РОСЖЕЛДОР

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
"Ростовский государственный университет путей сообщения"
(ФГБОУ ВО РГУПС)

А.В. Морозова

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

по Учебному плану

специальности среднего профессионального образования
54.02.01 Дизайн (по отраслям)

Ростов-на-Дону
2024

УДК 51

Рецензент: д.т.н. Мукутадзе М.А. (РГУПС).

Морозова, А.В.

Математика: учебно-методическое пособие к выполнению практических, лабораторных и самостоятельных работ / А.В. Морозова; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2024. – 211 с.

Методические указания предназначены для проведения практических занятий, а также для самостоятельной работы по математике для студентов направления подготовки 54.02.01 Дизайн (по отраслям).

СОДЕРЖАНИЕ

СЕМЕСТР 3

СЕМЕСТР 1

Практическое занятие №1. Матрицы и действия над ними. Определители и их свойства. (2ч)

Матрицей размера $m \times n$ называется упорядоченная таблица, составленная из чисел, расположенных в m строках и n столбцах. Обозначаются матрицы A, B, C и т. д. Элемент матрицы, находящийся в строке с номером i и столбце с номером j, обозначается a_{ij}. Если $m = n$, то матрица называется квадратной порядка n.

Произведением матрицы A на число λ называется матрица C того же размера, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ:

$$C = \lambda \cdot A <=> c_{ij} = \lambda a_{ij} (i = 1,...,m;\ j = 1,...,n).$$

Суммой двух матриц A и B одинаковых размеров называется матрица C того же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$C = A + B <=> c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} (i = 1,...,m;\ j = 1,...,n).$$

Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведением матрицы $A_{m\times k}$ на матрицу $B_{k\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$C = A \cdot B;\ <=> c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{ik} \cdot b_{kj} (i = 1,...,m;\ j = 1,...,n).$$

Возведение квадратной матрицы A в целую положительную степень p(p >1): $A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{p\ \text{ðàç}}$.

Матрицей, *транспонированной* к матрице A, называется матрица, образованная из матрицы A заменой её строк соответствующими столбцами. Транспонированная матрица к матрице A обозначается A^{T}.

Всякой квадратной матрице A порядка n ставится в соответствие по определённому закону некоторое число, которое называется *определителем* того же порядка матрицы A и обозначается $|A|$.

Определитель первого порядка равен самому числу.

Определитель второго порядка определяется равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1)$$

Определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Минором элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n–1)$-го порядка, полученный из исходного определителя путём вычеркивания i-й строки и j-го столбца. Обозначается минор M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, умноженный на $(–1)^{i+j}$, т. е. A_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Формулу (2) можно записать таким образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Единичной называется квадратная матрица порядка n, у которой элементы главной диагонали a_{11}, a_{22}, … , a_{nn} равны 1, а остальные элементы равны 0. Пусть E — единичная матрица. При умножении матрицы A на E слева или справа получается матрица A: $AE = EA = A$.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к квадратной матрице A, если выполняются условия: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Обратная матрица к квадратной матрице A существует тогда и только тогда, когда определитель матрицы A не равен нулю, т. е. $|A| \neq 0$. При этом

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^*)^T, \tag{3}$$

где A^* — матрица, в которой каждый элемент матрицы A заменён его алгебраическим дополнением. Такая матрица называется *присоединённой* к матрице A.

Пример. Дана матрица $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $R = C^2 + 2C^T - 3C^{-1}$.

Решение. Определим матрицу C^2:

$$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1(-3) & 2 \cdot 1 + 1(-4) \\ -3 \cdot 2 - 4(-3) & -3 \cdot 1 - 4(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу C: $\quad C^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

и найдём произведение $2C^T$: $\quad 2C^T = 2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}.$

Определим C^{-1} по формуле (3):

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|}(C^*)^T.$$

Вычислим определитель матрицы C:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 2(-4) - (-3)1 = -8 + 3 = -5 \neq 0.$$

Следовательно, C^{-1} существует. Определим алгебраические дополнения элементов матрицы C и присоединённую матрицу C^*:

$$C_{11} = -4;\ C_{12} = 3;\ C_{21} = -1;\ C_{22} = 2;$$

$C^* = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, тогда $(C^*)^T = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ и обратная матрица C^{-1}:

$$C^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ -0,6 & -0,4 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность нахождения C^{-1}. Для этого перемножим полученную матрицу на данную матрицу C слева и справа и убедимся, что получается единичная матрица:

$$C^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ -0,6 & -0,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8\cdot 2 + 0,2\cdot(-3) & 0,8\cdot 1 + 0,2\cdot(-4) \\ -0,6\cdot 2 - 0,4\cdot(-3) & -0,6\cdot 1 - 0,4\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ -0,6 & -0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0,8 + 1\cdot(-0,6) & 2\cdot 0,2 + 1\cdot(-0,4) \\ -3\cdot 0,8 - 4\cdot(-0,6) & -3\cdot 0,2 - 4\cdot(-0,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица C^{-1} определена правильно.

Найдем произведение матрицы C^{-1} на 3:

$$3C^{-1} = 3\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ -0,6 & -0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4 & 0,6 \\ -1,8 & -1,2 \end{pmatrix}.$$

Окончательно получим:

$$R = C^2 + 2C^T - 3C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2,4 & 0,6 \\ -1,8 & -1,2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 4 - 2,4 & -2 - 6 - 0,6 \\ 6 + 2 + 1,8 & 13 - 8 + 1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,6 & -8,6 \\ 9,8 & 6,2 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 1. Дана матрица $C = \begin{pmatrix} a & 2b \\ -d & 3c \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $R = C^3 + C \cdot C^T - 3C^{-1}$.

Значения параметров a, b, c, d к заданию 1 даны в табл. 1.

Таблица 1

№ вар-та	a	b	c	d	№ вар-та	a	b	c	d
1	–1	1	5	–4	16	1	–2	3	–1
2	2	1	4	–1	17	3	–1	2	5
3	1	–3	1	–4	18	2	2	–1	4
4	2	1	6	1	19	1	–1	–1	2
5	1	–2	–1	6	20	4	1	–1	2
6	3	–2	1	1	21	1	3	–1	2
7	–1	1	3	–3	22	–2	2	–1	2

8	–2	–1	1	4	23	5	–1	–1	2
9	–2	–2	3	1	24	1	3	4	–1
10	4	3	2	1	25	1	–1	–2	3
11	1	2	–2	4	26	2	3	1	2
12	1	3	–2	–2	27	–1	1	–2	2
13	3	–3	1	2	28	3	1	1	–2
14	–2	3	–1	1	29	4	–2	1	1
15	1	1	5	–2	30	–2	2	3	–1

Задание 2. Данилова, Л.В. Типовые задания для практических занятий по алгебре и геометрии / Л.В. Данилова, Е.В. Пиневич, Рост. гос. ун-т путей сообщения. - Ростов н/Д: 2007. – 29 с. Библиогр.: 9 назв.

Практическое занятие №2. Решение невырожденных систем линейных уравнений по формулам Крамера и матричным способом. (2ч)

Минором порядка k матрицы A называется определитель порядка k матрицы, составленный из элементов матрицы A, стоящих на пересечении произвольных k строк и k столбцов.

Рангом матрицы называется число r, такое, что выполняются условия:

1) существует минор порядка r, не равный нулю;
2) все миноры большего порядка, начиная с $(r+1)$, равны нулю.

Ранг матрицы A обозначается $r(A)$. Ранг матрицы — это наибольший порядок её минора, не равного нулю. Этот минор называется *базисным*.

Элементарные преобразования, не меняющие ранга матрицы:

1) перестановка строк (столбцов) местами;
2) транспонирование;
3) вычёркивание строки (столбца), все элементы которой равны нулю;
4) умножение какой-либо строки (столбца) на число, отличное от нуля;
5) прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.

