1 Вычислить 1) $\frac{8^{-\frac{2}{3}}\cdot 25^{-\frac{1}{2}}-2^{-1}}{64^{0,25}\cdot 2^{0,5}}$ 2) $\frac{\sqrt[7]{128}\cdot\sqrt[5]{32}}{\sqrt{81}\cdot\sqrt[3]{64}}$ 3) $\frac{\left(\sqrt[3]{b^{-2}}\right)^4\cdot b^5}{\left(\sqrt[3]{b}\right)^5}$ 4) $\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[5]{x^{-1}}}\right)^{\frac{3}{4}}$ 5) $\frac{9\cdot\sqrt[6]{256\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{32\cdot\sqrt[3]{8}}}$ №2 Преобразовать $\frac{3a^3b}{2c}\cdot\sqrt{\frac{4c^3}{9a^5b}}\cdot\frac{2ab}{3xy}\cdot\sqrt{\frac{x^3y^4}{ab^3}}$

3вариант	4вариант
№1 Вычислить 1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}+\sqrt[4]{\frac{16}{625}}-\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}.$ 2) $8^{\frac{2}{3}}-3\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{0,5}.$ 3) $\frac{\left(\sqrt[14]{b^2}\right)^7\cdot b^8}{\left(\sqrt[3]{b}\right)^5}$ 4) $\frac{x^{33}+1}{x^{33}-x^{22}+x^{11}}.$ 5) $\left(2^{\frac{5}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}-3^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\sqrt{36}.$ №2 Преобразовать $\frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{b}}+2\sqrt{\sqrt{a}}.$	№1 Вычислить 1) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{-27}+5\sqrt[4]{0,0081}+3\sqrt[8]{1}.$ 2) $81^{0,25}+4\cdot(0,25)^{\frac{1}{2}}.$ 3) $\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^{-1}}}\right)^{\frac{3}{4}}$ 4) $\frac{\sqrt[9]{\sqrt[3]{m}}}{\sqrt[6]{\sqrt{m}}}$ 5) $\sqrt[3]{54a^{2\frac{1}{3}}}\cdot\sqrt[3]{24a^{\frac{2}{3}}}.$ №2 Преобразовать $\frac{a+2a^{0,5}b^{0,5}+b}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}.$

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные показательные тождества.
2. Перечислите свойства степеней с действительными показателями.
3. Как в выражении $\sqrt[n]{a}$ называется число a?
4. Как в выражении $\sqrt[n]{a}$ называется число n?
5. Как называется неотрицательный по значению корень n-ой степени с неотрицательным покоренным числом?
6. Продолжите определение: корнем n-й степени из неотрицательного числа a, называется такое неотрицательное число *в* …
7. Как называется знак извлечения арифметического корня, произошедший от латинской буквы r?
8. Как называется неотрицательный корень?
9. Как называется корень при $n=2$?
10. Как называется корень при $n=3$?
11. Сформулируйте правило извлечения корня из произведения. Приведите пример.
12. Как выносить множитель за знак радикала? Приведите пример.
13. Сформулируйте правило извлечения корня из дроби. Приведите пример.
14. Как освободиться от иррациональности в знаменателе?
15. Как возвести корень в степень? Приведите пример.
16. Как извлечь корень из корня? Покажите на примере.

Практическое занятие №4
«Преобразование логарифмических выражений»

Цель работы: отработать практические навыки в преобразовании логарифмических выражений с помощью свойств логарифма и основного логарифмического тождества

Сведения из теории:

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени (x), в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b, т.е. $log_a b=x, \Rightarrow a^x=b$.

При работе с логарифмами применяются следующие их свойств, вытекающие из свойств показательной функции:

1. $a^{log_a b}=b$ (где $b>0$, $a>0$ и $a\neq 0$) называют *основным логарифмическим тождеством*.

При любом $a>0$ ($a\neq 0$) и любых положительных x и y выполняются равенства:

2. $log_a 1=0$.

3. $log_a a=1$.

4. Логарифм произведения равен сумме логарифмов: $log_a xy=log_a x+log_a y$.

5. Логарифм частного равен разности логарифмов: $log_a(x/y)=log_a x-log_a y$.

6. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени: $log_a x^k=klog_a x$.

Основные свойства логарифмов широко применяются в ходе преобразования выражений, содержащих логарифмы. Среди них формула перехода к новому основанию: $log_a x=log_b x/log_b a$. Эта формула верна, если обе ее части имеют смысл, т.е. при $x>0$, $a>0$ и $a\neq 0$, $b>0$ и $b\neq 1$).

По правилу логарифмирования степени и основному логарифмическому тождеству получаем:

$log_b x=log_b(a^{log_a x})$, откуда $log_b x=log_a x\cdot log_b a$. Эту формулу так же можно использовать для упрощения выражений.

С помощью формулы перехода можно найти значение логарифма с произвольным основанием a, имея таблицы логарифмов, составленные для какого-нибудь одного основания b. Наиболее употребительны таблицы десятичных и натуральных логарифмов (*десятичными* называют логарифмы по основанию 10 и обозначают *lg*, а *натуральными* логарифмами называют логарифмы по основанию *e*~2,72 и обозначают *ln*).

*Пример***.** Вычислите $log_{0,3}7$.

Решение: воспользуемся формулой перехода к новому основанию и перейдем к основанию 10:

$$log_a x = log_b x / log_b a$$

$$log_{0,3}7 = log_{10}7 / log_{10}0{,}3 = lg7/lg0{,}3.$$

Пользуясь калькулятором или специальными таблицами, например, таблицей В.М. Брадиса, находим значение $lg7=0{,}8451$.

Используя 5 и 3 свойства логарифмов, вычисляем

$$lg0{,}3=lg(3/10)=lg3-lg10=0{,}4771-1=-0{,}5229.$$

Итак, $log_{0,3}7=0{,}8451/(-0{,}5229)=-1{,}6162.$

Пример. Вычислите: $(lg72-lg9)/(lg28-lg7)$.

Решение: используя 5 и 6 свойства логарифмов, вычисляем

$$lg72-lg9=lg(72/9)=lg8=lg2^3=3lg2;$$

$$lg28-lg7=lg(28/7)=lg4=lg2^2=2lg2.$$

Итак, $(lg72-lg9)/(lg28-lg7)=(3lg2)/(2lg2)=3/2=1{,}5$.

Пример. Вычислите, используя определение логарифма числа $\log_{13}\sqrt[5]{169}+\log_{11}\sqrt[3]{121}.$

Решение: вычислим отдельно каждый логарифм:

$$\begin{aligned}
&\log_{13}\sqrt[5]{169}=x, && \log_{11}\sqrt[3]{121}=x,\\
&13^x=\sqrt[5]{169}, && 11^x=\sqrt[3]{121},\\
&13^x=\sqrt[5]{13^2}, && 11^x=\sqrt[3]{11^2},\\
&13^x=13^{\frac{2}{5}}, && 11^x=11^{\frac{2}{3}},\\
&x=\frac{2}{5}. && x=\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Вернемся в пример: $\log_{13}\sqrt[5]{169}+\log_{11}\sqrt[3]{121}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{6+10}{15}=\dfrac{16}{15}=1\dfrac{1}{15}.$

Пример. Вычислите, используя основное логарифмическое тождество: $10^{3\lg 2-1}$.

Решение: используя свойство степени, разложим данное выражение на множители:

$$10^{3\lg 2-1}=10^{3\lg 2}\cdot 10^{-1}.$$

Используя 6 свойство логарифма степени, имеем:

$$10^{3\lg 2-1}=10^{3\lg 2}\cdot 10^{-1}=10^{\lg 2^3}\cdot\frac{1}{10}.$$

Используя основное логарифмическое тождество, имеем:

$$10^{3\lg 2-1}=10^{3\lg 2}\cdot 10^{-1}=10^{\lg 2^3}\cdot\frac{1}{10}=2^3\cdot\frac{1}{10}=\frac{8}{10}=0{,}8.$$

Задания для самостоятельного решения:

1вариант	2вариант
№1. Вычислите: 1) $log_{12} 3+log_{12} 4$; 2) $log_2 48-log_2 3$; 3) $log_3 9^{10}$; 4) $log_{15} \sqrt[3]{225}$; 5) $\frac{log_3 25}{log_3 5}$; 6) $lg\, 4+2\, lg\, 5$. №2. Вычислите $-\log_2 \log_4 \sqrt[8]{\sqrt[4]{\sqrt{2}}}$ №3. Выразите $log_{16} 3$ через логарифм по основанию 2. №4. Найти значение выражения: 1) $log_3 3{,}6-log_3 1{,}4+log_3 1\frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{3}log_{\frac{2}{3}} \sqrt[5]{8}-3\, log_{\frac{2}{3}} 3+\frac{1}{2}log_{\frac{2}{3}} 36$ №5. Вычислите $9^{\log_3 5-\log_{\frac{1}{9}} 10}$ №6 Вычислить $\log_{ab}\frac{\sqrt{b}}{a}+\log_{\sqrt{ab}} b+\log_a \sqrt[3]{b}$,если $\log_b a=2$	№1. Вычислите: 1) $log_{15} 5+log_{15} 3$; 2) $log_5 50-log_5 2$; 3) $log_2 8^7$; 4) $log_{13} \sqrt[5]{169}$; 5) $\frac{log_5 64}{log_5 4}$; 6) $lg\, 900-2\, lg\, 3$. №2. Вычислите $-\log_8 \log_4 \sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt{8}}}$ №3. Выразите $log_{27} 5$ через логарифм по основанию 3. №4. Найти значение выражения: 1) $log_2 0{,}8-log_2 1\frac{1}{8}+log_2 22{,}5$; 2) $2\, log_{\frac{1}{5}} 10-log_{\frac{1}{5}} 28+\frac{3}{2}log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{49}$ №5. Вычислите $81^{\log_9 5-\log_{\frac{1}{81}} 10}$ №6.Вычислить $\log_{\sqrt{a}} b\sqrt[4]{a}+\log_{\sqrt{b}} a+\log_a \sqrt{ab}$, если $\log_a b=2$
3вариант	4вариант
№1. Вычислите: 1) $log_{18} 3+log_{18} 6$; 2) $log_3 54-log_3 2$; 3) $log_2 25^9$; 4) $log_{12} \sqrt[4]{144}$; 5) $\frac{log_7 36}{log_7 6}$; 6) $lg\, 8+3\, lg\, 5$.	№1. Вычислите: 1) $log_{21} 7+log_{21} 3$; 2) $log_5 75-log_5 3$; 3) $log_7 49^{11}$; 4) $log_{14} \sqrt[7]{196}$; 5) $\frac{log_7 64}{log_7 8}$; 6) $lg\, 800-3\, lg\, 2$.

№2. Вычислите $-\log_2 \log_{\frac{1}{4}} \sqrt[8]{\sqrt[4]{\sqrt{32}}}$ №3. Выразите $log_{16} 5$ через логарифм по основанию 2. №4. Найти значение выражения: 1) $log_3 3,6 - log_3 1,4 + log_3 1\frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{3} log_{\frac{2}{3}} \sqrt[5]{8} - 3\, log_{\frac{2}{3}} 3 + \frac{1}{2} log_{\frac{2}{3}} 36$ №5. Вычислите $4^{\log_2 5 + \log_{0,25} 10}$. №6Вычислить $\log_{ab} \frac{\sqrt{b}}{a} + \log_{\sqrt{ab}} b + \log_a \sqrt[3]{b}$, если $\log_b a = 3$	№2.Вычислите $-\log_{\frac{1}{2}} \log_4 \sqrt[8]{\sqrt[4]{\sqrt{128}}}$ №3. Выразите $log_{81} 6$ через логарифм по основанию 3. №4. Найти значение выражения: 1) $log_2 0,8 - log_2 1\frac{1}{8} + log_2 22,5$; 2) $2\, log_{\frac{1}{5}} 10 - log_{\frac{1}{5}} 28 + \frac{3}{2} log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{49}$ №5. Вычислите $16^{\log_2 5 - \log_{0,25} 10}$ №6Вычислить $\log_{\sqrt{a}} b\sqrt[4]{a} + \log_{\sqrt{b}} a + \log_a \sqrt{ab}$, если $\log_a b = 4$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение логарифма числа.

2. Перечислите свойства логарифмов.

Практическое занятие №5
«Вычисление арксинуса, арккосинуса, арктангенса».

Цель работы: формирование алгоритма вычислений значений тригонометрических выражений, в которых участвуют обратные тригонометрические функции

Сведения из теории:

Функция y = arcsin x

По определению арксинуса числа для каждого x∈[−1;1] определено одно число y=arcsinx. Тем самым на отрезке [−1;1] задана функция y=arcsinx,−1≤x≤1. Функция y=arcsinx является обратной к функции y=sinx, где −π/2≤x≤π/2. Поэтому свойства функции y=arcsinx можно получить из свойств функции y=sinx

График функции y=arcsinx симметричен графику функции y=sinx, где −π/2≤x≤π/2 относительно прямой y=x .

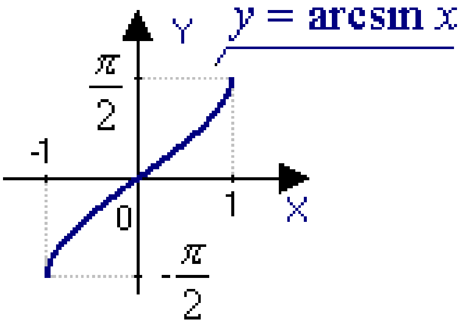


График функции y=arcsinx

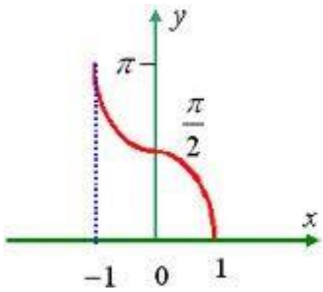
Основные свойства функции y=arcsinx

1. Область определения - отрезок $[-1;1]$
2. Множество значений - отрезок $[-\pi/2;\pi/2]$
3. Функция $y=\arcsin x$ - возрастает.
4. Функция $y=\arcsin x$ является нечётной, так как $\arcsin(-x)=-\arcsin x$

Функция y = arccos x

По определению арккосинуса числа для каждого $x\in[-1;1]$ определено одно число $y=\arccos x$. Тем самым на отрезке $[-1;1]$ определена функция $y=\arccos x$,где $-1\le x\le 1$. Функция $y=\arccos x$ является обратной к функциииу$=\cos x$,где $0\le x\le\pi$

График функции $y=\arccos x$ симметричен графику функции $y=\cos x$,где $0\le x\le\pi$, относительно прямой $y=x$



Функция $y=\arccos x$

Основные свойства функции y=arccosx

1. Область определения - отрезок $[-1;1]$
2. Множество значений - отрезок $[0;\pi]$
3. Функция $y=\arccos x$ убывает

Функция y = arctg x

По определению арктангенса числа для каждого действительного x определено одно число $y=\operatorname{arctg} x$. Тем самым на всей числовой прямой определена функция $y=\operatorname{arctg} x, x\in R$.

Эта функция $y=\operatorname{arctg} x$ является обратной к функции $y=\operatorname{tg} x$,где $-\pi/2\le x\le\pi/2$. График функции $y=\operatorname{arctg} x$ симметричен графику функции $y=\operatorname{tg} x$,где $-\pi/2\le x\le\pi/2$ относительно прямой $y=x$

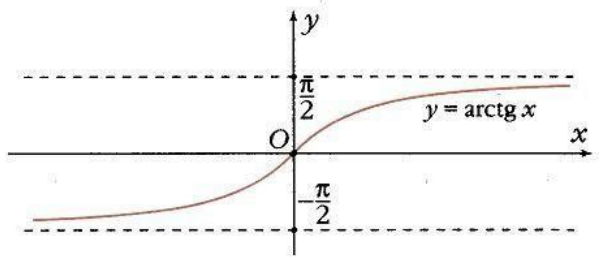


График функции $y=\operatorname{arctg} x$

Основные свойства функции y=arctgx

1. Область определения - множество R всех действительных чисел
2. Множество значений - интервал $(-\pi/2;\pi/2)$
3. Функция $y=\operatorname{arctg} x$ возрастает.
4. Функция $y=\operatorname{arctg} x$ является нечётной, так как $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x$

Функция y=arcctgx

Поэтому, график функции y=arcctgx можно получить из графика функции y=ctgx, x∈(0;π) с помощью преобразования симметрии относительно прямой y=x.

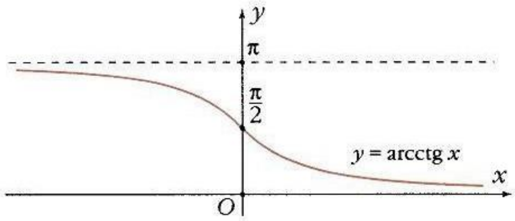


График функции y=arcctgx

Свойства функции y=arcctgx

1. D(f)=(−∞;+∞)

2. E(f)=(0;π)

3. Функция не является ни чётной, ни нечётной, т.к. график функции не симметричен ни относительно начала координат, ни относительно оси y.

4. Функция убывает.

5. Функция непрерывна.

arcctga - это такое число из интервала (0;π), котангенс которого равен a.

Итак, arcctga=t⇔{ctgt=a,0<t<π;ctg(arcctga)=a

Для арккотангенса имеет место соотношение, аналогичное для арккосинуса arcctg(−a)=π−arcctga

Пример. Вычислить

$$arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \in [0;\pi]$$

$$arctg(-1) = -arctg1 = -\frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$$

$$arcctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - arcctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in (0;\pi)$$

$$arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) =- arcsin\frac{1}{2}$$

$$arccos\left(-\frac{5\sqrt{5}}{7}\right) = \pi - arccos\frac{5\sqrt{5}}{7}$$

$$arctg(-1) =- arctg1$$

$$arcctg(-\sqrt{3}) = \pi - arcctg\sqrt{3}.$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

arcsin 0,5736 = 35^0 = *0,6109;*
arccos 0,7771 = 39^0 = *0,6804;*
arctg 4,705 = 78^0 = *1,3614;*
arcctg 3,732 = 15^0 = *0,2618.*
arcsin 0,3010 = 17^0 31’ = *0,3057;*
arctg 2,3 = 66^0 30’ = 1,1606
arcsin 0, 7801 = 51^0 17’ = *0,8951;*
arccos 0,8771 =28^0 42’ = *0,5009.*

Пример. Вычислить значение $A = \sin\left(2arcsin\frac{3}{5}\right)$.

Решение. Если обозначить $\alpha = arcsin\frac{3}{5}$, то $A = sin2\alpha$. Из определения функции $y = arcsinx$ следует, что $sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Так как $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то $cos\alpha \geq 0$ и $cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$.

Однако $sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$,поэтому $A = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.

Задания для самостоятельного решения:

Вариант 1	Вариант 2
№1. Вычислите: 1) $2 \cdot arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + arctg(-1) + arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $3 \cdot arcsin\frac{1}{2} + 4arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 3) $arcsin0.7627 + arccos0{,}8695 + arctg4{,}280$	№1. Вычислите: 1) $2 \cdot arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + arcctg(-1) + arccos\frac{\sqrt{3}}{2})$ 2) $3 \cdot arcsin\frac{1}{2} + 3arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 5arcctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 3) $arcsin0.1616 + arccos0{,}9839 + arctg5{,}113$
№2. Найдите значения остальных тригонометрических функций, если: 1) $cost = -\frac{24}{25}, \pi < t < \frac{3\pi}{2}$ 2) $ctgt = \frac{12}{5}, \pi < t < \frac{3\pi}{2}$	№2. Найдите значения остальных тригонометрических функций, если: 1) $cost = 0{,}6,\ \frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$ 2) $ctgt = \frac{7}{24}, \pi < t < \frac{3\pi}{2}$

№3 Найдите значение выражения: 1) $\sin(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2})$; 2) $\cos(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2})$; 3) $\sin(\mathrm{arctg}\,1+\mathrm{arcctg}\,1)$; 4) $\mathrm{tg}(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{arctg}\sqrt{3})$	№3 Найдите значение выражения: 1) $\cos(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2})$; 2) $\sin(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2})$; 3) $\cos(\mathrm{arctg}\,1+\mathrm{arcctg}\,1)$; 4) $\mathrm{ctg}(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{arctg}\sqrt{3})$
Вариант 3 №1. Вычислите: 1) $5\cdot arcsin\,(-\frac{\sqrt{2}}{2})+arctg(-1)+arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $0{,}5\cdot arcsin\frac{1}{2}+2arccos\,(-\frac{\sqrt{3}}{2})-arcctg\,(-\frac{\sqrt{3}}{3})$ 3) $arcsin0.1650+arccos0{,}7570+arctg6{,}163$ №2. Найдите значения остальных тригонометрических функций, если: 1) $cost=-\frac{5}{13},\ \frac{\pi}{2}<t<\pi$ 2) $tgt=-\frac{3}{4},\frac{\pi}{2}<t<\pi$ №3 Найдите значение выражения: 1) $\sin(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2})$; 2) $\cos(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2})$; 3) $\sin(\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}+\mathrm{arcctg}\sqrt{3})$; 4) $\mathrm{tg}(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{arctg}\sqrt{3})$	Вариант 4 №1. Вычислите: 1) $3\cdot arcsin(-1)+arcctg(-1)+5arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $0{,}5\cdot arccos\frac{1}{2}+2arcsin\,(-\frac{\sqrt{3}}{2})-arcctg\,(-\frac{\sqrt{3}}{3})$ 3) $arcsin0.9951+arccos0{,}9403+arctg2{,}116$ №2. Найдите значения остальных тригонометрических функций, если: 1) $cost=0{,}8,\ 0<t<\frac{\pi}{2}$ 2)$tgt=2{,}4,\ \pi<t<\frac{3\pi}{2}$ №3 Найдите значение выражения: 1) $\cos(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{1}{2})$; 2) $2\sin(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})$; 3) $\cos(\mathrm{arctg}\sqrt{3}+\mathrm{arcctg}\,1)$; 4) $\mathrm{ctg}(\arcsin\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\sqrt{3})$

Контрольные вопросы:

1. Сформулировать определение арксинуса числа?
2. Для каких чисел определен арксинус?
3. Сформулировать определение арккосинуса, арктангенса?
4. Для каких чисел он определен?

Практическое занятие №6
«Построение графиков функций».

Цель работы: закрепить знания по построению графиков функций.
Сведения из теории:

Приведем примерный алгоритм получения необходимых данных.

1. Нахождение области определения функции

Областью определения называется множество значений, которые может принимать x. Обозначение D(f).

2. Нули функции

Для вычисления нулей функции, необходимо приравнять заданную функцию к нулю и решить полученное уравнение. На графике это точки пересечения с осью OX.

3. Четность, нечетность функции

Функция четная, если y(-x) = y(x). Функция нечетная, если y(-x) = -y(x). Если функция четная – график функции симметричен относительно оси ординат (OY). Если функция нечетная – график функции симметричен относительно начала координат.

4. Промежутки знакопостоянства

Расстановка знаков на каждом из интервалов области определения. Функция положительна на интервале - график расположен выше оси абсцисс. Функция отрицательна - график ниже оси абсцисс.

5. Промежутки возрастания и убывания функции.

Монотонность. Если для любой пары чисел x_1 и x_2 из некоторого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ ($x_1 < x_2$) всегда следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), то функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в этом промежутке. В случае когда из неравенства $x_1 < x_2$ ($x_1 < x_2$) следует неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$), функция $f(x)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) в рассматриваемом промежутке.

Функции упомянутых типов называются *монотонными.*

6. Ограниченность. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной на промежутке X, если существует такое положительное число $M > 0$, что $| f(x) |$

$\leq M$ для любого $x \in X$. В противном случае функция называется *неограниченной.*

7.Периодичность. Функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом $T \neq 0$, если для любых x из области определения функции $f(x+T) = f(x)$. Для любого числа x из области определения числа $x+T$ тоже принадлежат области определения.

Пример. Исследуем функцию $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ и построим ее график.

1. Найдем область определения функции. Так как знаменатель $x^2 + 1$ дроби не обращается в нуль, то D(y) - вся числовая прямая.

2. Определим особенности функции. Очевидно, что данная функция четная. Действительно, $y(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} = y(x)$. Поэтому исследуем и построим график функции при $x \geq 0$. Затем эту часть графика отразим влево относительно оси ординат.

3. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Чтобы найти точку пересечения с осью ординат, положим $x = 0$ и получим $y = -1$. Точка пересечения с осью ординат (0; -1). Чтобы найти точку пересечения с осью абсцисс, положим $y = 0$ и получим уравнение $0 = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ или $0 = x^2 - 1$, откуда $x = \pm 1$. Точка пересечения с осью абсцисс (1; 0).

4. Выясним промежутки знакопостоянства функции, т. е. на каких промежутках функция принимает положительные значения, а на каких - отрицательные. Для нахождения промежутка отрицательности функции решим неравенство $\frac{x^2-1}{x^2+1} < 0$ или $x^2 - 1 < 0$, откуда $0 \leq x < 1$. Для нахождения промежутка положительности функции решим неравенство $\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0$ или $x^2 - 1 > 0$, откуда $x > 1$.

5. Определим монотонность функции. Пусть x_2 и x_1 - две точки из промежутка $[0; \infty)$, причем $x_2 > x_1$. Запишем функцию в виде

$$y(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)-2}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}.$$

Найдем разность

$$y(x_2) - y(x_1) = \left(1 - \frac{2}{x_2^2+1}\right) - \left(1 - \frac{2}{x_1^2+1}\right) = \frac{2}{x_1^2+1} - \frac{2}{x_2^2+1} = \frac{2(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}.$$

В этой дроби знаменатель всегда положительный. В числителе множитель $x_2 - x_1 > 0$ (так как $x_2 > x_1$), $x_2 + x_1 > 0$ (так как $x_{1,2} > 0$). Потому числитель дроби также положительный. Следовательно, дробь положительна, так как $y(x_2) - y(x_1) > 0$ или $y(x_2) > y(x_1)$. Поэтому функция y(x) возрастает на промежутке $[0; \infty)$. Учитывая четность функции y(x), на промежутке $(-\infty; 0]$ она убывает.

6. Найдем экстремумы функции. Так как только в точке x = 0 убывание функции сменяется возрастанием, то точка минимума $x_{min}= 0$ и минимум функции $y_{min} = -1$.

7. Выясним поведение функции при больших значениях x. Данная функция имеет вид: $y = 1 - \frac{2}{x^2+1}$. При неограниченном возрастании x знаменатель дроби $x^2 + 1$ также неограниченно возрастает. Поэтому значения дроби $\frac{2}{x^2+1}$ приближаются к нулю, оставаясь положительными. Следовательно, значения функции y(x) неограниченно приближаются к 1, оставаясь меньше 1. Поэтому прямая y = 1 является горизонтальной асимптотой функции y(x).

8. Наименьшее значение функции $y_{наим}=-1$ достигается при x = 0, наибольшего значения нет.

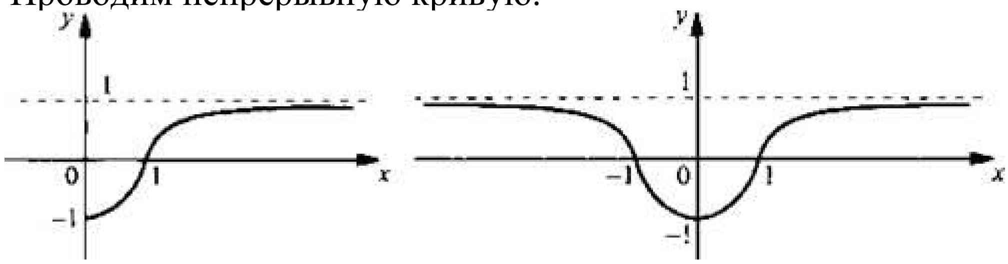
9. Функция ограничена.

10. Функция непрерывная.

11. Выпуклость графика функции установить трудно (она меняется).

Исследованные свойства функции $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ позволяют построить ее график. Сделаем сначала такое построение для промежутка x∈[0; ∞).

Построим точки пересечения с осями координат (0; -1), (1; 0). Учтем, что на промежутке [0; 1) значения y < 0, на промежутке (1; ∞) значения y > 0. Значения функции возрастают от y = -1 и стремятся к значению y = 1 при больших x. Проводим непрерывную кривую.



Учитывая четность данной функции y(x) отражаем кривую, построенную при x ≥ 0, влево симметрично относительно оси ординат. Получаем график функции y(x).

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант	2 вариант
№1 Построить график функции и описать свойства 1) $y = 2x^{-\frac{1}{3}}$ 2) $y = -x^2 + 3$ 3) $y = \frac{3}{x^2-4}$ 4) $y = 3^{x-1} + 1$ 5) $y = 2\log_2(x+3) - 1$ №2 Установите, является ли функция чётной, нечетной или общего вида 1) $y = (x^2+1)^3 - x^4$	№1 Построить график функции и описать свойства 1) $y = 3x^{-\frac{1}{3}}$ 2) $y = -x^2 + 3$ 3) $y = \frac{2}{x^2-1}$ 4) $y = 4^{x-2} + 1$ 5) $y = 2\log_2(x-2) - 2$ №2 Установите, является ли функция чётной, нечетной или общего вида 1) $y = (x^2-2)^3 - x^6$

2) $y = x^3 - x^4$	2) $y = x^5 - x^2$
3 вариант №1 Построить график функции и описать свойства 1) $y = 3x^{-2}$ 2) $y = -x^2 - 2$ 3) $y = \frac{2}{x^2-9}$ 4) $y = 2^{x-1} + 1$ 5) $y = 3\log_2(x+3) - 4$ №2 Установите, является ли функция чётной, нечетной или общего вида 1) $y = (2x^2 - 2)^3 - x^6$ 2) $y = 2x^3 - x^4$	4 вариант №1 Построить график функции и описать свойства 1) $y = 3x^{-1}$ 2) $y = -x^2 - 1$ 3) $y = \frac{-2}{x^2-9}$ 4) $y = 4^{x+1} - 1$ 5) $y = 3\log_2(x-1) - 3$ №2 Установите, является ли функция чётной, нечетной или общего вида 1) $y = (3x^2 - 3)^3 - x^5$ 2) $y = 3x^3 - 2x^4$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определения возрастающей функции и минимума функции.
2. Дайте определения убывающей функции и максимума функции.
3. Дайте определение чётной и нечётной функции.
4. Дайте определение периодической функции.

Практическое занятие №7
«Преобразования графиков функций».

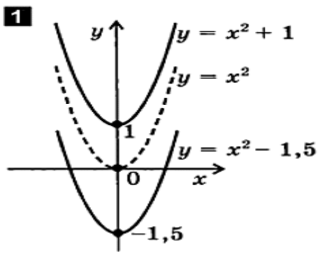
Цель работы: закрепить навык построения графиков с помощью преобразований

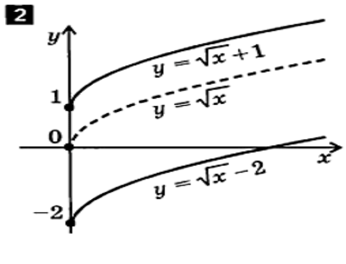
Сведения из теории:

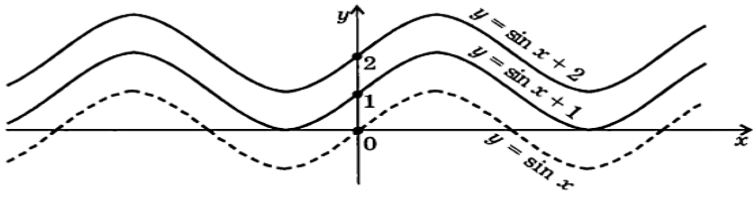
Перенос вдоль оси ординат f(x) ⇒ f(x)+b. Для построения графика функции y = f(x) + b следует:

1. построить график функции y=f(x)
2. перенести ось абсцисс на |b| единиц вверх при b>0 или на |b| единиц вниз при b < 0. Полученный в новой системе координат график является графиком функции y = f(x) + b.

Примеры:

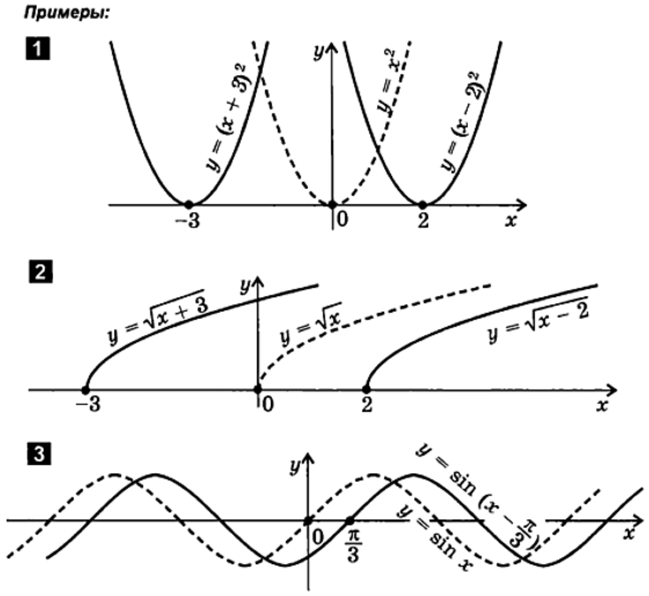






Перенос вдоль оси абсцисс *f(x) ⇒ f(x+a)*. Для построения графика функции y = f(x+a) следует:

1. построить график функции y=f(x)
2. перенести ось ординат на |a| единиц вправо при a>0 или на |a| единиц влево при a<0. Полученный в новой системе координат график является графиком функции y=f(x+a).