1. <u>*Метод Крамера*</u>

Применяется для решения неоднородных систем n уравнений с n неизвестными, у которых определитель основной матрицы системы отличен от нуля: $\Delta = |A| \neq 0$.

Тогда система имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\dots,x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (4)$$

где Δ_i — определитель, полученный из определителя системы Δ заменой i-го столбца матрицы A столбцом свободных членов B.

2. <u>*Матричный метод*</u>

Применяется при тех же условиях, что и метод Крамера. Столбец неизвестных находим, решая матричное уравнение $A \cdot X = B$. (5)

Умножим (5) слева на матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

По определению обратной матрицы $A^{-1} \cdot A = E$, следовательно,

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Умножение матрицы на единичную матрицу не меняет матрицу, поэтому $E \cdot X = X$ и

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (6)$$

Пример. Дана система уравнений $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -6 & -5 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Систему линейных алгебраических уравнений $A \cdot X = B$ запишем в координатной форме:

$$\begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & -x_3 = 0, \\ 3x_1 & -6x_2 & -5x_3 = -2, \\ 5x_1 & -4x_2 & -2x_3 = -3. \end{cases}$$

а) Решим систему по формулам Крамера.

Найдём определитель системы, используя формулы (2) и (1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -6 & -5 \\ 5 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -6 & -5 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(12-20) + 3(-6+25) - 1(-12+30) = 23.$$

Так как $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение, которое находим по формулам Крамера (4):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -2 & -6 & -5 \\ -3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 3(4-15) - 1(8-18) = -23;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -5 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 2(4-15) - 1(-9+10) = -23;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & -6 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 2(18-8) + 3(-9+10) = 23.$$

Итак, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -1,\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -1,\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$

Сделаем проверку, подставив найденные значения x_1, x_2, x_3 в исходную систему, и убедимся, что все три уравнения данной системы обращаются в тождества:

$$\begin{cases} 2\cdot(-1)-3\cdot(-1)-1=-2+3-1=0; \\ 3\cdot(-1)-6\cdot(-1)-5\cdot1=-3+6-5=-2; \\ 5\cdot(-1)-4\cdot(-1)-2\cdot1=-5+4-2=-3; \end{cases} \quad \begin{cases} 0=0; \\ -2=-2; \\ -3=-3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=1$.

б) Решим систему матричным методом.

Из пункта а) $\Delta=23\neq0,$ следовательно, матрица системы имеет обратную A^{-1}, которую найдём по формуле (3).

Для этого вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-6 & -5\\ -4 & -2\end{vmatrix}=-8,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & -5\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-19,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & -6\\ 5 & -4\end{vmatrix}=18,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -4 & -2\end{vmatrix}=-2,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & -2\end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & -4\end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -6 & -5\end{vmatrix}=9,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -5\end{vmatrix}=7,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -6\end{vmatrix}=-3.$$

Получим A^{-1} по формуле (3):

$$A^{-1}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-8 & -2 & 9\\ -19 & 1 & 7\\ 18 & -7 & -3\end{pmatrix}.$$

По формуле (6) имеем

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-8 & -2 & 9\\ -19 & 1 & 7\\ 18 & -7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -2\\ -3\end{pmatrix}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-8\cdot0 & -2\cdot(-2) & +9\cdot(-3)\\ -19\cdot0 & +1\cdot(-2) & +7\cdot(-3)\\ 18\cdot0 & -7\cdot(-2) & -3\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-23\\ -23\\ 23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=1$.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Морозова, А.В. Высшая математика : учебное пособие в 4 ч. Ч. 1. Алгебра и аналитическая геометрия / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2016. – 103 с. Библиогр.: 7 назв. (стр.97).

Практическое занятие №3. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса, системы линейных однородных уравнений. (2ч)

1. <u>Метод Жордана—Гаусса</u>

Применяется для решения как неоднородных, так и однородных систем с произвольным числом уравнений m и произвольным числом неизвестных n. С помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы системы $(A\,|\,B)$ исходную систему (4) преобразуют в равносильную, которая позволяет решить вопрос о совместности системы, и, если она совместна, записать её решение. Преобразования проводятся по следующей схеме, которая называется *схемой Жордановых исключений*:

1) выбираем любой элемент матрицы A, отличный от нуля. Он называется *разрешающим элементом*. Пусть это a_{rs}, тогда r-я строка называется *разрешающей строкой*, а s-й столбец называется *разрешающим столбцом*;

2) элементы разрешающей строки (r-й) оставляем без изменения;

3) элементы разрешающего столбца (s-го), кроме разрешающего элемента a_{rs}, заменяем нулями;

4) остальные элементы матрицы (A/B) пересчитываем по формуле:

$$\begin{array}{ccc} a_{rj} & & \boxed{a_{rs}} \\ & \boxed{\times} & \\ a_{ij} & & a_{is} \end{array} \qquad a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{rs} - a_{rj}a_{is}}{a_{rs}}, \qquad \begin{array}{l} i = 1,\ldots,m, i \neq r; \\ j = 1,\ldots,n,\ j \neq s. \end{array} \qquad (7)$$

По этому же правилу преобразуются и элементы столбца B, кроме b_r. В результате матрица $(A\,|\,B)$ преобразуется в эквивалентную матрицу A', в которой снова выбираем разрешающий элемент. Это любой элемент $a'_{ij} \neq 0$ матрицы A' и расположенный в строке и столбце, которые ещё не были разрешающими. Схему преобразований 1—4 повторяем до тех пор, пока все строки (или столбцы) матрицы A не будут использованы как разрешающие.

Если при преобразованиях появляется строка, полностью состоящая из нулей, то её можно отбросить.

Если при преобразованиях появляется строка, соответствующая противоречивому уравнению вида:

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n = b_i, \qquad \text{где } b_i \neq 0,$$

то процесс преобразований на этом прекращают, так как система уравнений несовместна.

Пример. Дана система уравнений $A\cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -6 & -5 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Систему линейных алгебраических уравнений $A\cdot X = B$ запишем в координатной форме:

$$\begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & -x_3 = 0, \\ 3x_1 & -6x_2 & -5x_3 = -2, \\ 5x_1 & -4x_2 & -2x_3 = -3. \end{cases}$$

Решим систему методом Жордана—Гаусса.

Преобразования расширенной матрицы системы оформим в виде таблицы (см. табл.).

A/B	Σ	Примечания
$\left.\begin{array}{rrr} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -6 & -5 \\ 5 & -4 & -2 \end{array}\right\vert \begin{array}{r} 0 \\ -2 \\ -3 \end{array}$	$\begin{array}{r} -2 \\ -10 \\ -4 \end{array}$	Умножим первую строку на –1
$\left.\begin{array}{rrr} -2 & 3 & \boxed{1} \\ 3 & -6 & -5 \\ 5 & -4 & -2 \end{array}\right\vert \begin{array}{r} 0 \\ -2 \\ -3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ -10 \\ -4 \end{array}$	Разрешающий элемент a_{13}=1. Оставляем разрешающую строку (первую) без изменений. Все элементы разрешающего столбца (третьего), кроме a_{13}, заменяем нулями. Остальные элементы преобразуем по формуле (7)
$\left.\begin{array}{rrr} -2 & 3 & 1 \\ -7 & 9 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 0 \end{array}\right\vert \begin{array}{r} 0 \\ -2 \\ -3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array}$	Разрешающий элемент a_{31}=1. Оставляем разрешающую строку (третью) без изменений. Все элементы разрешающего столбца (первого), кроме a_{31}, заменяем нулями. Остальные элементы преобразуем по формуле (7)
$\left.\begin{array}{rrr} 0 & 7 & 1 \\ 0 & 23 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right\vert \begin{array}{r} -6 \\ -23 \\ -3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array}$	Умножим вторую строку на 1/23
$\left.\begin{array}{rrr} 0 & 7 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right\vert \begin{array}{r} -6 \\ -1 \\ -3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array}$	Разрешающий элемент a_{22} = 1. Оставляем разрешающую строку (вторую) без изменений. Все элементы разрешающего столбца (второго), кроме a_{22}, заменяем нулями. Остальные элементы преобразуем по формуле (7)
$\left.\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right\vert \begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ -1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array}$	