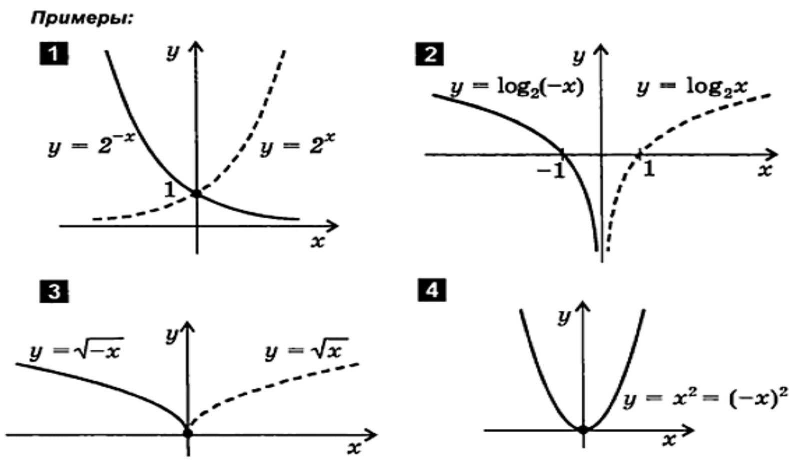


Построение графика функции вида *y=f(-x)*

$$f(x) \Rightarrow f(-x)$$

Для построения графика функции y = f(-x) следует:

1. построить график функции y = f(x)
2. отразить его относительно оси ординат
3. полученный график является графиком функции y = f(-x).



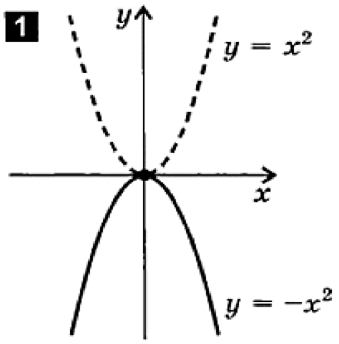
Построение графика функции вида ***y = -f(x)***

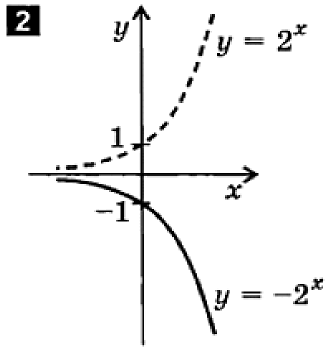
$$f(x) \Rightarrow -f(x)$$

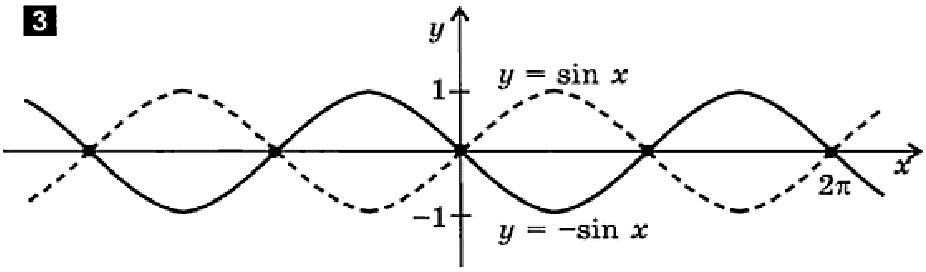
Для построения графика функции y = -f(x) следует:

1. построить график функции y=f(x)
2. отразить его относительно оси абсцисс

Примеры:







Построение графиков четной и нечетной функций

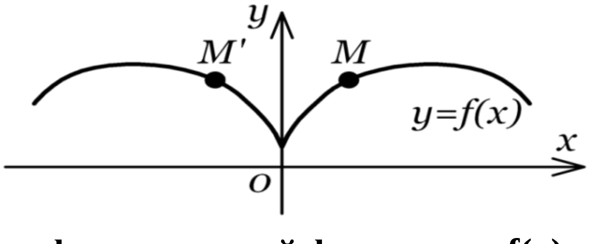
При построении графиков четной и нечетной функции удобно пользоваться следующими свойствами:

1. График четной функции симметричен относительно оси ординат.
2. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Для построения графиков четной и нечетной функции достаточно построить только правую ветвь графика для положительных значений аргумента. Левая ветвь достраивается симметрично относительно начала координат для нечетной функции и относительно оси ординат для четной функции.

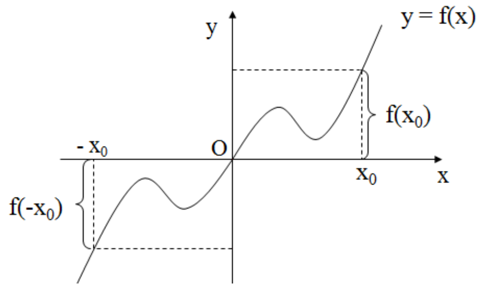
Для построения графика четной функции y = f(x) следует:

1. построить ветвь графика этой функции только в области положительных значений аргумента x≥O.
2. Отразить этот ветвь относительно оси ординат в область отрицательных значений x .



Для построения графика нечетной функции y=f(x) следует:

1. строить ветвь графика этой функции только в области положительных значений аргумента (x≥0).
2. Отразить этот ветвь относительно начало координат в область отрицательных значений x .

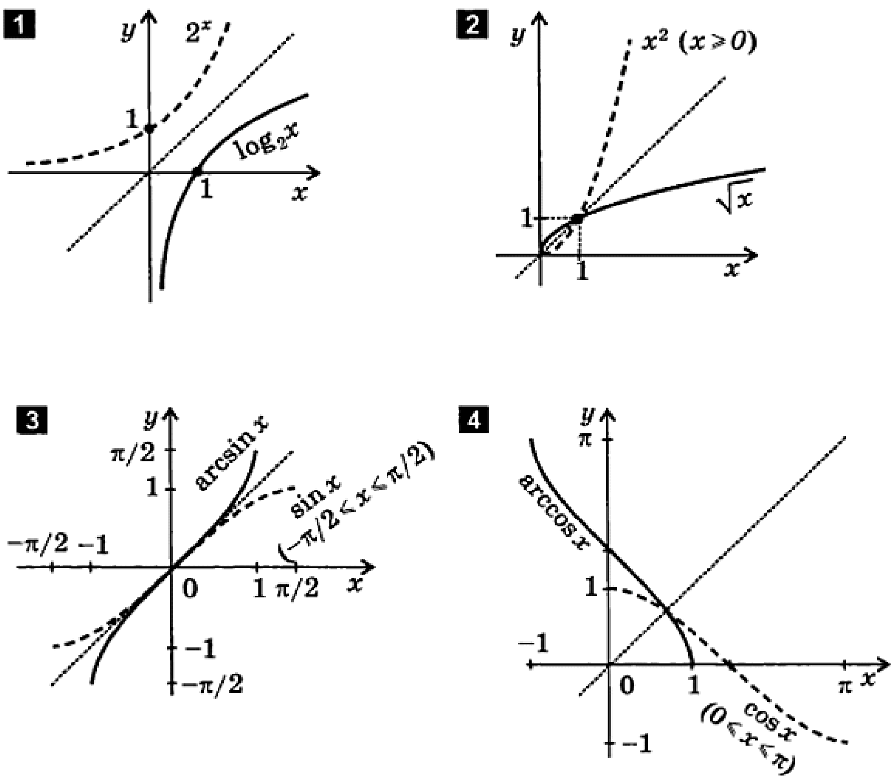


Построение графика обратной функции

Как уже отмечалось, прямая и обратная функции выражают одну и ту же зависимость между переменными x и y, с тем только отличием, что в обратной функции эти переменные поменялись ролями, что равносильно изменению обозначений осей координат. Поэтому график обратной функции симметричен графику прямой функции относительно биссектрисы I и III координатных углов, т. е. относительно прямой *y* = *x.* Таким образом, получаем следующее правило.

Для построения графика функции y = φ (x), обратной по отношению к функции y = f(x), следует построить график y = f(x) и отразить его относительно прямой y = x.

Примеры графиков взаимно обратных функций.

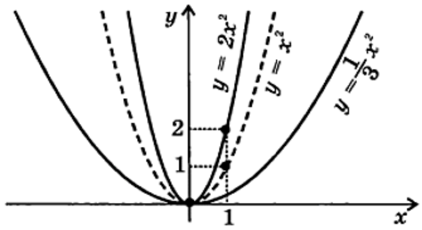


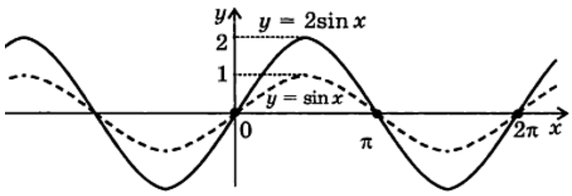
Деформация (сжатие и растяжение) графиков

Сжатие (растяжение) графика вдоль оси ординат *f(x)* ⇒ *A·f(x).*

Для построения графика функции y=A·f(x) следует:

1. построить график функции y=f(x)
2. увеличить его ординаты в A раз при A>1 (произвести растяжение графика вдоль оси ординат) или уменьшить его ординаты в $\frac{1}{A}$ раз при A < 1 (произвести сжатие графика вдоль оси ординат)
3. полученный график является графиком функции y = A·f(x).



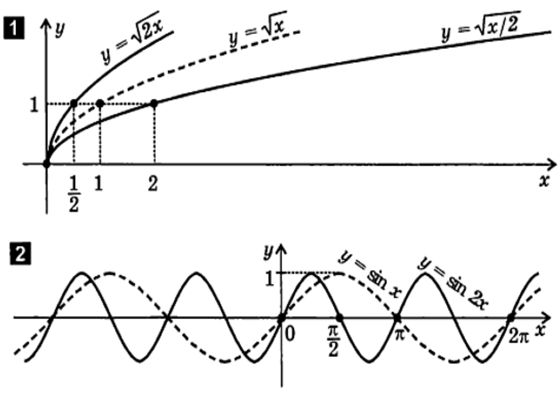


Сжатие (растяжение) графика вдоль оси абсцисс f(x) ⇒ $f(\alpha x)$

Для построения графика функции $y = f(\alpha x)$ следует:

1. построить график функции y=f(x)
2. уменьшить его абсциссы в α раз при α >1 (произвести сжатие графика вдоль оси абсцисс) или увеличить его абсциссы в $\frac{1}{\alpha}$ раз при α < 1 (произвести растяжение графика вдоль оси абсцисс).
3. полученный график является графиком функции $y = f(\alpha x)$

Примеры:



Комбинация переноса, отражения и деформации

Очень часто при построении графиков функций применяют комбинацию приемов. Последовательное применение ряда таких приемов позволяет существенно упростить построение графика исходной функции и нередко свести его в конце концов к построению одной из простейших элементарных функций. Рассмотрим, как с учетом изложенного следует строить графики функций.

Отметим, что порядок упрощения целесообразно проводить в следующей последовательности.

1. Использование четности или нечетности функции.
2. Перенос осей.
3. Отражение и деформация.
4. Построение же графика выполняется в обратной последовательности.

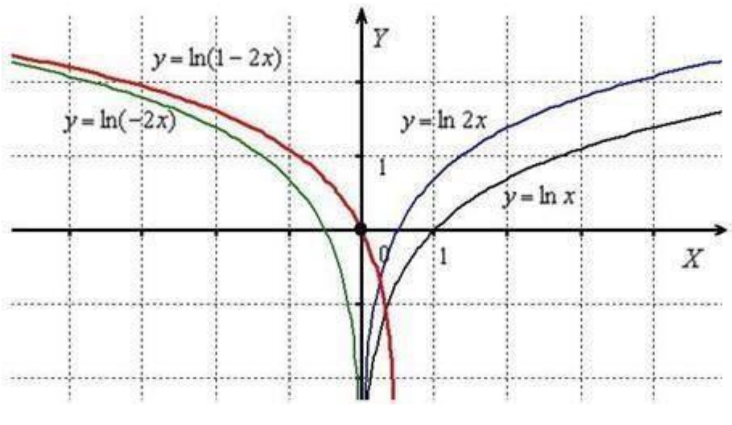
Пример. Построить график функции $y = 3 - ln(1 - 2x)$

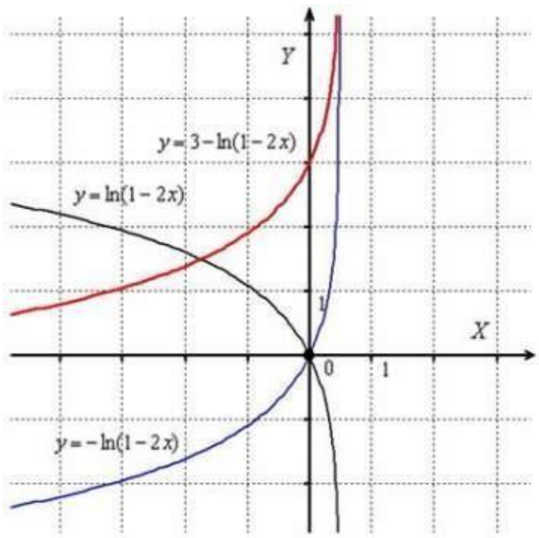
Построение проведем по следующим шагам:

1. построим график натурального логарифма $y = lnx$:

2. сожмём к оси OY в 2 раза: $y = ln2x$;
3. отобразим симметрично относительно оси OY: $y = \ln(-2x)$;
4. сдвинем вдоль оси OX на $\frac{1}{2}$ (!!!) вправо: $y = ln\,(-2\,(x - \frac{1}{2})) = ln(1 - 2x)$:

5. отобразим симметрично относительно оси OX: $y = -ln(1 - 2x)$;
6. сдвинем вдоль оси OY на 3 единицы вверх: $y = 3 - ln(1 - 2x)$:





Пример. Построить график функции $y = sin2x$.

Сначала изобразим график синуса, его период равен $T = 2\pi$:

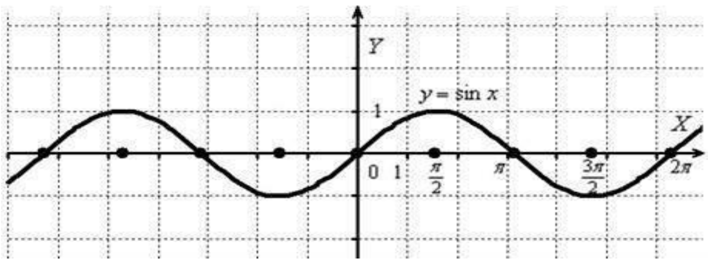
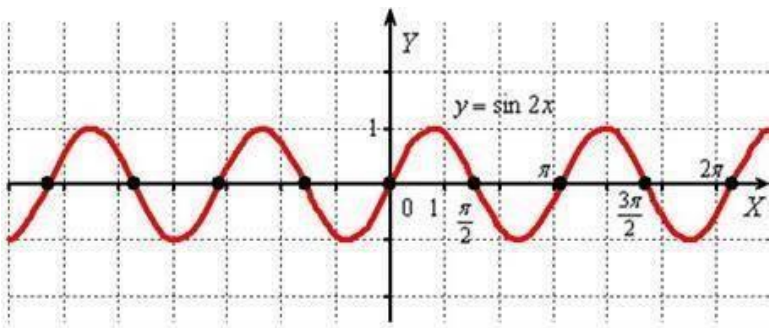
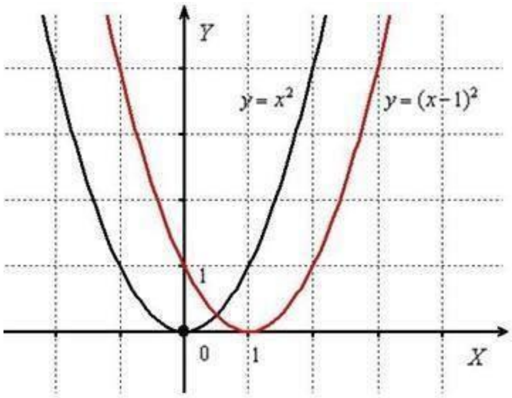


график функции $y = sin2x$ получается путём сжатия графика $y = sinx$ к оси ординат в два раза.