В последнем (четвертом) столбце матрицы $A \mid B$ получено решение системы, соответствующее неизвестным в тех столбцах, в которых элементы равны единице, а именно: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Отметим, что решения системы, полученные в пунктах *а*), *б*) (практическое занятие №1) и *в*), как и следовало ожидать, совпадают.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Пример. Считая матрицу $C_{4\times5}$ матрицей однородной системы $C \cdot X = 0$, найти:

а) фундаментальную систему решений;

б) общее решение;

в) какое-нибудь частное решение.

$$C=\begin{pmatrix}6 & -2 & 3 & 4 & 9\\ 3 & -1 & 2 & 6 & 3\\ 6 & -2 & 5 & 20 & 3\\ 9 & -3 & 4 & 2 & 15\end{pmatrix}.$$

Решение. Исходная система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases}6x_1-2x_2+3x_3+4x_4+9x_5=0,\\ 3x_1-x_2+2x_3+6x_4+3x_5=0,\\ 6x_1-2x_2+5x_3+20x_4+3x_5=0,\\ 9x_1-3x_2+4x_3+2x_4+15x_5=0.\end{cases}$$

Преобразования матрицы системы оформим в виде таблицы (табл.).

C	Σ	Примечания
$\begin{matrix}6 & -2 & 3 & 4 & 9\\ 3 & -1 & 2 & 6 & 3\\ 6 & -2 & 5 & 20 & 3\\ 9 & -3 & 4 & 2 & 15\end{matrix}$	$\begin{matrix}20\\13\\32\\27\end{matrix}$	Умножим вторую строку на –1
$\begin{matrix}6 & -2 & 3 & 4 & 9\\ -3 & \boxed{1} & -2 & -6 & -3\\ 6 & -2 & 5 & 20 & 3\\ 9 & -3 & 4 & 2 & 15\end{matrix}$	$\begin{matrix}20\\-13\\32\\27\end{matrix}$	Разрешающий элемент a_{22}=1. Разрешающую строку (вторую) оставляем без изменений. Все элементы разрешающего столбца (второго), кроме a_{22}, заменяем нулями. Остальные элементы преобразуем по формуле (7)
$\begin{matrix}0 & 0 & -1 & -8 & 3\\ -3 & 1 & -2 & -6 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 8 & -3\\ 0 & 0 & -2 & -16 & 6\end{matrix}$	$\begin{matrix}-6\\-13\\6\\-12\end{matrix}$	Умножим первую строку на –1, а четвёртую строку на 1/2
$\begin{matrix}0 & 0 & \boxed{1} & 8 & -3\\ -3 & 1 & -2 & -6 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 8 & -3\\ 0 & 0 & -1 & -8 & 3\end{matrix}$	$\begin{matrix}6\\-13\\6\\-6\end{matrix}$	Разрешающий элемент a_{13}=1. Разрешающую строку (первую) оставляем без изменений. Все элементы разрешающего столбца (третьего), кроме a_{13}, заменяем нулями. Остальные элементы преобразуем по формуле (7)
$\begin{matrix}0 & 0 & \boxed{1} & 8 & -3\\ -3 & 1 & 0 & 10 & -9\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}$	$\begin{matrix}6\\-1\\0\\0\end{matrix}$	Преобразование закончено. Получены две строки из нулей, все остальные строки преобразованы

а) Из табл. 4 следует, что ранг матрицы C равен $r(C)$=2, так как есть миноры второго порядка, отличные от нуля, например $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1,$ а любые миноры третьего и четвёртого порядков равны нулю.

Переменные системы x_2, x_3, соответствующие базисному минору матрицы А называются *базисными переменными*, остальные x_1, x_4, x_5 — свободными.

Система, равносильная исходной, имеет вид:

$$\begin{cases} x_3 + 8x_4 - 3x_5 = 0, \\ -3x_1 + x_2 + 10x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$$

Оставляя слева базисные переменные x_2 и x_3, соответствующие линейно независимым столбцам матрицы A, и перенося в правую часть уравнений неизвестные x_1, x_4, x_5, получаем:

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1 - 10x_4 + 9x_5, \\ x_3 = -8x_4 + 3x_5. \end{cases}$$

б) Полагая свободные переменные равными произвольным константам $x_1 = c_1$, $x_4 = c_4$, $x_5 = c_5$, получаем общее решение системы в виде:

$$X_{00} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 3c_1 - 10c_4 + 9c_5 \\ -8c_4 + 3c_5 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальную систему решений образуют три линейно независимых частных решения. Получим эти решения, задавая системе констант (c_1, c_4, c_5) линейно независимые значения, например, (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1). Вычисления занесем в таблицу (табл.).

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	3	0	0	0
0	–10	–8	1	0
0	9	3	0	1

Итак, фундаментальную систему составляют три линейно независимых решения:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной системы, согласно (10), имеет вид:

$X_{00} = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, где c_1, c_2, c_3 — произвольные константы.

в) Частное решение можно получить из общего решения, придавая определённые значения произвольным постоянным. Решения E_1, E_2, E_3, образующие фундаментальную систему решений, являются частными решениями этой однородной системы.

3. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ №1

Задание 1. Дана система уравнений $A \cdot X = B$, где матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -3b & c \\ 3a & -6b & 5c \\ 5a & -4b & 2c \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2ab \\ 3ab \end{pmatrix}.$$

Решить систему методом Жордана—Гаусса.

Значения параметров a, b, c, d даны в табл. 1.

Таблица 1

№ вар-та	a	b	c	d	№ вар-та	a	b	c	d
1	–1	1	5	–4	16	1	–2	3	–1
2	2	1	4	–1	17	3	–1	2	5
3	1	–3	1	–4	18	2	2	–1	4
4	2	1	6	1	19	1	–1	–1	2
5	1	–2	–1	6	20	4	1	–1	2
6	3	–2	1	1	21	1	3	–1	2
7	–1	1	3	–3	22	–2	2	–1	2
8	–2	–1	1	4	23	5	–1	–1	2
9	–2	–2	3	1	24	1	3	4	–1
10	4	3	2	1	25	1	–1	–2	3
11	1	2	–2	4	26	2	3	1	2
12	1	3	–2	–2	27	–1	1	–2	2
13	3	–3	1	2	28	3	1	1	–2
14	–2	3	–1	1	29	4	–2	1	1
15	1	1	5	–2	30	–2	2	3	–1

Задание 2. Элементы матрицы $C_{4\times5}$ заданы по вариантам:

№ вар-та	$C_{(4\times5)}$	№ вар-та	$C_{(4\times5)}$	№ вар-та	$C_{(4\times5)}$
1	$\begin{matrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 6 & 0 \end{matrix}$	11	$\begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & -3 \end{matrix}$	21	$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{matrix}$
2	$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 9 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & -3 & 1 \end{matrix}$	12	$\begin{matrix} 3 & -2 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \end{matrix}$	22	$\begin{matrix} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 \end{matrix}$