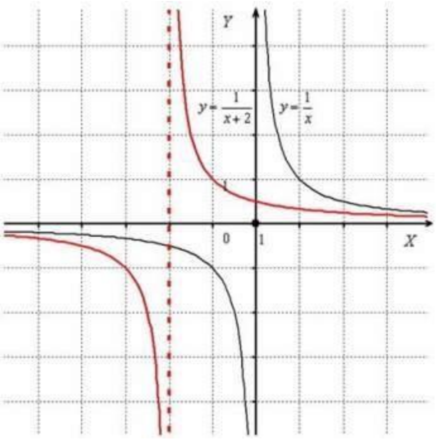
Пример. Построить график функции $y = (x-1)^2$

Построим параболу $y = x^2$ и сдвигаем её вдоль оси абсцисс на 1 единицу вправо:



Пример. Построить график функции $y = \frac{1}{x+2}$

Гиперболу $y = \frac{1}{x}$ (чёрный цвет) сдвинем вдоль оси OX на 2 единицы влево:



Задания для самостоятельного решения:

1 вариант	2вариант
№1 Построить графики функций с помощью преобразований, если даны графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = 2^x$, $y = \log_3 x$ 1) $y = 3\sin x$ 2) $y = -0.5\sin x$ 3) $y = 2^{x+1} + 1$ 4) $y = \log_2(x+1) - 1$ 5) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$, 6) $y = 2tg\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$	№1 Построить графики функций с помощью преобразований, если даны графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = 3^x$, $y = \log_3 x$ 1) $y = 3\cos x$ 2) $y = 3^{x-1} + 2$, 3) $y = \log_2(x+2) + 2$ 4) $y = \sin 2x$, 5) $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$, 6) $y = 3tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

3 вариант	4 вариант
№1 Построить графики функций с помощью преобразований, если даны графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = 2^x$, $y = \log_2 x$ 1) $y = 2\sin x$ 2) $y = -0.25\sin x$ 3) $y = 2^x - 2$ 4) $y = \log_3(x+2) + 2$ 5) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$, 6) $y = 2tg\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$	№1 Построить графики функций с помощью преобразований, если даны графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = 3^x$, $y = \log_2 x$ 1) $y = 2\cos x$ 2) $y = -0.25\cos x$ 3) $y = 3^{x-1} - 3$, 4) $y = \log_2(x-1) - 2$ 5) $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$, 6) $y = 3tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

Контрольные вопросы:

1. Какими формулами задается растяжение (сжатие)?
2. Какими формулами задается параллельный перенос?
3. Как построить точку симметричную относительно осей координат?

Практическое занятие №8
«Решение задач на определение взаимного расположения двух плоскостей»

Цель работы: обобщить и систематизировать знания по разделу «Прямые и плоскости в пространстве»; закрепить умения использовать полученные знания для решения задач.

Сведения из теории:

Две различные плоскости в пространстве либо *параллельны*, либо *пересекаются*.

Параллельность двух плоскостей

Определение. Две плоскости в пространстве называются параллельными, если они не пересекаются.

Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

Основные свойства параллельности плоскостей.

- Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.
- Отрезки параллельных прямых, заключённых между двумя параллельными плоскостями, равны по длине.

Пересечение двух плоскостей

Две плоскости пересекаются по прямой. Общая прямая двух плоскостей называется ребром двугранного угла, образованного при пересечении данных плоскостей. При пересечении двух плоскостей образуются четыре двугранных угла. Если все они равны, то плоскости называются перпендикулярными.

Признак перпендикулярности плоскостей. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Из признака перпендикулярности плоскостей следует, что плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

Угол между плоскостями — наименьший из двугранных углов, образованных при пересечении плоскостей.

Угловая величина двугранного угла — это величина линейного угла данного двугранного угла.

Чтобы найти линейный угол двугранного угла надо из произвольной точки на ребре двугранного угла провести в каждой плоскости по перпендикуляру к этому ребру. Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

Задача. Три прямые, проходящие через одну точку и не лежащие в одной плоскости, пересекают одну из параллельных плоскостей в точках A_1, B_1 и C_1, а другую в точках A_2, B_2, C_2(рис.). Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

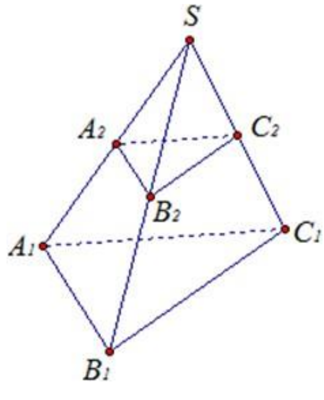


Рис.

Доказательство*:* Пусть данные три прямые пересекаются в точке S.

По свойству 1, если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны. Плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ параллельны и пересечены плоскостью SA_1B_1. Значит, линии пересечения A_1B_1 иA_2B_2 параллельны. Аналогично, плоскость SB_1C_1 рассекает плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ по параллельным прямым B_1C_1 и B_2C_2. А плоскость SA_1C_1 рассекает плоскости $A_1B_1C_1$и$A_2B_2C_2$ по параллельным прямым A_1C_1 иA_2C_2.
1 способ. Углы A и A_1 равны как углы с сонаправленными сторонами. Углы C и C_1 также равны как углы с сонаправленными сторонами. Значит, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны по двум углам.
2 способ. Треугольники SA_1B_1 и SA_2B_2 подобны, так как прямые A_1B_1 иA_2B_2 параллельны. Треугольники SC_1B_1 и SC_2B_2 подобны, так как прямые C_1B_1 и C_2B_2 параллельны. Треугольники SA_1C_1 и SA_2C_2 подобны, так как прямые A_1C_1 и A_2C_2параллельны. Из подобия следует:

$$\frac{SA_2}{SA_1} = \frac{SB_2}{SB_1} = \frac{SC_2}{SC_1} \Rightarrow \frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{B_2C_2}{B_1C_1} = \frac{A_2C_2}{A_1C_1}$$

Из пропорциональности трех сторон вытекает подобие треугольников SA_1B_1 и SA_2B_2.

Задача. Параллельные отрезки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 заключены между параллельными плоскостями α и β (рис.). а) Определите вид четырехугольника $A_1B_1B_2A_2$, $C_1B_1B_2C_2$, $A_1C_1C_2A_2$. б) Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

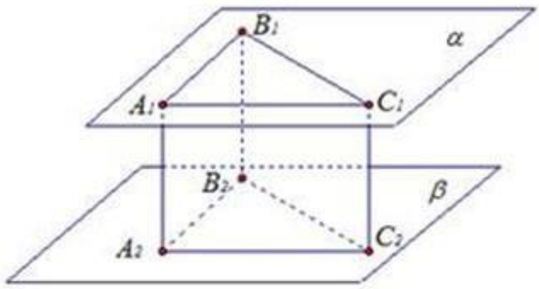


Рис.

Решение. а) Прямые A_1A_2, B_1B_2 параллельны по условию. A_1A_2=B_1B_2 по свойству 2 параллельных плоскостей. В четырехугольнике $A_1B_1B_2A_2$ противоположные стороны параллельны и равны, значит, $A_1B_1B_2A_2$ – параллелограмм. Аналогично доказывается, что четырехугольники $C_1B_1B_2C_2$, $A_1C_1C_2A_2$ – параллелограммы. б) A_1B_1=A_2B_2, B_1C_1=B_2C_2, A_1C_1=A_2C_2 (как противоположные стороны параллелограммов). Значит, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны по трем сторонам.

Задача. Докажите, что диагональ параллелепипеда меньше суммы трех ребер, имеющих общую вершину.

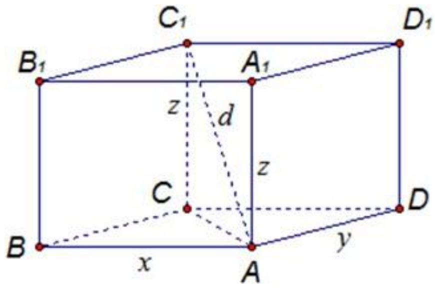
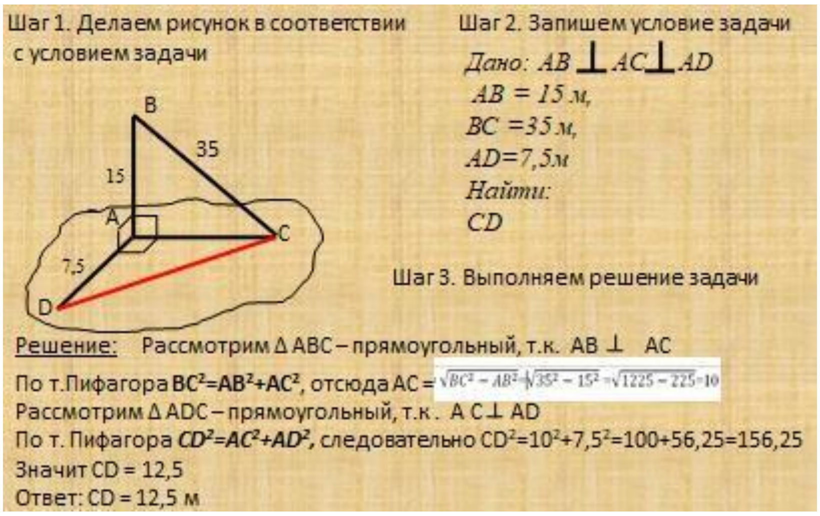


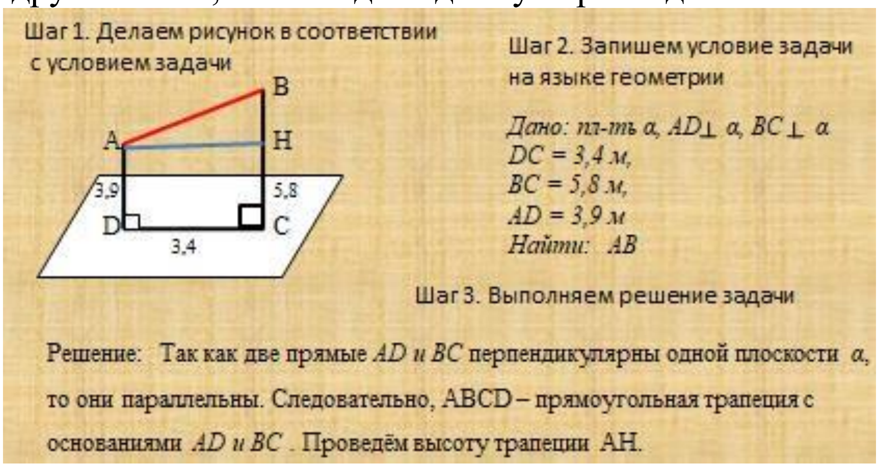
Рис.

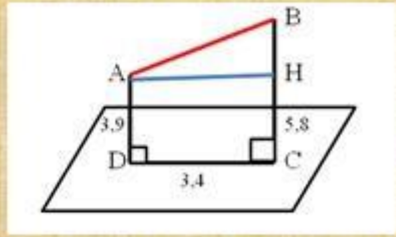
Доказательство: Пусть $AB = x$, $AC_1=d$, $AA_1=z$, $AD=y$. Из любой вершины исходят три ребра, сумма длин которых равна $x+y+z$. Воспользуемся неравенством треугольника. Рассмотрим треугольник ACC_1. $AC_1<AC+CC_1$, $d<z+AC$. Из треугольника ABC имеем: $AC<AB+BC=AB+AD=x+y$. Значит, $d<z+x+y$, что и требовалось доказать.

Задача. Прямые AB, AC и *AD* попарно перпендикулярны. Найдите отрезок *CD,* если: *AB* = 15 м, *BC* =35 м,*AD*=7,5м.



Задача. Верхние концы двух вертикально стоящих столбов, удаленных на расстояние 3,4 м, соединены перекладиной. Высота одного столба 5,8 м, а другого — 3,9 м. Найдите длину перекладины.





AHCD – прямоугольник, у которого AH = CD =3,4м, CH= AD =3,9м.

Рассмотрим Δ ABH – прямоугольный, т.к. AH высота трапеции .

BH = BC-CH= 5,8-3,9= 1,9

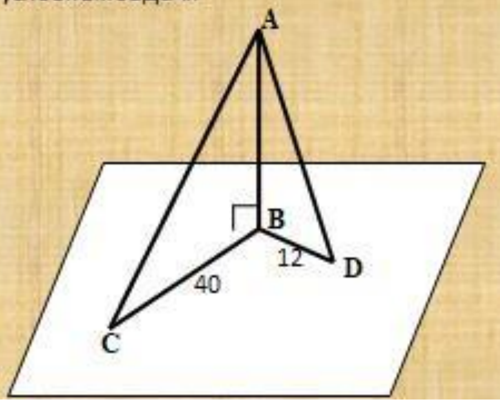
По т. Пифагора $AB^2=AH^2+BH^2$, следовательно

$AB^2= 3,4^2+1,9^2= 11,56+3,61=15,17$

Значит AB ≈ 3,9 м

Задача. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если одна из них на 26 см больше другой, а проекции наклонных равны 12 см и 40 см.

Шаг 1. Делаем рисунок в соответствии с условием задачи



Шаг 2. Запишем условие задачи

Дано: пл-ть α,

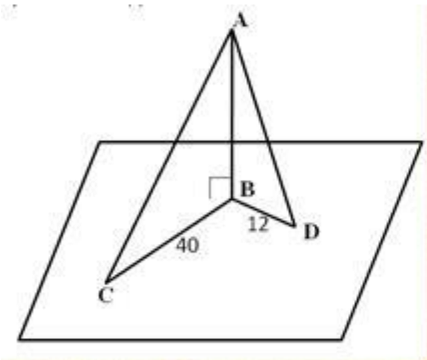
AB – перпендикуляр,

AC и AD – наклонные

AC = AD + 26 см

BC и BD – проекции наклонных

BC = 40 см, BD=12 см



Шаг 3. Выполняем решение задачи

Пусть *AD = x, тогда AC = x + 26.*
Рассмотрим Δ ABD и Δ ABC – прямоугольные, т.к. AB – перпендикуляр.
По т. Пифагора
Для Δ ABD
$AD^2= AB^2+BD^2 \Rightarrow AB^2= AD^2- BD^2$
Для Δ ABC
$AC^2= AB^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2= AC^2- BC^2$

Значит $AD^2- BD^2 = AC^2- BC^2$ подставим данные и получим уравнение
$x^2 – 12^2= (x + 26)^2 – 40^2$
$x^2 – 144= x^2+ 52x+676 - 1600$
$–52x =676 - 1600+144$
$x= -780:(-52)$
$x= 15$
Следовательно, AD = 15 м, тогда AC = 15 + 26 = 41(м)

Ответ: AD = 15 м, AC =41 м

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант	2 вариант
№1. Дан тетраэдр AMNK. Точки B и C - середины ребер MN и NK соответственно. Определить взаимное расположение прямых AK и MK, BC и MK, MN и AK; прямой и плоскости: BC и (AMK), AK и (MNK), AM и (AMK). Ответы обосновать. №2. Дан прямоугольный параллелепипед $AMKBA_1M_1K_1B_1$. Определить взаимное расположение прямых AA_1 и MK; BB_1 и MM_1; MB и BB_1; прямой и плоскости - AB и (MKK_1); BK и (BKK_1); AM и (KMM_1). Ответы обосновать. №3. Прямоугольник MNAB и параллелограмм MNKP не лежат в одной плоскости. Определить взаимное расположение прямых AN и PK; AB и PK; прямой AB и плоскости параллелограмма; прямой, параллельной PM и плоскости прямоугольника.	№1. Дан тетраэдр SMFK. Точки A и C - середины ребер MF и FK соответственно. Определить взаимное расположение прямых: KS и MF; AC и MK; MF и KS; прямой и плоскости: AC и (SMK); MK и (SFK); FK и (SFK). Ответы обосновать. №2. Дан прямоугольный параллелепипед $CNMBC_1N_1M_1B_1$. Определить взаимное расположение прямых: CC_1 и MN; BB_1 и NN_1; MN и MM_1; прямой и плоскости: CB и $(B_1C_1N_1)$; NM и (NMM_1); CB и $(BB_1$ M). Ответы обосновать. №3. Ромб ABCD и параллелограмм MNCD не лежат в одной плоскости. Определить взаимное расположение прямых: AM и CD; AB и MN; прямой MN и плоскости ромба; прямой, параллельной DM и плоскости ромба.
3 вариант	4 вариант
№1. Дан тетраэдр AMCK. Точки B и N - середины ребер MC и CK соответственно. Определить взаимное расположение прямых AK и MK, BN и MK, MC и AK; прямой и плоскости: BN и (AMK), AK и (MCK), AM и (AMK). Ответы обосновать. №2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1\ B_1\ C_1\ D_1$. Определить взаимное расположение прямых AA_1 и BC; BB_1 и CC_1; CB и BB_1; прямой и плоскости - AB и (CDD_1); BA и (BAA_1); AD и (BCC_1). Ответы обосновать. №3. Прямоугольник MNCD и параллелограмм MNKL не лежат в одной плоскости. Определить взаимное расположение прямых CN и LK; CD и LK; прямой CD и плоскости	№1. Дан тетраэдр CMLK. Точки A и F - середины ребер ML и LK соответственно. Определить взаимное расположение прямых: KC и ML; AF и MK; ML и KM; прямой и плоскости: AF и (CMK); MK и (CLK); LK и (CLK). Ответы обосновать №2. Дан прямоугольный параллелепипед $SNMKS_1\ N_1\ M_1\ K_1$. Определить взаимное расположение прямых: SS_1 и MN; KK_1 и NN_1; MN и MM_1; прямой и плоскости: SK и $(K_1S_1N_1)$; NM и (NMM_1); SK и $(KK_1M_1$). Ответы обосновать. №3. Ромб KPCD и параллелограмм MNCD не лежат в одной плоскости. Определить взаимное расположение прямых: KM и CD; KPAB и MN; прямой MN и плоскости ромба;

параллелограмма; прямой, параллельной LM и плоскости прямоугольника.	прямой, параллельной DM и плоскости ромба.