3	2	–4	3	1	0	13	1	2	2	3	5	23	2	1	–1	–1	1
	1	–2	1	–4	2		1	2	1	2	1		1	–1	1	1	–2
	0	1	–1	3	1		1	2	3	5	13		3	3	–3	–3	4
	4	–7	4	–4	5		1	2	3	3	9		4	5	–5	–5	17
4	1	2	0	–3	2	14	8	–4	3	6	8	24	1	–2	1	–1	1
	1	–1	–3	1	–3		10	–5	5	9	15		2	1	–1	2	–3
	2	–3	4	–5	2		4	–2	1	2	2		3	–2	–1	1	–2
	9	–9	6	–16	2		2	–1	3	7	11		1	–5	1	–2	2
5	1	–2	–1	3	5	15	3	3	5	1	2	25	1	–2	1	1	–1
	2	–4	–2	6	10		3	5	3	1	–3		2	1	–1	–1	1
	2	1	0	1	20		3	5	1	3	–3		1	7	–5	–5	5
	–1	2	1	–3	–5		0	2	–2	0	–5		3	–1	–2	1	–1
6	2	3	4	1	2	16	2	–1	1	2	3	26	3	1	–2	1	–1
	1	1	7	1	6		6	–3	2	4	5		2	–1	7	–3	5
	3	2	1	5	8		6	–3	4	8	13		1	3	–2	5	–7
	2	1	–6	4	2		4	–2	1	1	2		3	–2	7	–5	8
7	2	3	11	5	5	17	1	1	3	–2	3	27	2	–1	1	2	3
	1	1	5	2	3		2	2	4	–1	3		6	–3	2	4	5
	3	2	8	4	5		3	3	5	–2	3		6	–3	4	8	13
	3	4	14	9	4		2	2	8	3	9		4	–2	1	1	2
8	3	2	5	4	3	18	4	5	2	3	1	28	3	1	–8	2	1
	2	3	6	8	5		2	4	1	2	3		2	–2	–3	–7	2
	4	–4	–4	–16	–8		2	–2	1	0	–7		1	11	–12	34	–5
	4	1	4	0	2		6	1	3	2	2		1	–5	2	–16	3
9	2	7	3	1	6	19	1	2	3	–2	1	29	1	1	3	–2	3
	5	12	5	3	10		3	6	5	–4	3		2	2	4	–1	3
	6	–1	–2	5	–2		1	2	7	–4	1		3	3	5	–2	3
	3	5	2	2	4		2	4	2	–3	3		2	2	8	–3	9
10	2	–5	3	1	5	20	1	1	0	–3	–1	30	1	2	0	–3	2
	3	–7	3	–1	–1		1	–1	2	–1	0		1	–1	–3	1	–3
	5	–9	6	2	7		4	–2	6	3	–4		2	–3	4	–5	2
	4	–6	3	1	8		2	4	–2	4	–7		9	–9	6	–16	2

Считая матрицу $C_{(4\times5)}$ матрицей однородной системы $C\cdot X=0$, найти для этой системы:

а) фундаментальную систему решений;

б) общее решение;

в) какое-нибудь частное решение.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ №2

Морозова, А.В. Высшая математика : учебное пособие в 4 ч. Ч. 1. Алгебра и аналитическая геометрия / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2016. – 103 с. Библиогр.: 7 назв. (стр.97-99)

Практическое занятие №4. Векторы на плоскости и в пространстве. (2ч.)

Определение. *Вектором* называется направленный отрезок *AB* с начальной точкой *A* и конечной точкой *B*.

Обозначают вектор через $\overrightarrow{AB}$ или $\overline{AB}$, либо одной буквой $\vec{a}$ или $\overline{a}$. Геометрически вектор изображают в виде стрелки (рис. 2.1).

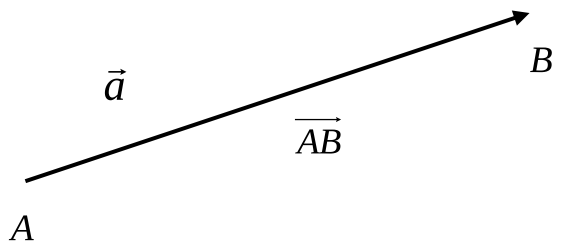


Рис.2.1 Изображение вектора

Определение. *Длиной* или *модулем* $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ *вектора* $\overrightarrow{AB}$ называется неотрицательное число, равное длине отрезка, изображающего вектор.

Определение. Вектор $\vec{0}$, длина которого равна нулю (в силу этого он не имеет определенного направления) называется *нулевым или нуль-вектором*.

Определение. Вектор $\vec{e}$, длина которого равна единице ($|\vec{e}|=1$), называется *единичным вектором.*

Определение. Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Определение. Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Определение. Два вектора считаются *равными*, если:

1) модули векторов равны,
2) векторы коллинеарны,
3) векторы одинаково направлены.

Из определения равенства векторов вытекает, что *векторы равны, если их можно совместить друг с другом параллельным переносом.* Такие векторы называют *свободными* и для них безразлично, где поместить начало вектора.

Определение. *Ортом* данного вектора называется вектор единичной длины, совпадающий по направлению с данным вектором.

Орт вектора $\vec{a}$ можно записать в виде

$$\vec{e}_{\vec{a}}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

<u>*Линейные операции над векторами*</u>

Определение. *Линейными операциями или действиями над векторами* называются действия сложения векторов и умножения вектора на число (скаляр).

Определение. *Произведением вектора* $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, имеющий длину $\left|\vec{b}\right|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно ему, если $\lambda<0$.

Очевидно, что *векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ *коллинеарны.*

Определение. *Суммой двух векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, определяемый по правилу треугольника или параллелограмма (рис.2.2).

Разностью двух векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

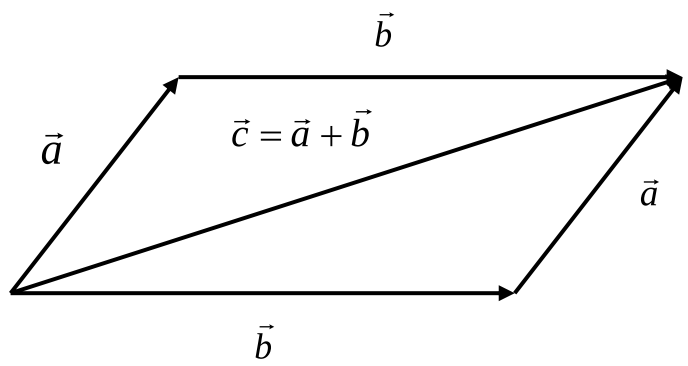


Рис. 2.2 Сложение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Линейные операции над векторами подчиняются следующим правилам: для любых векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и любых чисел α,β выполняются условия:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
4) для любого вектора $\vec{a}$ существует такой вектор $-\vec{a}$, называемый *противоположным*, что
   $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;
5) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$;
6) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$;
7) $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$;
8) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Пример. Написать разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если $\vec{a}=\{3;-5;2\}$, $\vec{b}=\{2;1;-4\}$, $\vec{c}=\{-1;6;0\}$, $\vec{x}=\{-4;11;16\}$.

Решение. Запишем вектор $\bar{x}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{x}=\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}+\gamma\,\vec{c}$. Найдем коэффициенты α, β, γ. Для этого запишем разложение вектора $\vec{x}$ в координатной форме:

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = x_1, \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = x_2, \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = x_3. \end{cases}$$

Подставим координаты заданных векторов. Получим систему

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta - \gamma = -4, \\ -5\alpha + \beta + 6\gamma = 11, \\ 2\alpha - 4\beta = 16, \end{cases}$$

решив которую, найдем коэффициенты $\alpha = 2, \beta = -3, \gamma = 4$. Т.е. $\vec{x} = 2\,\vec{a} - 3\,\vec{b} + 4\,\vec{c}$.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Морозова, А.В. Высшая математика : учебное пособие в 4 ч. Ч. 1. Алгебра и аналитическая геометрия / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2016. – 102 с. Библиогр.: 7 назв. (стр.99).

Практическое занятие №5. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов. (2ч.)

Скалярное произведение векторов

Определение. *Углом между векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется угол между векторами, имеющими общее начало и равными векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 2.3).

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

Полагают, что $0 \le (\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) \le \pi$. Направление отсчета угла в пространстве не указывается, угол рассматривается по абсолютной величине.

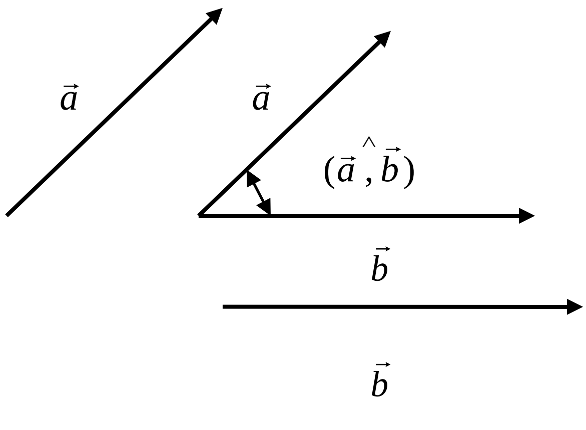


Рис.2.3 Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Определение. *Скалярным произведением* векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется *число*, равное произведению модулей векторов на косинус угла между векторами.

Обозначается скалярное произведение одним из следующих способов:

$$(\vec{a},\vec{b}),\ \vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{a}\vec{b}\,.$$

Согласно определению скалярного произведения

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})\,.$$

Скалярное произведение векторов обладает следующими *свойствами:*

1) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$;
2) линейность скалярного произведения по каждому из сомножителей: для любых векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и любых чисел α,β справедливы равенства:

   а) $(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\vec{c})=\alpha(\vec{a},\vec{c})+\beta(\vec{b},\vec{c})$;

   б) $(\vec{a},\alpha\vec{b}+\beta\vec{c})=\alpha(\vec{a},\vec{b})+\beta(\vec{a},\vec{c})$.

Определение. *Векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Для векторов на плоскости и в пространстве понятие ортогональности векторов эквивалентно понятию перпендикулярности векторов.

Очевидно, что *два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю*:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow(\vec{a},\vec{b})=0\,.$$

Действительно, из определения скалярного произведения для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вытекает, что

1) если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то угол $(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})=\pi/2$ и

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\pi/2=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot 0=0\,;$$

2) если $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})=0$, но $|\vec{a}|\neq 0,|\vec{b}|\neq 0$, то $\cos(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})=0$, поэтому $(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})=\pi/2$ и вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Заметим, что *нулевой вектор можно считать перпендикулярным (ортогональным) к любому вектору*.

Определение. *Проекцией вектора* $\vec{a}$ *на ось вектора* $\vec{b}$ называется скалярная величина

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})\,.$$

Если $0\le(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})<\pi/2$, то $np_{\vec{b}}\vec{a}>0$; если $\pi/2<(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})\le\pi$, то $np_{\vec{b}}\vec{a}<0$; если $(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})=\pi/2$, то $np_{\vec{b}}\vec{a}=0$ (рис. 2.4).

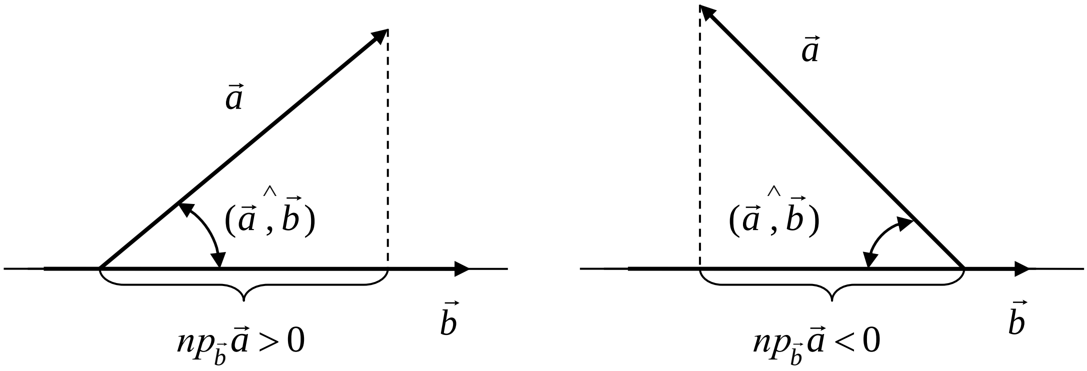


Рис.2.4 Проекция вектора $\vec{a}$ на ось вектора $\vec{b}$

Скалярное произведение векторов в координатной форме

Рассмотрим векторы в пространстве.

Пусть разложения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по ортонормированному базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ имеют вид

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}; \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Из определения скалярного произведения векторов для ортонормированного базиса имеем:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Заметим, что *аналогичное выражение имеет место и для векторов на плоскости*, только надо в рассматриваемых соотношениях формально положить третью координату равной нулю. Так, если записать векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости в виде разложения по ортонормированному базису $(\vec{i}, \vec{j})$

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}; \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j},$$

то

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

В словесном выражении полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

Скалярное произведение векторов в координатной форме равно сумме попарных произведений соответствующих координат.

Условие ортогональности (перпедикулярности) векторов в координатной форме в пространстве принимает вид:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0,$$

а на плоскости:

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

Пример 1.

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{2;-3;-1\}$, $\vec{b} = \{1;-2;8\}$.

Решение. $(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) + (-1) \cdot 8 = 2 + 6 - 8 = 0$.

В данном примере скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно нулю, следовательно, эти векторы ортогональны (перпендикулярны).

Нахождение угла между векторами.

Так как скалярное произведение $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$, то

$$\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Пусть разложения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в пространстве по ортонормированному базису $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ имеют вид

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\,; \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\,.$$

Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ и

$$\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Если разложения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости по ортонормированному базису $(\vec{i},\vec{j})$ имеют вид

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\,; \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}\,,$$

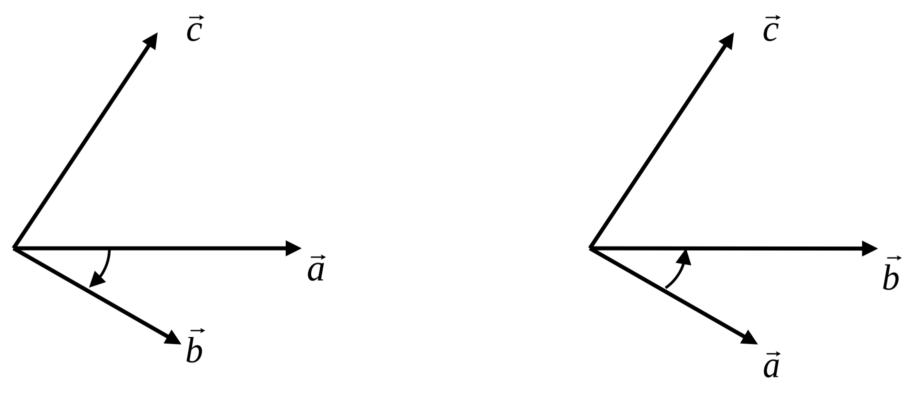
то $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ и

$$\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Векторное произведение векторов

Определение. Упорядоченная тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется *правоориентированной или правой тройкой,* если из конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден *против часовой стрелки*.

Упорядоченная тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется *левоориентированной или левой тройкой,* если из конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден *по часовой стрелке* (рис. 2.5).



Левая тройка *Правая тройка*

Рис. 2.5 Ориентированные тройки векторов

Из определения вытекают *свойства ориентированной тройки векторов:*

1) *круговая перестановка* векторов *сохраняет* ориентацию тройки: тройки $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$; $\vec{c},\vec{a},\vec{b}$; $\vec{b},\vec{c},\vec{a}$ имеют одинаковую ориентацию (или все правые или все левые).
2) *перестановка любой пары* векторов в ориентированной тройке $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *или изменение знака* у одного из векторов *меняет* ориентацию.

Определение. *Векторным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b})$;
2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3) векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют правую тройку.

Векторное произведение $\vec{a}$ на $\vec{b}$ обозначается через $[\vec{a},\vec{b}]$ или $\vec{a} \times \vec{b}$.

Векторное произведение векторов обладает следующими *свойствами:*

1) $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$;
2) линейность векторного произведения по каждому из сомножителей: для любых векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и любых чисел α,β справедливы равенства:

   а) $[\alpha\vec{a} + \beta\vec{b},\vec{c}] = \alpha[\vec{a},\vec{c}] + \beta[\vec{b},\vec{c}]$;

   б) $[\vec{a},\alpha\vec{b} + \beta\vec{c}] = \alpha[\vec{a},\vec{b}] + \beta[\vec{a},\vec{c}]$.