Контрольные вопросы:

1. Какие плоскости называются параллельными?
2. Сформулируйте признак параллельности плоскостей.
3. Взаимное расположение плоскостей (все возможные случаи).
4. Аксиома о наличии общей точки двух плоскостей.
5. Верно ли, что длина перпендикуляра меньше длины наклонной, проведённой из этой же точки?
6. Может ли угол между прямой и плоскостью быть тупым?

Практическое занятие №9

«Решение задач на применение теоремы о трех перпендикулярах»

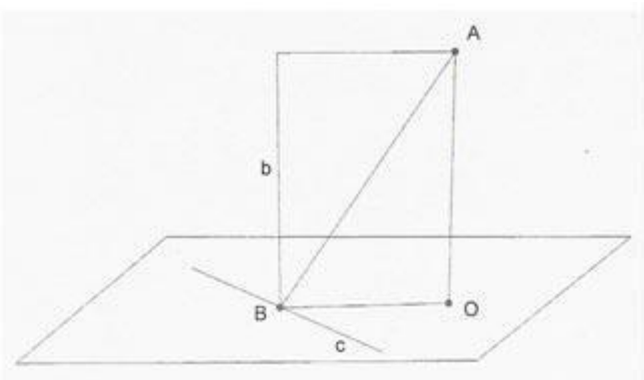
Цель работы: закрепление знаний обучающихся применять теоретические знания к решению задач на доказательство и вычисления, развивать пространственное воображение, развивать умение строить аргументированное и логически верное решение задачи, способствовать дальнейшему развитию навыков самоконтроля.

Сведения из теории:

ТЕОРЕМА О ТРЁХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной.

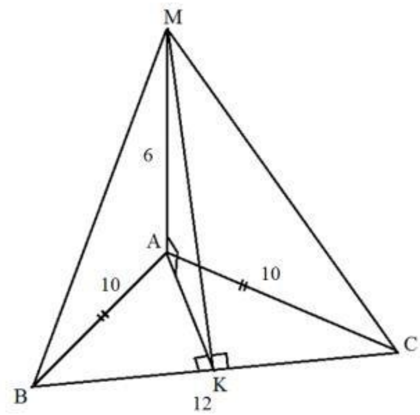
И обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.



Задача. Отрезок AM перпендикулярен плоскости треугольника ABC и имеет длину 6 см. Найдите расстояние от точки M до прямой BC, если AB = AC = 10 см, C=12 см.

Дано: Δ ABC - равнобедренный, т.к. AB = AC = 10 см

АМ – перпендикуляр, $AM \perp (ABC)$, АМ = 6 см
ВС = 12см.
Найти: МК.
Решение.



1) Рассмотрим Δ МАК - прямоугольный, т.к. АМ – перпендикуляр, $AM \perp (ABC)$.

МК – можно назвать наклонной к плоскости Δ МАК, а АК ее проекцией на эту плоскость.

По теореме Пифагора: $MK^2 = AM^2 + AK^2$, АМ= 6, **<u>АК = ?</u>**

2) Рассмотрим Δ АВС - равнобедренный, т.к. по условию АВ = АС = 10 см. Определим чем является АК для Δ АВС. Так как по условию задачи МК – расстояние от точки М до прямой ВС (т.е. проводится перпендикулярно к этой прямой), то по обратной теореме о трех перпендикулярах: если $MK \perp BC$, то $AK \perp BC \Rightarrow$АК - высота в Δ АВС.

Так как ΔАВС – равнобедренный, то АК не только высота, но и медиана $\Rightarrow BK = KC = \frac{12}{2} = 6.$

3) Рассмотрим Δ АКВ – прямоугольный (т.к. АК – высота)

АВ = 10 см (по условию), ВК = 6 (из 2 п. решения).

По теореме Пифагора: $AK^2 = AB^2 - BK^2$

$AK^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$

Т.к. $AK > 0$, то $AK = \sqrt{64} = 8$см.

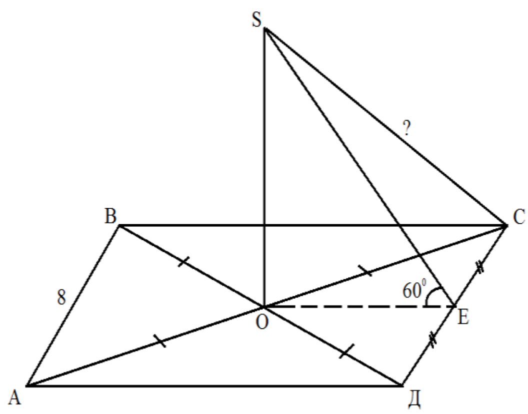
Вернемся в 1 п. решения: $MK^2 = AM^2 + AK^2$

$MK^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

Т.к. $MK > 0$, то $MK = \sqrt{100} = 10$см.

Ответ: 10 см

Задача. Из точки О пересечения диагоналей квадрата АВСД к его плоскости проведен перпендикуляр SO и точка S соединена с серединой стороны ДС (рис. 2). Найдите длину отрезка SC, если АВ= 8 см, $\angle SEO = 60^0$.



Дано: АВСД – квадрат,
АС и ВД – диагонали квадрата,
О – точка пересечения диагоналей.
SO – перпендикуляр, $SO \perp (ABC)$.
Е – середина ДС (т.е. ДЕ = ЕС)
АВ= 8 см, $\angle SEO = 60^0$.
Найти: SC.
Решение.

1) Рассмотрим ΔАДС - прямоугольный, равнобедренный (т.к. по условию АВСД – квадрат, значит, АД=ДС=8). Так как АО = ОС (по свойству диагоналей квадрата) и ДЕ = ЕС (по условию задачи),

то OE – средняя линия Δ АДС $\Rightarrow OE = \frac{АД}{2} = \frac{8}{2} = 4$ (по свойству средней линии треугольника).

2) Рассмотрим ΔSOE - прямоугольный (т.к. по условию SO – перпендикуляр, $SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp OE$). Так как по условию задачи $\angle SEO = 60^0$, то $\angle OSE = 180^0 - (90^0 - 60^0) = 30^0$. Так как катет, лежащий против этого угла равен половине гипотенузы, а гипотенуза в два раза больше этого катета, то получаем, что $SE = 2 \cdot OE = 2 \cdot 4 = 8$см.

3) Рассмотрим ΔSEC и определим его тип:

Так как в равнобедренном ΔСОД (ОД = ОС по условию задачи) ОЕ является медианой (Е- середина стороны ДС по условию задачи), то ОЕ – высота, следовательно, $OE \perp СД$.

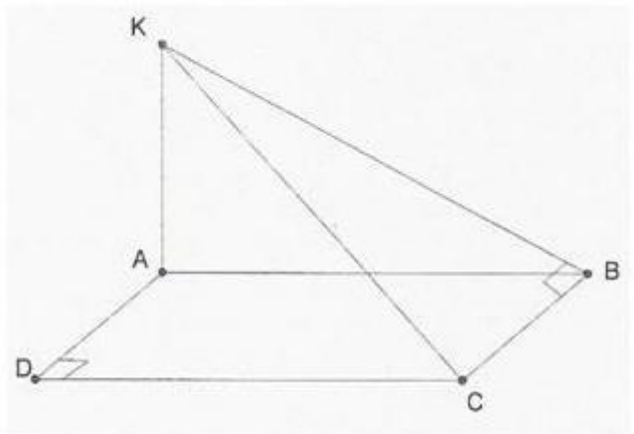
Так как для ΔSOE отрезок OE – является проекцией наклонной SE на плоскость квадрата, то по теореме о трех перпендикулярах следует, что $СД \perp SE$, а, следовательно, ΔSEC – прямоугольный, в котором известно, что $EC = 4$см (по условию задачи $ДЕ = EC = \frac{СД}{2} = \frac{8}{2} = 4$), SE = 8 см (из 2 пункта решения).

По теореме Пифагора $SC^2 = SE^2 + EC^2$

$SC^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80,\ т.к.\ SC > 0,\ то\ SC = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$ см.

Ответ: $4\sqrt{5}$ см.

Задача. Из вершины А квадрата ABCD восстановлен перпендикуляр AK к его плоскости. Докажите, что BC перпендикулярно KB.



Дано:

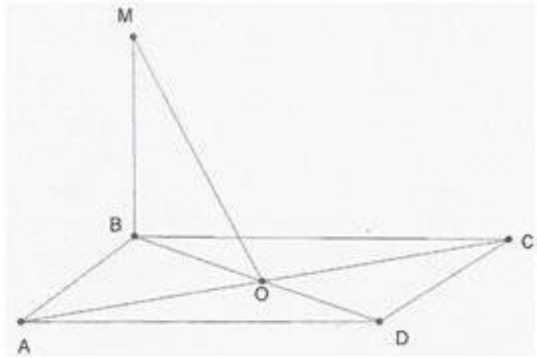
ABCD – квадрат,
AK ⊥ (ABCD).

Доказать: BC ⊥ BK.

Доказательство:

AK ⊥(ABCD) (по условию),
BK – наклонная,
AB – проекция KB на плоскость (ABCD),
BC ⊥ AB (как смежные стороны квадрата),
тогда BC ⊥ BK (по теореме о трех перпендикулярах).

Задача. Из вершины В квадрата ABCD восстановлен перпендикуляр ВМ к его плоскости. Докажите, что АС перпендикулярно МО (О – точка пересечения диагоналей).



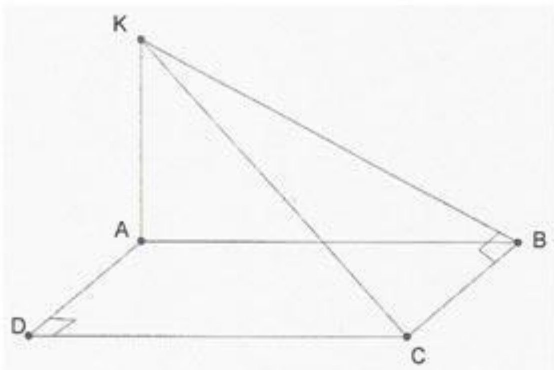
Дано:
ABCD – квадрат,
$AC \cap BD = O$,
$BM \perp (ABCD)$,

Доказать: $AC \perp MO$

Доказательство:

$BM \perp (ABCD)$, MO – наклонная, BO – проекция MO на плоскость (ABCD), $AC \perp BO$ (как диагонали квадрата).
Значит, $AC \perp MO$ по теореме о трех перпендикулярах.

Задача. Из вершины А прямоугольника ABCD восстановлен перпендикуляр АК к его плоскости. Докажите, что треугольник КВС прямоугольный.



Дано:

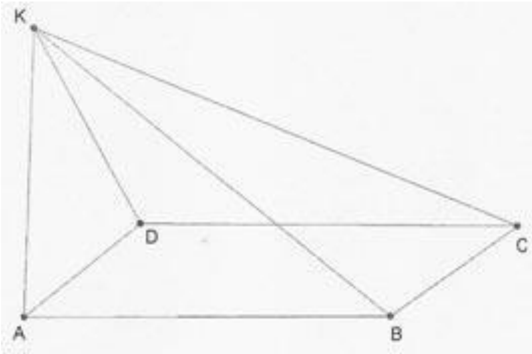
ABCD – прямоугольник,
$AK \perp (ABCD)$

Доказать: Δ KBC – прямоугольный.

Доказательство:

$AK \perp (ABCD)$, BK – наклонная, AB – проекция KB на плоскость;
$BC \perp AB$ (как смежные стороны прямоугольника).
Тогда $BC \perp AB$ по теореме о трех перпендикулярах., т.е. Δ KBC – прямоугольный,
$\angle B = 90°$

Задача. Из вершины прямоугольника ABCD восставлен перпендикуляр АК к его плоскости. Расстояния от точки К до других вершин равны 6 см, 7 см, 9 см. Найдите длину перпендикуляра АК.



<u>Дано:</u>

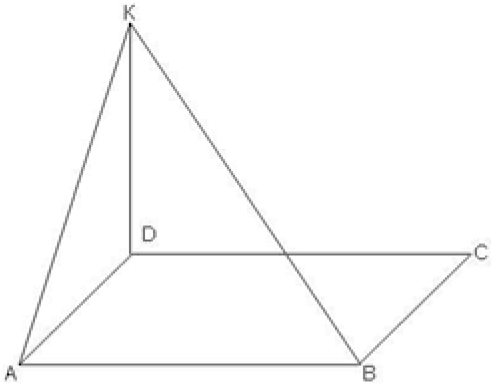
ABCD – прямоугольник,
AK ⊥ (ABCD)
KD = 6 см, KB = 7 см, KC = 9 см

<u>Найти:</u> AK

Решение:

1) Δ AKD – прямоугольный. По теореме Пифагора: $KD^2 = AK^2 + AD^2$.
Найдем AD. Заметим, что AD = BC.
2) Рассмотрим Δ KBC:
AK ⊥ (ABCD), BK наклонная, AB – проекция BK на плоскость.
BC⊥ AB (как смежные стороны прямоугольника).
Тогда BC ⊥ BK (по теореме о трех перпендикулярах), т. е. Δ BKC – прямоугольный, $\angle B = 90^\circ$.
3) По теореме Пифагора: $KC^2 = BK^2 + BC^2$. Отсюда следует,
$BC^2 = KC^2 - BK^2 = 81 - 49 = 32$. То есть $AD^2 = 32$.
4) Учитывая 1), имеем: $AK^2 = KD^2 - AD^2 = 36 - 32 = 4$. Значит, AK = 2(см).
Ответ: AK = 2 см.

Задача. Из вершины D квадрата ABCD со стороной 2 см к его плоскости проведен перпендикуляр $DK = 2\sqrt{3}$см. Найдите площадь $\Delta\ ABK$



<u>Дано:</u>

ABCD – квадрат,
AB = BC = DC = AD = 2 см,
DK ⊥ (ABCD), DK = $2\sqrt{3}$ см.
<u>Найти:</u> $S_{\Delta ABK}$ -?

Решение:

1) Рассмотрим Δ ADK:
DK ⊥(ABCD) (по условию),
AK – наклонная, AD –проекция AK на плоскость;
AB⊥AD (как смежные стороны квадрата),
тогда AB⊥AK , т. е. Δ ABK – прямоугольный, $\angle A = 90^\circ$.
2) $S_{\Delta ABK} = 0{,}5\ AB \cdot AK$, AK –?
3) Δ ADK –прямоугольный.
По теореме Пифагора $AK^2 = AD^2 + DK^2$. Отсюда AK = 4 (см).
4) $S_{\Delta ABK} = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 4 = 4$ (см ^{2}).

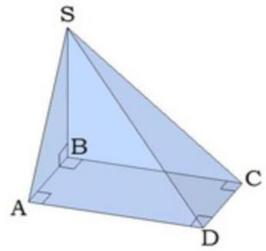
Ответ: $S_{\Delta ABK} = 4$ см^2.

Задания для самостоятельного решения

1 вариант	2 вариант
№1.К плоскости проведены равные наклонные. Докажите, что их проекции равны. №2.В ΔABC угол С равен 90°, СВ=8, АВ=10. КА перпендикуляр к плоскости треугольника. КА=6. Определить вид треугольника КСВ. Найти расстояние от точки К до прямой СВ. №3.В ΔABC АВ=АВ=10 см, $\angle A=30°$, ВК перпендикуляр к плоскости треугольника и равен $5\sqrt{6}$ см. Найдите расстояние от точки К до АС. №4.Через вершину К прямоугольного ΔKCM с прямым углом С проведена прямая КР, перпендикулярная к плоскости треугольника. Докажите, что треугольник РСМ прямоугольный. Найдите РК, если КМ=13, МС=5, РС=14.	№1.Две наклонные, проведенные к плоскости, имеют равные проекции. Докажите, что наклонные так же равны. №2.В ΔABC угол С равен 90°, СВ=4, АВ=5. КА перпендикуляр к плоскости треугольника. КА=6. Определить вид треугольника КСВ. Найти расстояние от точки К до прямой СВ. №3.В ΔABC АВ=АВ=20 см, $\angle B=120°$, ВК перпендикуляр к плоскости треугольника и равен $10\sqrt{6}$ см. Найдите расстояние от точки К до АС. №4.Через вершину М прямоугольного ΔAPM с прямым углом Р проведена прямая МС, перпендикулярная к плоскости треугольника. Докажите, что треугольник РСА прямоугольный. Найдите МА, если СР=13, МС=12, РА=4.
3 вариант	4 вариант
№1. Из точки вне данной плоскости проведены к плоскости перпендикуляр 6 см и наклонная 9 см. Найдите длину проекции наклонной на плоскость. №2. Равносторонний треугольник АВС со стороной 6 см лежит в некоторой плоскости. Точка S, не лежащая в плоскости, равноудалена от каждой из вершин треугольника на 9 см. Найдите расстояние от точки S до плоскости. №3. К плоскости прямоугольного треугольника АВС ($\angle$ С =90°) проведен перпендикуляр РВ, РА = 13 см, $\angle ABC$ = 30°, АС = 5 см. Вычислите расстояние от точки Р до: 1) прямой АС; 2) плоскости треугольника АВС.	№1. Отрезок, длина которого равна 17 см, не имеет общих точек с плоскостью. Найдите длину его проекции на эту плоскость, если концы отрезка удалены от плоскости на 10 см и на 18 см. №2.Равносторонний треугольник АВС со стороной $8\sqrt{3}$ см лежит в некоторой плоскости. Точка М, не лежащая в плоскости, находится на расстоянии 10 см от каждой из вершин треугольника. Найдите расстояние от точки М до плоскости треугольника. №3. К плоскости квадрата ABCD проведен перпендикуляр ВМ, равный 4 дм, АВ=2 дм. Вычислите расстояния от точки М до: 1) сторон квадрата;

№4. Отрезок АМ перпендикулярен плоскости треугольника АВС и имеет длину 6 см. Найдите расстояние от точки М до прямой ВС, если АВ = АС =10 см, С=12 см.	2) диагоналей квадрата. №4. Найдите расстояние от точки М до стороны СВ прямоугольного треугольника АВС, если АМ = ВС= 5 см, АС = 13 см.