Для векторов на плоскости и в пространстве понятие коллинеарности векторов эквивалентно понятию параллельности векторов (угол между векторами равен нулю или π).

Поэтому *два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда модуль их векторного произведения равен нулю (векторное произведение равно нуль-вектору)*:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = 0 \text{ или } \left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = 0 \Leftrightarrow \textit{Векторы } \vec{a},\vec{b} - \textit{коллинеарны}$$

Действительно, из определения векторного произведения для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вытекает, что

1) если $\vec{a} \| \vec{b}$, то угол $(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = 0$ или $(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = \pi$ и
$$\left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0;$$
2) если $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = 0$, но $|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$, то $\sin(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = 0$, поэтому $(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = 0$ или $(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = \pi$, т.е. вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Заметим, что *нулевой вектор можно считать коллинеарным к любому вектору*.

Выясним геометрический смысл векторного произведения.

Из определения векторного произведения $[\vec{a},\vec{b}]$ и формулы для площади параллелограмма S вытекает, что

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = S,$$

т.е. *модуль векторного произведения векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, как на сторонах* (рис. 2.6).

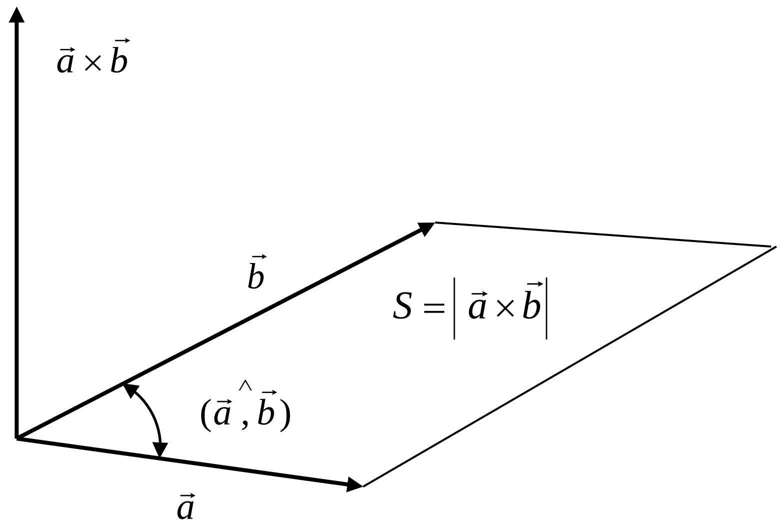


Рис. 2.6 Геометрический смысл векторного произведения векторов

<u>*Векторное произведение векторов в координатной форме*</u>

Пусть разложения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по ортонормированному базису $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ имеют вид

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\,; \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\,.$$

Тогда на основании свойств векторного произведения векторов, а также правил сложения векторов и умножения вектора на число получаем выражение для векторного произведения векторов в координатной форме, записанного в виде определителя

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

который нужно вычислять разложением по первой строке.

Пример 2.

Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = \{1;0;-1\}$, $\vec{b} = \{3;-2;4\}$.

Решение.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ -2 & 4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & -2\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=-2\vec{i}-7\vec{j}-2\vec{k}=\{-2;-7;-2\}.$$

Пример 3. Найти угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{a}=\{2;-5;4\}$, $\vec{b}=\{7;3;1\}$, $\vec{p}=3\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}-6\vec{b}$.

Решение. Воспользуемся формулой $\cos\varphi=\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}$. Определим координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$, при этом учтем, что при умножении вектора на число, мы умножаем на это число каждую координату этого вектора, а при сложении векторов – складываем одноименные координаты:

$$\vec{p}=\{3\cdot 2-7;\,3\cdot(-5)+3;\,3\cdot 4+1\}=\{-1;-18;11\},$$

$$\vec{q}=\{2\cdot 2-6\cdot 7;\,2\cdot(-5)-6\cdot 3;\,2\cdot 4-6\cdot 1\}=\{-38;-28;2\}.$$

Найдем скалярное произведение векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ и их длины:

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=-1\cdot(-38)+(-18)\cdot(-28)+11\cdot 2=564,$$

$$|\vec{p}|=\sqrt{1+324+121}=\sqrt{446},\quad |\vec{q}|=\sqrt{1444+784+4}=\sqrt{2232}.$$

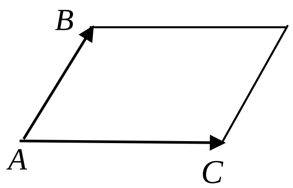
Подставив в формулу, получим

$\cos\varphi=\dfrac{564}{\sqrt{446}\cdot\sqrt{1444}}=\dfrac{564}{\sqrt{644024}}=\dfrac{564}{2\sqrt{161006}}=\dfrac{282}{\sqrt{161006}}=0{,}703$. Отсюда $\varphi=\arccos\ 0{,}703$.

Пример 4. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$, если $A(-4;6;-2)$, $B(5;-1;7)$, $C(-1;1;0)$.

Решение. Проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ находится по формуле $np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$. Определим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, их скалярное произведение и длину вектора $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}=\{5-(-4);-1-6;7-(-2)\}=\{9;-7;9\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-1-(-4);1-6;0-(-2)\}=\{3;-5;2\}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=27+35+18=80$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{3^2+(-5)^2+2^2}=\sqrt{9+25+4}=\sqrt{38}$. Тогда $np_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}=\dfrac{80}{\sqrt{38}}$.

Пример 5. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, если $A\,(3;3;1)$, $B\,(5;1;-2)$, $C\,(4;1;1)$.



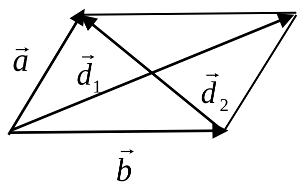
Решение. Площадь параллелограмма будем искать по формуле $S_{пар}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$. Для этого найдем сначала координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, а затем их векторное произведение: $\overrightarrow{AB}=\{2;-2;-3\}$, $\overrightarrow{AC}=\{1;-2;0\}$,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\,(0-6)-\vec{j}\,(0+3)+\vec{k}\,(-4+2)=-6\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}\,.$$

Вычислим модуль полученного векторного произведения, который и будет численно равен искомой площади параллелограмма: $S_{пар}=\sqrt{(-6)^2+(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{36+9+4}=\sqrt{49}=7$ (*кв. ед.*).

Пример 6. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, где $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=2$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=\pi/3$. Вычислить длину диагоналей этого параллелограмма, угол между диагоналями и площадь параллелограмма.

Решение.



$$\vec{d}_1=\vec{a}+\vec{b}=(2\vec{p}+3\vec{q})+(\vec{p}-2\vec{q})=3\vec{p}+\vec{q}\,,$$

$$\vec{d}_2=\vec{a}-\vec{b}=(2\vec{p}+3\vec{q})-(\vec{p}-2\vec{q})=\vec{p}+5\vec{q}\,,$$

$$\left|\vec{d}_1\right|=\sqrt{(\vec{d}_1)^2}=\sqrt{(3\vec{p}+\vec{q})^2}=\sqrt{9\vec{p}^{\,2}+6\,\vec{p}\cdot\vec{q}+\vec{q}^{\,2}}=$$

$$=\sqrt{9\cdot16+6\cdot4\cdot2\cdot\cos\frac{\pi}{3}+4}=\sqrt{172}=2\sqrt{43}\,,$$

$$\left|\vec{d}_2\right|=\sqrt{(\vec{d}_2)^2}=\sqrt{(\vec{p}+5\vec{q})^2}=\sqrt{\vec{p}^{\,2}+10\,\vec{p}\cdot\vec{q}+25\,\vec{q}^{\,2}}=\sqrt{16+10\cdot4\cdot2\cdot\cos\frac{\pi}{3}+25\cdot4}=$$

$$=\sqrt{156}=2\sqrt{39}\,.$$

Угол между диагоналями обозначим буквой φ, тогда

$$\cos\varphi=\frac{\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2}{\left|\vec{d}_1\right|\cdot\left|\vec{d}_2\right|}=\frac{(3\vec{p}+\vec{q})\cdot(\vec{p}+5\vec{q})}{2\sqrt{43}\cdot2\sqrt{39}}=\frac{3\,\vec{p}\cdot\vec{p}+15\,\vec{p}\cdot\vec{q}+\vec{q}\cdot\vec{p}+5\,\vec{q}\cdot\vec{q}}{4\sqrt{1677}}=$$

$$=\frac{3\cdot16+16\cdot4\cdot2\cdot\cos\frac{\pi}{3}+5\cdot4}{4\sqrt{1677}}=\frac{132}{4\sqrt{1677}}\approx0{,}806.$$

Следовательно, $\varphi=\arccos 0{,}806$.

$$S_{\text{пар}}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|(2\vec{p}+3\vec{q})\times(\vec{p}-2\vec{q})\right|=\left|2\vec{p}\times\vec{p}-4\vec{p}\times\vec{q}+3\vec{q}\times\vec{p}-6\vec{q}\times\vec{q}\right|=\left|-7\,\vec{p}\times\vec{q}\right|=$$

$$=7\cdot4\cdot2\cdot\sin\frac{\pi}{3}=28\sqrt{3}\ (\textit{кв. ед.}).$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 1. Морозова, А.В. Высшая математика : учебное пособие в 4 ч. Ч. 1. Алгебра и аналитическая геометрия / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2016. – 102 с. Библиогр.: 7 назв. (стр.99).

Задание 2. Найти угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если:

1. $\vec{a}=\{-1; 2; 8\}$, $\vec{b}=\{3; 7; -1\}$, $\vec{p}=4\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{q}=9\vec{b}-12\vec{a}$.
2. $\vec{a}=\{2; 0; -5\}$, $\vec{b}=\{1; -3; 4\}$, $\vec{p}=2\vec{a}-5\vec{b}$, $\vec{q}=5\vec{a}-2\vec{b}$.
3. $\vec{a}=\{4; 2; -7\}$, $\vec{b}=\{5; 0; -3\}$, $\vec{p}=\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{q}=6\vec{b}-2\vec{a}$.
4. $\vec{a}=\{-1; 3; 4\}$, $\vec{b}=\{2; -1; 0\}$, $\vec{p}=6\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{b}-3\vec{a}$.
5. $\vec{a}=\{5; 0; 8\}$, $\vec{b}=\{-3; 1; 7\}$, $\vec{p}=3\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{q}=12\vec{b}-9\vec{a}$.
6. $\vec{a}=\{2; -1; 6\}$, $\vec{b}=\{-1; 3; 8\}$, $\vec{p}=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}-5\vec{b}$.
7. $\vec{a}=\{4; 2; 9\}$, $\vec{b}=\{0; -1; 3\}$, $\vec{p}=4\vec{b}-3\vec{a}$, $\vec{q}=4\vec{a}-3\vec{b}$.
8. $\vec{a}=\{9; 5; 3\}$, $\vec{b}=\{7; 1; -2\}$, $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}+5\vec{b}$.
9. $\vec{a}=\{5; -1; -2\}$, $\vec{b}=\{6; 0; 7\}$, $\vec{p}=3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=4\vec{b}-6\vec{a}$.
10. $\vec{a}=\{2; -1; 4\}$, $\vec{b}=\{3; -7; -6\}$, $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}-2\vec{b}$.
11. $\vec{a}=\{3; 7; 0\}$, $\vec{b}=\{4; 6; -1\}$, $\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{q}=5\vec{a}-7\vec{b}$.
12. $\vec{a}=\{1; -2; 4\}$, $\vec{b}=\{7; 3; 5\}$, $\vec{p}=6\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{b}-2\vec{a}$.
13. $\vec{a}=\{3; -1; 6\}$, $\vec{b}=\{5; 7; 10\}$, $\vec{p}=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{b}-2\vec{a}$.
14. $\vec{a}=\{8; 3; -1\}$, $\vec{b}=\{4; 1; 3\}$, $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{b}-4\vec{a}$.
15. $\vec{a}=\{5; 0; -2\}$, $\vec{b}=\{6; 4; 3\}$, $\vec{p}=5\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{q}=6\vec{b}-10\vec{a}$.
16. $\vec{a}=\{7; 9; -2\}$; $\vec{b}=\{5; 4; 3\}$, $\vec{p}=4\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=4\vec{b}-\vec{a}$.
17. $\vec{a}=\{-1; 2; -1\}$, $\vec{b}=\{2; -7; 1\}$, $\vec{p}=6\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{b}-3\vec{a}$.
18. $\vec{a}=\{3; 7; 0\}$, $\vec{b}=\{1; -3; 4\}$, $\vec{p}=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{b}-2\vec{a}$.
19. $\vec{a}=\{-2; 7; -1\}$, $\vec{b}=\{-3; 5; 2\}$, $\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}+2\vec{b}$.
20. $\vec{a}=\{0; 3; -2\}$, $\vec{b}=\{1; -2; 1\}$, $\vec{p}=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}+5\vec{b}$.
21. $\vec{a}=\{5; 0; -1\}$, $\vec{b}=\{7; 2; 3\}$, $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{b}-6\vec{a}$.
22. $\vec{a}=\{1; 4; 2\}$, $\vec{b}=\{3; -2; 6\}$, $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{b}-6\vec{a}$.
23. $\vec{a}=\{-2; -3; -2\}$, $\vec{b}=\{1; 0; 5\}$, $\vec{p}=3\vec{a}+9\vec{b}$, $\vec{q}=-\vec{a}-3\vec{b}$.
24. $\vec{a}=\{3; 4; -1\}$, $\vec{b}=\{2; -1; 1\}$, $\vec{p}=6\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{b}-2\vec{a}$.
25. $\vec{a}=\{1; -2; 5\}$, $\vec{b}=\{3; -1; 0\}$, $\vec{p}=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{b}-2\vec{a}$.
26. $\vec{a}=\{1; 4; -2\}$, $\vec{b}=\{1; 1; -1\}$, $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=4\vec{a}+2\vec{b}$.
27. $\vec{a}=\{3; 5; 4\}$, $\vec{b}=\{5; 9; 7\}$, $\vec{p}=-2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}-2\vec{b}$.
28. $\vec{a}=\{1; 2; -3\}$, $\vec{b}=\{2; -1; -1\}$, $\vec{p}=4\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{q}=8\vec{a}-\vec{b}$.
29. $\vec{a}=\{-2; 4; 1\}$, $\vec{b}=\{1; -2; 7\}$, $\vec{p}=5\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}-\vec{b}$
30. $\vec{a}=\{1; 0; 1\}$, $\vec{b}=\{-2; 3; 5\}$, $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$.

***Задание* 3.** Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$, если:

1. $A(-2; 4; -6)$, $B(0; 2; -4)$, $C(-6;8;-10)$.
2. $A(-4; 0; 4)$, $B(-1; 6; 7)$, $C(1; 10; 9)$.
3. $A(0; 1; 0)$, $B(0; 2; 1)$, $C(1; 2; 0)$.
4. $A(1; 4; -1)$, $B(-2; 4; -5)$, $C(8; 4; 0)$.
5. $A(-2; 1; 1)$, $B(2; 3; -2)$, $C(0; 0; 3)$.