Контрольные вопросы:



1. АВ – перпендикуляр к плоскости, АС – наклонная, ВС – её проекция на плоскость, CD – прямая на плоскости, перпендикулярная прямой ВС. Определите величину угла ACD.
2. АВ – перпендикуляр к плоскости, АС – наклонная, ВС – её проекция на плоскость, CD – прямая на плоскости, перпендикулярная прямой АС. Определите величину угла BCD.
3. Угол С треугольника АВС – прямой. AD – перпендикуляр к плоскости треугольника АВС. Определите тип Δ BCD.
4. Из вершины S к плоскости квадрата АВСД проведен перпендикуляр BS и наклонные SA, SC и SD (рис.). Назовите все прямоугольные треугольники с вершиной S. Ответ обоснуйте.
5. Из вершины А прямоугольного треугольника АВС (угол В – прямой) к плоскости треугольника проведен перпендикуляр АК. Определите взаимное расположение прямых КВ и ВС.

Практическое занятие №10
«Выполнение операций над множествами»

Цель работы: уметь задавать элементы множества; различать и классифицировать множества, выполнять операции над множествами

Сведения из теории:

Множество – основное математическое понятие. Его смысл выражается словами совокупность, набор и т. д. однотипных элементов, воспринимаемых как единое целое.

Множества обозначают большими латинскими буквами.

Например, А = {Коля, Петя, Маша, Ира}, В = {1, 2, 7}, С = {1, 2, 3, 4, …, n, …}.

Все предметы, составляющие множества, называются элементами множества. Элементы множества обозначают маленькими латинскими буквами. Например, если элемент х принадлежит множеству К, то пишут $x \in K$, если элемент х не принадлежит множеству К, то пишут $x \notin K$.

Есть множество, в котором нет ни одного элемента. Его называют пустым множеством и обозначают Ø.

Множество может быть конечным, если оно состоит из конечного числа элементов, и бесконечным, если оно содержит бесконечно много элементов. Примером конечного множества может служить множество дней недели, примером бесконечного множества – множество натуральных чисел.

Из школьного курса вам известны примеры бесконечных числовых множеств – множеств натуральных, целых, рациональных и действительных чисел.

Множество может быть задано:

– перечислением. Например, К = {2, 4, 20, 40};

– характеристическим свойством, т.е. свойством, характерным только для элементов этого множества.

Из элементов множества А = {Коля, Петя, Маша, Ира}, например, можно составить новое множество М = {Петя, Маша}. Оно характеризуется тем, что все элементы М принадлежат множеству А. Говорят, что М – подмножество множества А и пишут М⊂А.

Множество М является подмножеством множества А, если всякий элемент множества М является элементом множества А и обозначают М⊂А.

Например, множество всех первокурсников является подмножеством множества всех студентов.

Для любого множества А справедливо:

1) Само множество является своим подмножеством, т.е. А⊂ А.

2) Пустое множество является подмножеством любого множества, т.е. Ø⊂А.

Пример. Сколько можно составить подмножеств множества В?

1. В = {0, 1}, тогда {0}⊂В, {1}⊂В, Ø⊂В, {0, 1}⊂В – четыре.

2. В = {1, 2, 3}, тогда {1}⊂В, {2}⊂В, {3}⊂В, {1, 2}⊂В, {1, 3}⊂В, {2, 3}⊂В, Ø⊂В, {1, 2, 3}⊂В – восемь.

Можно доказать, что если в множестве n элементов, то оно имеет 2^n подмножеств.

Множества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. А также множества А и В равны, если А⊂В и В⊂ А.

Пусть А={2, 1, 3}, а В = {1, 2, 3} тогда А= В.

Операции над множествами

Над множествами производятся операции: пересечение, объединение, разность, дополнение.

Пересечением множеств А и В называется новое множество $A \cap B$, которое состоит из всех элементов, принадлежащих одновременно множествам А и В, т.е. $A \cap B=\{x \mid x\in A, x\in B\}$.

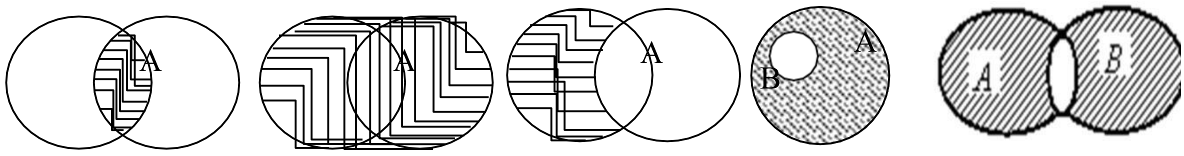
Объединением множеств А и В называется новое множество $A \cup B$, которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств А или В, т.е. $A \cup B=\{x \mid x\in A \text{ или } x\in B\}$.

Разностью множеств А и В называется новое множество $A \setminus B$, которое состоит из всех элементов множества А, не принадлежащих множеству В, т.е.

Дополнением множества А до множества В называется новое множество $C(A)_B$, которое состоит из всех элементов из $B \setminus A$, т.е. $C(A)_B=\{x \mid x\in B, x\notin A\}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество A Δ B, являющееся объединением разностей множеств AB и BA, то есть A Δ B = (A\B) ∪ (B\A).

Выполнение операций с множествами удобно иллюстрировать на кругах Эйлера.



$A \cap B$ $A \cup B$ $A \setminus B$ $C(A)_B$ $A \,\Delta\, B$

С помощью кругов Эйлера можно доказать следующие свойства множеств, справедливые для произвольных множеств A, B, C и D:

1) $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность объединения);

2) $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность пересечения);

3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность объединения);

4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность пересечения);

5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность объединения);

6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность пересечения);

7) $A \cup A = A$;

8) $A \cap A = A$;

9) $A \cup \emptyset = A$;

10) $A \cap \emptyset = \emptyset$;

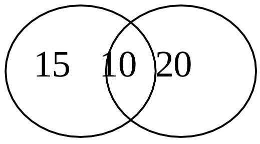
11) $A \setminus B \subset A$;

12) $A \subset A \cup B$ и $B \subset A \cup B$;

13) $A \cap B \subset A$ и $A \cap B \subset B$

Пример. В бригаде 25 человек. Среди них 20 моложе 30 лет, 15 старше 20 лет. Может ли так быть?

Решение: Пусть *A* – множество членов бригады моложе 30 лет. *B* – множество членов бригады старше 20 лет. *C* – множество всех членов бригады. $C = A \cup B$. Так как 20+15 >25, то $A \cap B \neq \emptyset$.



Из рисунка видно, что $A \cap B$ составляет (15+20) – 25 =10 человек.

Тогда A состоит из 15 – 10 =5 членов, B состоит из 20 – 10 = 10 членов.

Декартовым произведением множеств A и B называется новое множество $A \times B$, элементами которого являются всевозможные пары (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$, т.е.$A \times B = \{(a; b) | a \in A, b \in B\}$.

Пример. Дано некоторое множество, состоящее из трёх элементов: $A = \{a, b, c\}$. Найти все его подмножества.

Решение.

Во-первых, это – пустое множество $\emptyset$. Во-вторых, множества, содержащие по одному элементу: $\{a\}$, $\{b\}$,$\{c\}$. В-третьих, множества, содержащие по два элемента: $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{a,c\}$. И, наконец, само множество $\{a, b, c\}$.

Ответ:$\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$,$\{c\}$,$\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{a,c\}$,$\{a,b,c\}$.

Пример. Дано: а) $A, B \subset Z$, A = $\{1;3;4;5;9\}$, B = $\{2;4;5;10\}$. б) $A, B \subset R$, A = [-3;3), B = (2;10].

Найти: A∩B, A∪B, A\B, B\A, $\overline{B}$.

Решение.

а) A∩B = $\{4;5\}$, A∪B = $\{1;2;3;4;5;9;10\}$, A \ B = $\{1;3;9\}$, B \ A = $\{2;10\}$, $\overline{B}$ = Z \B;

б) A∩B = (2;3), A∪B = [-3;10] , A\B = [-3,2], B\A = [3,10],BZ\B = (-∞,2]∪(10,+∞).

Пример . Пусть А – множество различных букв в слове «математика», а В – множество различных букв в слове «стереометрия». Найти пересечение и объединение множеств А и В.

Решение.

А = {м, а, т, е, и, к} В = {с, т, е, р, о, м, и, я}

А∩В = {м, т, е, и} А ∪ В = {м, а, т, е, и, к, с, р, о, я}.

Задания для самостоятельного решения

1 вариант	2 вариант
№1.Даны множества: А={3,5,7}и В={0,3,5,7,8}. Найдите пересечение множеств А и В. Найдите объединение множеств А и В. №2.Даны множества: А={4,6,8,10}и В={7,8,9,10,11}. Найдите пересечение множеств А и В. Найдите объединение множеств А и В. №3. Составьте для каждого из слов свое множество «электричество», «учебник». Найдите пересечение и объединение полученных множеств. №4. Изобразите с помощью кругов Эйлера пересечение множеств и	№1.Даны множества: А={7,9,3,0,2}и В={0,3,2,1}.Найдите пересечение множеств А и В. Найдите объединение множеств А и В. №2. Даны множества: А={2,3,5,6,9}и В={6,7,8,9,10,11}. Найдите пересечение множеств А и В. Найдите объединение множеств А и В. №3. Составьте для каждого из слов свое множество «задача», «карандаш». Найдите пересечение и объединение полученных множеств. №4. Изобразите с помощью кругов Эйлера объединение множеств и

равенство множеств. №5. В ученической производственной бригаде 86 старшеклассников. 8 из них не умеют работать ни на тракторе, ни на комбайне. 54 ученика хорошо овладели трактором, 62 — комбайном. Сколько человек из этой бригады могут работать и на тракторе, и на комбайне?	подмножество множества. №5. В классе 36 учеников. Многие из них посещают кружки: физический (14 человек), математический (18 человек), химический (10 человек). Кроме того, известно, что 2 человека посещают все три кружка; из тех, кто посещает два кружка, 8 человек занимаются в математическом и физическом кружках, 5 — в математическом и химическом, 3 — в физическом и химическом. Сколько человек не посещают никаких кружков?
3 вариант №1.Даны множества: А={1, 5, 9}и В={9,8,7,6,5,4,3,2,1}. Найдите пересечение множеств А и В. Найдите объединение множеств А и В. №2. Даны множества: А={5,4,3}и В={6,7,8,9,10}. Найдите пересечение множеств А и В. Найдите объединение множеств А и В. №3. Составьте для каждого из слов свое множество «множество», «свойство». Найдите пересечение и объединение полученных множеств. №4. Изобразите с помощью кругов Эйлера равенство множеств и подмножество множества. №5. Каждый из 35 пятиклассников является читателем, по крайней мере, одной из двух библиотек: школьной и районной. Из них 25 учащихся берут книги в школьной библиотеке, 20 — в районной. Сколько из пятиклассников: а) не являются читателями школьной библиотеки; б) не являются читателями районной библиотеки; в) являются читателями только школьной библиотеки; г) являются читателями только районной библиотеки; д) являются читателями обеих библиотек?	4 вариант №1.Даны множества: А={9,6,5,3,2}и В={1,4,7,8}. Найдите пересечение множеств А и В. Найдите объединение множеств А и В. №2. Даны множества: А={1,3,4,5} и В={6,0,8,1,5}. Найдите пересечение множеств А и В. Найдите объединение множеств А и В. №3. Составьте для каждого из слов свое множество «способ», «подоконник». Найдите пересечение и объединение полученных множеств. №4. Изобразите с помощью кругов Эйлера множества, которые не пересекаются и объединение множеств. №5. Каждый ученик в классе изучает либо английский, либо французский язык, либо оба этих языка. Английский язык изучают 25 человек, французский — 27 человек, а тот и другой —18 человек. Сколько всего учеников в классе?

Контрольные вопросы:

1. Понятие множества. Элементы множества. Пустое множество. Подмножества.
2. Числовые множества. Связь между числовыми множествами.
3. Основные способы задания множеств. Универсальное множество.
4. Операции над множествами. Основные свойства операций.

Практическое занятие №11
«Решение задач с использованием теорем вероятностей»

Цель работы: вырабатывать умения решать задачи с использованием теорем вероятностей.

Сведения из теории:

Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний). Всякий результат или исход испытания называется событием.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется случайным.

В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют достоверным, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, невозможным.

События называются несовместными, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются совместными, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются противоположными, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

Вероятность события рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

Классическое определение вероятности.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных исходов m, к числу всех возможных исходов n:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т. е. $0 \le P(A) \le 1$.

Невозможному событию соответствует вероятность P(A)=0, а достоверному – вероятность P(A)=1.

Вероятность несовместных событий

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: P(A+B)=P(A)+P(B).

Вероятность совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Пусть вероятность события B не зависит от появления события A.

Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B, т. е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:

$$P_A(B) = P(B).$$

Итак, если событие B не зависит от события A, то событие A не зависит от события B; это означает, что свойство независимости событий взаимно.

Для независимых событий теорема умножения имеет вид:

$$P\,(AB) = P\,(A)\cdot P\,(B),$$

т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Два события называют независимыми, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют зависимыми.

На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи. Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» независимы.

Несколько событий называют попарно независимыми, если каждые два из них независимы. Например, события А, В, С попарно независимы, если независимы события А и В, А и С, В и С.

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2 \cdot \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Пример. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение: вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие A):

$$P(A)=8/10=0{,}8.$$

Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B):

$$P(B)=7/10=0{,}7.$$

Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие C):

$$P(C)=9/10=0{,}9.$$

Так как события A, B и C независимые в совокупности, то искомая вероятность (по теореме умножения) равна:

$$P(ABC)=P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)=0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9=0{,}504.$$

Пример. Таня забыла последнюю цифру номера телефона знакомой девочки и набрала её наугад. Какова вероятность того, что Таня попала к своей знакомой?

Решение: На последнем месте в номере телефона может стоять одна из 10 цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; n=10; все предыдущие цифры никакого значения не имеют. Из n=10 только одна цифра верная, поэтому m=1.

вероятность события А, состоящего в том, что, набрав последнюю цифру номера наугад, Таня попала к своей знакомой, равна $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{10}$.

Ответ: $\frac{1}{10}$.

Пример. Витя забыл две последние цифры номера телефона приятеля и набрал их наугад. С какой вероятностью этот звонок попадёт к приятелю?
Решение: Исходом в данном случае является пара десятичных цифр (0..9) с учётом порядка и с повторениями; общее число возможных исходов n=10·10=100; все исходы считаем равновозможными. Среди этих исходов только один является правильным, соответствующим номеру телефона приятеля. Таким образом, событию А – «звонок попадёт к приятелю» благоприятствует только один исход m_A=1; вероятность $P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{1}{100}=0{,}01$.

Ответ: 0,01.

Пример. Для новогодней лотереи отпечатали 1500 билетов, из которых 120 выигрышных. Какова вероятность того, что купленный билет окажется выигрышным?
Решение: Если продажа билетов будет организована так, что покупка любого из 1500 билетов будет равновозможна, то можно применить формулу классической вероятности. Пусть событие А – «купленный билет оказался выигрышным». Тогда количество благоприятствующих исходов m=120, а общее число равновозможных исходов n=1500; вероятность $P(A)=\frac{m_A}{n}$ $=\frac{120}{1500}=\frac{2}{25}=0{,}08=8\%$

Ответ: 0,08.

Пример. Для экзамена подготовили билеты с номерами от 1 до 25. какова вероятность того, что взятый наугад учеником билет имеет: 1) однозначный номер; 2) двузначный номер?
Решение: Общее число билетов n=25; извлечение каждого из них считается равновозможным. Рассмотрим событие А – «взятый билет имеет однозначный номер», В – «взятый билет имеет двузначный номер». Количество благоприятствующих исходов: m_A=9 (одна цифра от 1 до 9); m_B=16 (первая цифра 1 или 2, вторая цифра – от 0 до 9 после 1, от 0 до 5 после 2, всего 10+6=16). Искомые вероятности: $P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{9}{25}$; $P(B)=\frac{m_B}{n}=$ $\frac{16}{25}$

Ответ: 1) $\frac{9}{25}$; 2) $\frac{16}{25}$.

Пример. Ученик при подготовке к экзамену не успел выучить один из тех 25 билетов, которые будут предложены на экзамене. Какова вероятность того, что ученику достанется на экзамене выученный билет?
Решение: Общее число билетов n=25; выбор каждого билета равновозможен. Событие А – «ученику достанется на экзамене выученный билет»;

количество благоприятствующих исходов m=25-1=24. Вероятность события А: $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{24}{25}$=0,96.

Ответ: $\frac{24}{25}$.

Пример. В лотереи 1000 билетов, среди которых 20 выигрышных, приобретается один билет. Какова вероятность того, что этот билет: 1) выигрышный;
2) невыигрышный?

Решение: Общее число билетов n=1000; приобретение каждого из них равновозможно. Рассмотрим события и подсчитаем благоприятствующие им исходы: $P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{20}{100}=\frac{1}{50}=0{,}02$, $P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{980}{1000}=0{,}98$.

Ответ: 1) 0,02; 2) 0,98.

Пример. Женя купил 2 лотерейных билета, и один из них оказался выигрышным. Можно ли утверждать, что вероятность выигрыша в лотереи $\frac{1}{2}$?

Ответ: Нет. Одного испытания не достаточно, чтобы по частоте узнать вероятность.

Пример. Алёша забыл последнюю цифру телефонного номера и набрал её наугад,
помня только, что эта цифра нечётная. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

Решение: Исходом в данном случае являются цифры от 0 до 9, таких цифр – 10, но среди них нечётных только – 5. Отсюда следует, что M=5, N=10, значит
$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=0{,}5$.

Ответ: 0,5.

Пример. В классе 20 мальчиков и 10 девочек.

а) На класс дали один билет в цирк, который решено разыграть по жребию. Какова вероятность, что в цирк пойдёт мальчик?

б) Учитель истории знает, что 3 девочки и 5 мальчиков из класса были накануне в кино, поэтому не выучили домашнее задание. К сожалению, он не знает их фамилий, но очень хочет поставить кому-нибудь двойку. Кого ему лучше вызвать к доске – мальчика или девочку?

в) Влад не решил домашнюю задачу по математике. Какова вероятность, что учитель этого не узнает, если за урок он успевает спросить пятерых?

Решение: а) Общее число исходов равно 30. Благоприятных исходов – 20, значит $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}=0{,}667$. б) Общее число исходов для девочек равно 10, для мальчиков – 20. Благоприятных исходов для девочек – 3, для мальчиков – 5, значит для девочек $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{10}$, для мальчиков - $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$. Так как $\frac{3}{10} > \frac{1}{4}$, поэтому лучше вызвать девочку. в) Общее число исходов равно 30. Благоприятных исходов – 25, значит $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} = 0{,}833$.

Ответ: а) 0,067; б) лучше вызвать девочку; в) 0,833.

Пример. Для школьного новогоднего вечера напечатали 125 пронумерованных пригласительных билетов, между которыми предполагается разыграть главный приз. Какова вероятность, что номер счастливчика будет оканчиваться: а) на тройку; б) на девятку? в) Вова получил пригласительный билет с номером 33, а Таня – 99. Верно ли, что у Вовы больше шансов получить главный приз?

Решение: а) Общее число исходов равно 125. Благоприятных исходов – 13 (на тройку оканчиваются девять двузначных, три трёхзначных числа и само число -3), значит $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{13}{125} = 0{,}104$. б) Общее число исходов равно 125. Благоприятных исходов – 12 (на девятку оканчиваются девять двузначных, три трёхзначных числа и само число - 9), значит $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12}{125} = 0{,}096$. в) Общее число исходов равно 125. Благоприятных исходов и для Тани и для Вовы – 1, значит $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{25}$.

Ответ: а) 0,104; б) 0,096; в) Нет, не верно. У обоих шансы равны.

Пример. У Вики две одинаковые пары варежек. Уходя на улицу, она наугад берёт две варежки. Какова вероятность, что они окажутся парными (т.е. на разные руки)?

Ответ: $\frac{2}{3}$

Пример. Вика потеряла одну из варежек на улице, и теперь их у неё три. Уходя на улицу, она по-прежнему выбирает две варежки случайным образом. Какова вероятность того, что они окажутся парными?

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Пример. В лотереи участвуют 100 билетов. Разыгрывается один приз.
а) Какова вероятность того, что вы ничего не выиграете на свой единственный билет?
б) Участвуя в той же лотереи, вы купили 20 билетов. Какова вероятность, что вы опять останетесь ни с чем?

Решение: а) Общее число исходов равно 100. Благоприятных исходов – 1, значит $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{99}{100} = 0{,}99$; б) Общее число исходов равно 100. Благоприятных исходов – 80, значит $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

Ответ: а) 0,99; б) 0,8

Пример. Два друга живут в одном доме, а учатся в разных классах. Уроки в школе заканчиваются в интервале от 13 до 14 часов. После занятий они договариваются ждать друг друга на автобусной остановке в течение 20 минут. Сколько приблизительно раз за год им удаётся поехать домой вместе, если в году 200 учебных дней?

Решение: Вероятность поехать вместе будет $\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}$. Следовательно, за год им удастся поехать вместе приблизительно $200\cdot\frac{5}{9}\approx 111$ раз.

Ответ: 111 раз.

Пример. Расстояние от остановки «Горсад» до остановки «Школа» автобус проходит за 2 минуты, а Алёша – за 15 минут. Интервал движения автобусов – 25 минут. В случайный момент времени Алёша выходит из горсада, опаздывая в школу. Что ему лучше делать – идти пешком или подождать автобус?

Решение: Вероятность, что Алексей обгонит автобус, составит $\frac{13}{25}>\frac{1}{2}$. Следовательно, лучше подождать автобус (хотя отклонение от $\frac{1}{2}$ столь незначительно, что можно пройтись и пешком).

Ответ: Лучше подождать автобус.

Пример. На школьном вечере среди присутствующих 160 учащихся случайным образом распространили 160 лотерейных билетов (каждый старшеклассник получил по одному билету). Среди этих билетов было 5 выигрышных. Какова вероятность того, что каждому старшекласснику из числа присутствующих достался: 1) выигрышный билет; 2) невыигрышный билет?

Решение: Каждому школьнику мог достаться любой из 160 билетов, т.е. n=160. 1) Благоприятствующих выигрышу билетов 5, т.е. m=5. Тогда $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{5}{160}=\frac{1}{32}$. 2) Невыигрышных билетов 160-5=155, поэтому «не выигрышу» благоприятствует 155 исходов; m=155. Таким образом, вероятность получения невыигрышный билет равна $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{155}{160}=\frac{31}{32}$.

Ответ: 1) $\frac{1}{32}$; 2) $\frac{31}{32}$.

Пример. Для украшения ёлки принесли коробку, в которой находится 10 красных, 7 зелёных, 5 синих и 8 золотых шаров. Из коробки наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что он окажется: а) красным; б) золотым?

Решение: В коробке было всего 10+7+5+8=30 шаров, исход – изъятие одного шара определённого цвета. Рассмотрим события: а) А – «вынутый шар оказался красным»; $m_A=10$; $P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$. б) В – «вынутый шар оказался золотым»; $m_B=8$; $P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{4}{15}$.

Ответ: $\frac{4}{15}$.

Пример. Тест содержит 25 вопросов. На каждый вопрос предлагаются два верных ответа, из которых нужно выбрать правильный. За сколько правильных ответов следует ставить положительную оценку?

Ответ: За 18 и более правильных ответов.

Задания для самостоятельного решения

1 вариант	2вариант
№1 Из букв слова «Статистика» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что выбранная буква окажется: гласной; согласной; «т» или «с»; «м»	№1 Из букв слова «Несобственный» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что выбранная буква окажется: гласной; согласной; «н» или «с»; «л»
№2 В ящике 50 белых, 10 чёрных, 10 синих, 20красных шаров. Вынули 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется: белым; чёрным; синим; красным; белым или чёрным; синим или красным; не красный.	№2 В ящике 25 белых, 45 чёрных, 65 синих, 85 красных шаров. Вынули 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется: белым; чёрным; синим; красным; белым или чёрным; синим или красным; не красный.
№3 В билете 3 раздела. Из 30 вопросов первого раздела студент знает 15 вопросов, из 18 вопросов второго раздела знает 15 вопросов, из 25 вопросов третьего раздела знает все. Какова вероятность правильного ответа студента по билету.	№3 В билете 3 раздела. Из 60 вопросов первого раздела студент знает 20 вопросов, из 20 вопросов второго раздела знает 15 вопросов, из 30 вопросов третьего раздела знает все. Какова вероятность правильного ответа студента по билету.
№4При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше, чем 66,99 мм или больше, чем 67,01 мм.	№4При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,839 Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше, чем 66,99 мм или больше, чем 67,01 мм.
№5 Агрофирма закупает куриные яйца только в двух домашних хозяйствах. Известно, что 5% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 30% яиц высшей категории. В этой агрофирме 15% яиц высшей категории. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.	№5 Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 60% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 70% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 65% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.
№6 В торговом центре два	№6 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе.

одинаковых автомата продают кофе. Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,25. Такая же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе». Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру кофе останется в обоих автоматах.	Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.
3 вариант №1 Из букв слова «Стратосфера» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что выбранная буква окажется: гласной; согласной; «т» или «с»; «м» №2 В ящике 14 белых, 20 чёрных, 30 синих, 28 красных шаров. Вынули 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется: белым; чёрным; синим; красным; белым или чёрным; синим или красным; не красный. №3 В билете 3 раздела. Из 40 вопросов первого раздела студент знает 15 вопросов, из 18 вопросов второго раздела знает 10 вопросов, из 25 вопросов третьего раздела знает все. Какова вероятность правильного ответа студента по билету. №4 В случайном эксперименте четырежды бросают монету. Какова вероятность того, что первые два раза выпадет «орёл» №5 Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 85% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 65% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 80% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.	4 вариант №1 Из букв слова «Необыкновенный» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что выбранная буква окажется: гласной; согласной; «н» или «в»; «л» №2 В ящике 25 белых, 45 чёрных, 60 синих, 85 красных шаров. Вынули 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется: белым; чёрным; синим; красным; белым или чёрным; синим или красным; не красный. №3 В билете 3 раздела. Из 50 вопросов первого раздела студент знает 20 вопросов, из 19 вопросов второго раздела знает 10 вопросов, из 30 вопросов третьего раздела знает все. Какова вероятность правильного ответа студента по билету. №4 В случайном эксперименте бросают 3 игральных кубика. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 12 очков. №5 Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 55% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 35% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 45% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы,

№6 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,35. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,2. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.	окажется из первого хозяйства. №6 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,2. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,16. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение случайного события
2. Виды событий и их определения.
3. Теоремы вероятностей

Практическое занятие №12
«Решение комбинаторных задач»

Цель работы: закрепить знания и навыки в решении комбинаторных задач

Сведения из теории:

Группы, составленные из каких – либо элементов, называются соединениями.

Различаю три основных вида соединений: размещения, перестановки и сочетания.

Размещениями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Перестановками из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Перестановки представляют частный случай размещений из n элементов по n в каждом.

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n,$$

n!-читается «n-факториал», причем 0!=1 и 1!=1.

Используя приведенные выше определения имеем формулы:

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!},$$

при решении задач часто используется равенство:

$$A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m.$$

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n^m},$$

которую можно записать также в виде

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \ (0 \le m \le n), \ \ C_n^n = 1; \ C_n^0 = 1; \ C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

Пример: Вычислить A_8^3

Решение: $A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{5!} =$

Начнем произведение не с 1, а с 8 в числителе и с 5 в знаменателе

$$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

И видим следующую закономерность: если начинать по убывающей писать сомножители с нижнего числа (в данном случае это 8), то сомножителей после сокращения столько же каково верхнее число (в данном случае 3)

Пример: Вычислить A_{10}^5

Решение: Применим формулу

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, где n=10, m=5 и получим $A_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6$

– опять произведение m=5 сомножителей, начиная с n=10.

Можно было посчитать сразу

$A_{10}^5 = 10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6 = 30240$

Ответ: $A_{10}^5 = 30240$.

Пример: Вычислить $C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!\cdot5!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 8\cdot7 = 56$

Есть общее в вычислении с предыдущим примером. Только надо еще все поделить на верхнее число с факториалом
$A_8^3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3!}=8\cdot7=56.$

Ответ: $A_8^3=56.$

Пример: Сколько существует, способов составит расписание из 3 пар на один день из 9 предметов?
Решение: В расписании порядок расположения предметов важен, хорошо, когда последняя география или физическое воспитание. Чудесный день, когда это II и III пара. Упорядоченная выборка – это размещение и их число находится по формуле(1):
$A_9^3=\frac{9!}{(9-3)!}=\frac{9!}{6!}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=9\cdot8\cdot6=504$
Этот результат надо понимать так:
- любой из 9 предметов на I паре
- и любой из оставшихся восьми на II
- и любой из оставшихся семи на III

Союз «И» говорит об умножении.
Ответ: 504 способа составить расписание.

Пример: В чемпионате по футболу участвует 16 команд. Сколькими способами (без учета способностей) могут распределиться золотая, серебряная и бронзовая медали?
Решение: $A_{16}^3=\frac{16!}{13!}=16\cdot15\cdot14=3360$ способами.

A_{16}^3 расшифровывается так: число способов из 16 команд выбрать три призовые, считая, что золото может быть у каждой из трех по очереди, т.е. порядок золото-серебро-бронза или бронза-золото-серебро и т.д. важен.

Ответ: 3360 способами.

Пример: Сколько существует, способов составит, пятизначное число из цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9 не повторяя их.

Решение: $A_9^5=\frac{9!}{(9-5)!}=\frac{9!}{4!}=9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5=15120$

Ответ: 15120 способов.

Пример. Комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще пяти человек. Сколькими способами члены комиссии могут распределить между собой обязанности председателя и заместителя?

Решение: При выборе председателя и его заместителя из данных семи человек имеет значение не только то, как выбраны эти два человека из семи претендентов, но и то, как распределены их должности между собой (т.е. важен и состав, и порядок следования выбранных элементов).

Значит, речь идет о размещениях (без повторений) из семи элементов по два.

$$A_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!} = 6 \cdot 7 = 42.$$

Пример. Для запирания сейфов и автоматических камер хранения применяют секретные замки, которые открываются лишь тогда, когда набрано некоторое «тайное слово». Это слово набирают с помощью одного или нескольких дисков, на которых нанесены буквы (или цифры). Пусть на диск нанесены 12 букв, а секретное слово состоит из 5 букв. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного слова?

Решение: Общее количество попыток равно числу размещений с повторениями из 12 элементов по 5, то есть

$$\bar{A}_{12}^5 = 12^5 = 248\,832.$$

Поэтому количество неудачных попыток равно 248831.

Пример. К кассе за получением денег подошли одновременно 4 человека. Сколько существует способов им выстроиться в очередь.
Решение: Очередь можно представить, как некоторую перестановку из четырех человек. Из них можно составить $P_4 = 4! = 24$ перестановки.

Пример. В гостинице семь одноместных номеров, и семеро гостей желают в них поселиться, причем, трое заранее зарезервировали конкретные номера. Найдите число способов расселения семи гостей по семи номерам.

Решение: Трое гостей заранее зарезервировали конкретные номера. Значит, четверо гостей будут расселяться по четырем оставшимся номерам.

Число способов расселения семи гостей по семи номерам равно числу перестановок из четырех элементов, то есть $P_4 = 4! = 24$.

Пример. Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник Пушкина так, чтобы том 2 стоял рядом с томом 1 и справа от него?

Решение: Представим себе, что тома 1 и 2 связаны бечёвкой. Расстановка полученного набора из 9 томов (восьми обычных и одного сдвоенного) может быть произведена $P_9 = 9! = 362880$ способами.

Пример. Сколько перестановок можно образовать из букв слова «Миссисипи»?

Решение: В слове «Миссисипи» всего 9 букв, но не все они различны. Это слово содержит одну буква «м», четыре буквы «и», три буквы «с» и одну буква «п». Значит, по формуле перестановок с повторениями число перестановок, которые можно получить из букв этого слова, равно

$$P(4,3,1,1) = \frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!} = 2520.$$

Пример. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, если каждая цифра в изображении числа встречается один раз?

Решение: Рассматриваемое четырехзначное число можно представить, как некоторую перестановку из цифр 0, 1, 2, 3, в которой первая цифра отлична от нуля. Так как из четырех цифр можно составить $P_4 = 4!$ перестановок и из них $P_3 = 3!$ начинаются с нуля, то искомое количество равно $4! - 3! = 18$.

Пример: Сколько существует способов жеребьевки семи команд?
Решение: $P_7 = 7! = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5040$.
Ответ: 5040 способов.

Пример: Сколько существует способов составить пятизначные числа из пяти цифр, не повторяя их?
Решение: $P_5 = 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$
Ответ: 120 способов.

Пример: Сколько существует способов достать 3 белых шара из ящика с 7 одинаковыми шарами?
Решение: $C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 5\cdot 7 = 35$
Ответ: 35 способов.

Пример: Сколько существует способов в группе из 25 человек выбрать трех членов редколлегии?
Решение: $C_{25}^3 = \frac{25\cdot 24\cdot 23}{1\cdot 2\cdot 3} = 2300$
Ответ: 2300 способов.
Выбираем сочетания т.к. порядок членов редколлегии не важен.

Пример: В драме А.С. Пушкина «Пиковая дама» Герман вынимает сразу три карты из колоды в 52 листа. Сколько существует таких способов?
Решение: $C_{52}^3 = \frac{52\cdot 51\cdot 50}{1\cdot 2\cdot 3} = 22100$
Ответ: 22100 способов.

Пример: В ящике 15 красных, 9 синих и 6 зеленых шаров. Сколько существует способов вынуть 1 зеленый , 2 синих, 3 красных, если взять все эти шары сразу?
Решение: Из условия следует, что вынуто 6 шаров сразу. Попробуем сформулировать вопрос задачи, чтобы разобраться, где сумма, где произведение (умножение «И», сложение «ИЛИ»). Вынуть 1 зеленый и 2

синих, и 3 красных, чтобы было их шесть. Значит умножение трех отдельных эпизодов. Теперь просчитываем каждый.

- Сколько способов из 6 зеленых достать 1? Шесть.
- Сколько способов из 9 синих достать два? $C_9^2 = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9\cdot8}{2} = 9\cdot4 = 36$
- Сколько способов из 15 красных достать три? $C_{15}^3 = \frac{15!}{3!12!} = \frac{15\cdot14\cdot13}{1\cdot2\cdot3} = 35\cdot13 = 455$

Итого: 6·36·455=98280

Ответ: 98280 способов.

Пример: В партии из 10 деталей имеются 4 бракованных. Сколько существует способов выбрать комплект из 3 стандартных и 2 бракованных. Есть союз «И», значит, умножают два эпизода:

- Сколько способов из 6 стандартных взять 3? $C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} = 5\cdot4 = 20$
- Сколько способов из 4 бракованных взять 2? $c_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\cdot3}{1\cdot2} = 6$
- Итого способов 20·6=120

Ответ: 120 способов.

Пример: Юноша забыл две последние цифры номера своей знакомой, помнит только, что они разные. Сколько способов «угадать» номер?

Решение: Цифр используется 10 от 0 до 9. Из них надо составить двузначные числа, причем 31 и 13 это разные числа, а значит и варианты, т.к. порядок расположения чисел важен, используем формулу числа размещений:

$$A_9^2 = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = 9\cdot8 = 72$$

Ответ: 72 варианта для угадывания правильного номера.

Задания для самостоятельного решения

1 вариант	2 вариант
№1. Обучающиеся изучают 8 различных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание из четырёх различных предметов на четверг? №2. Код в камере хранения состоит из всех чётных цифр и следующих за ними двух из десяти гласных букв русского алфавита. Сколько возможных шифров можно набрать в этом случае? №3.Решите уравнение относительно n: $\frac{P_{n+2}}{P_{n-1}} = 24$. №4. На книжной полке пять книг различных авторов и трёхтомник А.С.Пушкина. Сколькими способами можно расставить эти книги, если все три пушкинских тома (безразлично, в каком порядке)	№1. Обучающиеся изучают 7 различных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание из пяти различных предметов на четверг? №2. В коде камеры хранения использованы три из десяти гласных букв русского алфавита и следующих за ними четырёх нечётных цифр. Сколько возможных шифров можно набрать в этом случае? №3. Решите уравнение относительно n: $\frac{P_{n-1}}{P_{n+1}} = 0,05$. №4. На книжной полке шесть книг различных авторов и трёхтомник М.Ю.Лермонтова. Сколькими способами можно расставить эти книги, если все три лермонтовских

должны стоять рядом? №5. Найдите k, если $\frac{A_k^5}{18} = A_{k-2}^4$. №6. Из девятнадцати первокурсников нужно выбрать пятерых для участия в городском дне первокурсника. Сколько вариантов выбора существует? №7. В футбольной команде 15 игроков. Нужно выбрать капитана и его помощника. Сколькими способами можно осуществить выбор? №8. Вычислить $\frac{P_{16}}{A_{16}^5} - \frac{A_{16}^{11}}{C_{16}^{11}}$	тома (безразлично, в каком порядке) должны стоять рядом? №5.Найдите k, если $\frac{(k-4)\cdot A_k^4}{k-5} = 21\cdot A_{k-2}^3$. №6. Из двадцати спортсменов нужно выбрать 6 участников для массового забега. Сколькими способами это можно осуществить? №7. В студенческой группе из 30 человек выбирают старосту и его заместителя. Сколько способов выбора существует? №8. Вычислить $\frac{A_{18}^{10}}{C_{18}^{10}} - \frac{P_{18}}{A_{18}^8}$
3 вариант №1. Обучающиеся изучают 11 различных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание из пяти различных предметов на четверг? №2. Код в камере хранения состоит из всех нечётных цифр и следующих за ними трех из десяти гласных букв русского алфавита. Сколько возможных шифров можно набрать в этом случае? №3. Упростить $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$ №4. На книжной полке 10 книг различных авторов и трёхтомник А.С.Пушкина. Сколькими способами можно расставить эти книги, если все три пушкинских тома (безразлично, в каком порядке) должны стоять рядом? №5. Найдите x, если $A_x^5 = 30A_{x-2}^4$ №6. Из 25 первокурсников нужно выбрать пятерых для участия в городском дне первокурсника. Сколько вариантов выбора существует? №7. В футбольной команде 20 игроков. Нужно выбрать капитана и его помощника. Сколькими	4 вариант №1. Обучающиеся изучают 12 различных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание из шести различных предметов на четверг? №2. В коде камеры хранения использованы 5 из десяти гласных букв русского алфавита и следующих за ними двух нечётных цифр. Сколько возможных шифров можно набрать в этом случае? №3. Упростить $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ №4. На книжной полке 8 книг различных авторов и трёхтомник М.Ю.Лермонтова. Сколькими способами можно расставить эти книги, если все три лермонтовских тома (безразлично, в каком порядке) должны стоять рядом? №5. Найдите x, если $C_{x-2}^2 = 21$ №6. Из 16 спортсменов нужно выбрать 8 участников для массового забега. Сколькими способами это можно осуществить? №7. В студенческой группе из 28 человек выбирают старосту и его заместителя. Сколько способов выбора существует?

способами можно осуществить выбор? №8. Вычислить $\frac{\mathcal{P}20}{\mathcal{A}_{20}^{15}} - \frac{\mathcal{A}_{20}^{5}}{\mathcal{C}_{20}^{5}}$	№8. Вычислить $\frac{\mathcal{P}14}{\mathcal{A}_{14}^{10}} - \frac{14}{\mathcal{C}_{14}^{4}}$

Контрольные вопросы:

1. Правило умножения.
2. Правило сложения.
3. Размещение из n элементов по m.
4. Формула для нахождения числа всех размещений из n элементов по m.
5. Перестановка из n элементов.
6. Формула для нахождения числа всех перестановок из n элементов.
7. Сочетание из n элементов по m.
8. Формула для нахождения числа всех сочетаний из n элементов по m.

Практическая работа №13
«Нахождение числовых характеристик случайной величины»

Цель работы: закрепить знания обучающихся в нахождении числовых характеристик случайной величины по заданному распределению

Сведения из теории:

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперёд неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены. Например, число бракованных лампочек среди 10 купленных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2,….,10. Случайные величины обозначаются прописными буквами латинского алфавита: X, Y, Z и так далее, а их значения – соответствующими строчными буквами x, y, z и так далее.

Различают *дискретные* и *непрерывные* случайные величины.

Случайная величина называется ***дискретной,*** если множество её значений конечно или счетно, то есть множество её значений представляет собой конечную последовательность $x_1, x_2,\dots x_n$ или бесконечную последовательность $x_1, x_2,..x_n,\dots$

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного множества. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Например, если в качестве случайной величины рассматривать оценку студента на экзамене, то с определенной вероятностью, которая зависит от многих факторов, студент может получить или 2, или 3, или 4, или 5, но в результате сданного одним студентом экзамена в ведомости всегда стоит только одна оценка.

Случайная величина может быть задана *законом распределения*.

Законом распределения дискретной случайной величины (сокращенно ДСВ) называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины таблица состоит из двух строк и называется законом или рядом распределения дискретной случайной величины X. Первая строка таблицы содержит возможные значения случайной величины, а вторая - соответствующие им вероятности.

x	x_1	x_2	…	x_{n+1}	x_n
p	p_1	p_2	…	p_{n+1}	p_n

Значения x_1, x_2, … , x_n записываются в таблице, как правило, в порядке возрастания. Приняв во внимание, что в каждом отдельном испытании случайная величина принимает только одно возможное значение случайной величины X, заключаем, что события $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ несовместны и образуют полную группу событий. Следовательно, сумма вероятностей этих событий, т.е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Пример. В издательстве выпущено 100 книг по овцеводству. Лотереей разыграны одна книга в 500 руб. и 10 по 10 руб. Найти закон распределения случайной величины *x* - возможного выигрыша одной книги.

Решение:

Возможны значениях: $X_1 = 500$, $x_2 = 10$,$x_3 = 0$. Вероятности: $p_1=0{,}01$; $p_2=0{,}1$; $p_3=1 - (p_1+ p_2) = 0{,}89$.

Закон распределения:

X	500	10	0
P	0,01	0,1	0,89

Функцией распределения случайной величины называют функцию *F(x),* определяющую вероятность того, что случайная величина *X* в результате испытания примет значение, меньшее *x,* то есть $F(x) = P(X<x)$.

Кроме закона распределения, который дает полное представление о случайной величине, часто используют числа, которые описывают случайную величину суммарно. Такие числа называют ***числовыми характеристиками случайной величины.*** К ним относятся *математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины*.

Математическим ожиданием (М) дискретной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений, умноженных на их вероятности.

$M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{I=1}^{\infty} x_I y_I,$

где x_i, - значение случайной величины, p_i- вероятность случайной величины. Математическое ожидание дискретной случайной величины обладает *свойствами*, которые вытекают из его определения.

1. Математическое ожидание постоянной величины С есть постоянная величина $M(\text{С}) = \text{С}$, где $\text{С} = const$.
2. Математическое ожидание дискретной случайной величины X, умноженной на постоянную величину C, равно произведению математического ожидания M(X) на C. То есть постоянный множитель можно выносить за знак суммирования $M(CX) = CM(X)$
3. Математическое ожидание суммы дискретных случайных величин X и У равно сумме их математических ожиданий.

$$M(X+У) = M(X) + M(У)$$

4. Математическое ожидание произведения независимых дискретных случайных величин X и Y равно произведению их математических ожиданий $M(X * У) = M(X) * \text{M}(Y)$, если X и Y независимы

Часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг его среднего значения. ***Дисперсией (рассеянием)*** *D(x)* случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = \text{M}[\text{X}-M(X)]^2$.

Формула для вычисления дисперсии $D(X) = M(X^2)-[M(X)]^2$.

Средним квадратичным отклонением $(\sigma\ (x))$ случайной величины *x* называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(x) = \sqrt{D(X)}$.

Исследование вариационных статистических рядов рассмотрим на примере.

Пример: Дан дискретный вариационный ряд

X	1	4	6
N	10	15	25

где $X\ \{x_1 x_2, x_3\}$ характеристики случайной величины X,$N\ \{n_1, n_2, n_3\}$ - частоты появления элементов в выборке.

Провести исследование дискретного вариационного ряда
1) найти объём выборки;
2) составить закон распределения случайной величины *X;*
3) найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Решение:
1) Найдём объем выборки: $n = \text{n}_1 + n_2 + n_3 = 10+15+25=50$.
2) Найдём относительные частоты: $W_1=10/50=1/5$, $w_2=15/50=3/10$, $w_3=25/50y =1/2$.

Закон распределения случайной величины *X* представлен таблицей:

X	1	4	б
W	1/5	3/10	1/2

3) Найдём математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение:

$M=w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3=l/5 \cdot 1+3/10 \cdot 4+1/2 \cdot 6=4/4;$

$D= w_1\ (x_1-M)^2 + w_2\ (x_2 -M)^2+ w_3\ (x_3 -M)^2= 1/5 \cdot (1-4,4) +3/10 \cdot (4- 4,4) +1/2 \cdot (6-4,4)=3,64; \sigma(x) = \sqrt{D(X)}=\sqrt{3,64} =1,9$

Задания для самостоятельного решения

1 вариант

№1 Дискретная случайная величина имеет ряд распределения

X_i	7	9	11	15	20
P_i	0.1	0.2	0.1	0.3	0.3

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение

№2 Дискретная случайная величина имеет ряд распределения.

x	-1	0	12	15	26
p	0,124	0,243	0,283	0,198	0,152

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение

№3 Найти p_2 и p_4, если p_4 в 10 раз больше p_2, если задана дискретная случайная величина X и имеется закон распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

x	-2	-6	-7	9	-3
p	0,12	P2	0,25	P4	0,41

2 вариант

№1 Дискретная случайная величина имеет ряд распределения

X_i	5	6	9	12	20
P_i	0.2	0.1	0.2	0.1	0.4

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение

№2 Дискретная случайная величина имеет ряд распределения.

x	2	3	10	15	24
p	0,124	0,243	0,283	0,198	0,152

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение

№3 Найти p_2 и p_4, если p_4 в 10 раз больше p_2, если задана дискретная случайная величина X и имеется закон распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

x	-2	-6	0	8	13
p	0,12	P2	0,25	P4	0,41

3 вариант

№1 Дискретная случайная величина имеет ряд распределения

X_i	6	8	10	18	21
P_i	0.3	0.2	0.1	0.1	0.3

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение

№2 Дискретная случайная величина имеет ряд распределения.

x	2	5	12	15	25
p	0,124	0,243	0,283	0,198	0,152

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение

№3 Найти p_2 и p_4, если p_4 в 10 раз больше p_2, если задана дискретная случайная величина X и имеется закон распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

x	2	6	7	9	3
p	0,12	P2	0,25	P4	0,41

4 вариант

№1 Дискретная случайная величина имеет ряд распределения

X_i	-6	-8	10	15	20
P_i	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение

№2 Дискретная случайная величина имеет ряд распределения.

x	4	8	10	12	23
p	0,124	0,243	0,283	0,198	0,152

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение

№3 Найти p_2 и p_4, если p_4 в 10 раз больше p_2, если задана дискретная случайная величина X и имеется закон распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

x	-2	-6	0	9	3
p	0,12	P2	0,25	P4	0,41

Контрольные вопросы:

1. Дать определение математического ожидания
2. Что показывает дисперсия случайной величины?
3. Как найти среднее квадратичное отклонение?

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Печатные издания

1. Богомолов, Н.В. Математика: учебник для среднего профессионального образования/ Н.В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп— Москва: Издательство Юрайт, 2023.— 401с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/511565
2. Дорофеева, А.В. Математика: учебник для среднего профессионального образования/ А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп.— Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 400с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-15555-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/512130
3. Васильев, А.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник и практикум для среднего профессионального образования/ А.А. Васильев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 232с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09115-1. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/514880
4. Медик, В. А. Математическая статистика в медицине в 2 т. Том 1: учебное пособие для среднего профессионального образования/ В.А. Медик, М.С. Токмачев. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 471с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07589-2. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/516132

Дополнительная литература

5. Богомолов, Н.В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1: учебное пособие для среднего профессионального образования/ Н.В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 326с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08799-4. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/512668
6. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 2: учебное пособие для среднего профессионального образования/ Н.В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 251с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08803-8. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/512669
7. Богомолов, Н.В. Математика. Задачи с решениями: учебное пособие для среднего профессионального образования/ Н.В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 755с. — (Профессиональное образование). — ISBN978-5-534-16211-0. — Текст: электронный //

Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/530620
8. Кремер, Н.Ш. Математика для колледжей: учебное пособие для среднего профессионального образования/ Н.Ш. Кремер, О.Г. Константинова, М.Н. Фридман; под редакцией Н.Ш. Кремера. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 362с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-15601-0. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/511283
9. Кучер, Т.П. Математика. Тесты: учебное пособие для среднего профессионального образования/ Т.П. Кучер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 541с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-10555-1. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/512933
10. Шагин, В.Л. Математический анализ. Базовые понятия: учебное пособие для среднего профессионального образования/ В.Л. Шагин, А.В. Соколов. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 245с.— (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-9072-0. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/513589
11. Шипачев, В.С. Математика: учебник и практикум для среднего профессионального образования/ В.С. Шипачев; под редакцией А.Н.Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп.— Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 447с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-13405-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/511549

Информационные ресурсы

1. ЭБС «IPRbooks»
2. ЭБС «ЮРАЙТ»