6. $A(3; 3; –1)$, $B(5; 1; –2)$, $C(4;1;–3)$.
7. $A(0; 3; –6)$, $B(9; 3; 6)$, $C(12; 3 ;3)$.
8. $A(–1;2;–3)$, $B(0;1;–2)$, $C(–3;4;–5)$.
9. $A(2;2;7)$, $B(0;0;6)$, $C(–2;5;7)$.
10. $A(2;3;2)$, $B(–1;–3;–1)$, $C(–3;–7;–3)$.
11. $A(7;0;2)$, $B(7;1;3)$, $C(8;–1;2)$.
12. $A(1; –1;0)$, $B(– 2;– 1;4)$, $C(8;–1;–1)$.
13. $A(– 4;3;0)$, $B(0;1;3)$, $C(–2;4;–2)$.
14. $A(3;3;–1)$, $B(5;1;–2)$, $C(4;1;1)$.
15. $A(0;2;–4)$; $B(8;2;2)$; $C(6;2;4)$.
16. $A(3;–6;9)$, $B(0;–3;6)$, $C(9; –12; 15)$.
17. $A(2;–8;–1)$, $B(4;–6;0)$, $C(–2; –5; –1)$.
18. $A(0;0;4)$, $B(–3;–6;1)$, $C(–5; –10; –1)$.
19. $A(6;2;–3)$, $B(6;3;–2)$, $C(7; 3; –3)$.
20. $A(–1;–2;1)$, $B(–4;–2;5)$, $C(–8; –2; 2)$.
21. $A(2; 1; –1)$, $B(6; –1; –4)$, $C(4; 2; 1)$.
22. $A(3; 3; –1)$, $B(1; 5; –2)$, $C(4;1;1)$.
23. $A(0; 1; –2)$, $B(3; 1; 2)$, $C(4; 1; 1)$.
24. $A(2; –4; 6)$, $B(0; –2; 4)$, $C(6;–8; 10)$.
25. $A(–3; –7; –5)$, $B(0;–1;–2)$, $C(2;3;0)$.
26. $A(5; 3; –1)$, $B(5; 2; 0)$, $C(6;4;–1)$.
27. $A(–4; –2; 0)$, $B(–1; –2; 4)$, $C(3;–2;1)$.
28. $A(–1; 2; –3)$, $B(3; 4; –6)$, $C(1; 1; –1)$.
29. $A(3; 3; –1)$, $B(5;5;–2)$, $C(4; 1; 1)$.
30. $A(0; –3; 6)$, $B(–12; –3; –3)$, $C(–9; –3; –6)$.

Практическое занятие №6. Прямая на плоскости. (2ч.)

1. Общее уравнение прямой

Пусть задана декартова прямоугольная система координат на плоскости и линейное уравнение

$$Ax + By + C = 0 \qquad (3.1.1)$$

в этой системе, причем $A^2 + B^2 \neq 0$, т.е. хотя бы одно из действительных чисел A и B не равно нулю.

Определение. Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0$$

называется *общим уравнением прямой*.

Вектор $\vec{N} = \{A, B\}$, перпендикулярный к прямой (3.1.1), называется *нормальным вектором* этой прямой.

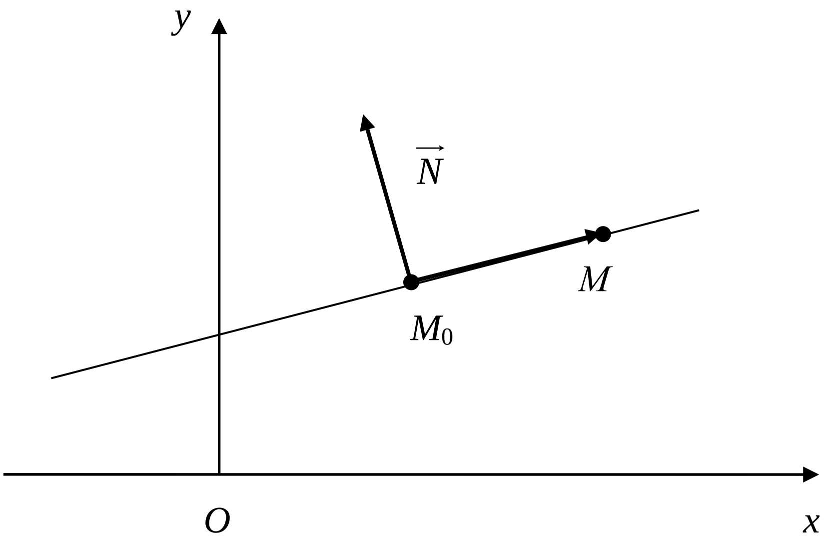


Рис. 3.1 Общее уравнение прямой

Отметим *частные случаи положения прямой относительно системы координат.*

1) Если в уравнении (3.1.1) свободный член $C=0$, т.е.

$$Ax+By=0,$$

то прямая проходит через начало координат, так как координаты точки $O(0;0)$ удовлетворяют уравнению.

2) Если $A=0$, то нормальный вектор $\vec{N}=\{0,B\}, B\neq 0$, параллелен оси ординат, значит, сама прямая параллельна оси абсцисс и имеет уравнение

$$By+C=0 \text{ или } y=-C/B.$$

3) Если $B=0$, то нормальный вектор $\vec{N}=\{A,0\}, A\neq 0$, параллелен оси абсцисс, значит, сама прямая параллельна оси ординат и имеет уравнение

$$Ax+C=0 \text{ или } x=-C/A.$$

4) Если в двух последних случаях $C=0$, то прямые совпадают с осями координат:

$$y=0 \text{ – ось абсцисс и } x=0 \text{ – ось ординат.}$$

Заметим, что уравнение (3.1.1) можно умножить на любое число, не равное нулю, и полученное уравнение будет уравнением той же самой прямой.

2. Параметрические уравнения прямой

Положение прямой на плоскости можно определить следующими данными:

1) точкой $M_0(x_0, y_0)$, через которую проходит прямая, называемой *начальной точкой*;

2) вектором $\vec{s}=\{m,n\}$, параллельным прямой, называемым *направляющим вектором прямой*.

Составим сначала уравнение прямой в векторной форме.

Пусть даны *начальный вектор* $\vec{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$ и направляющий вектор прямой $\vec{s}$ (рис. 3.2).

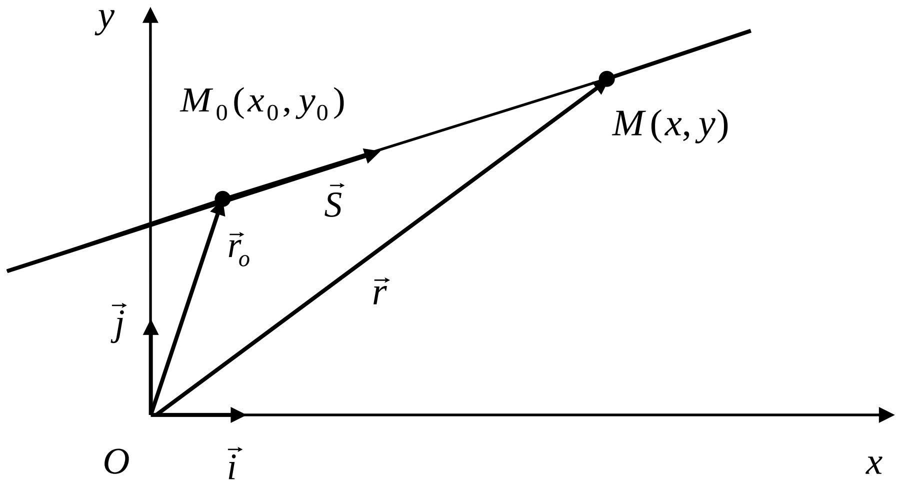


Рис. 3.2 Уравнение прямой на плоскости в векторной форме

Пусть $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ – радиус-вектор произвольной точки $M(x, y)$ прямой. Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}.$$

Так как $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$, то существует такое число *t*, что $M_0M = t\vec{s}$.

Полагая $\overrightarrow{OM} = \vec{r}, \overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0, \overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$, получаем *уравнение прямой в параметрической векторной форме*:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s} \qquad (3.1.3)$$

Когда параметр *t* пробегает все вещественные значения $-\infty < t < +\infty$, конец вектора $\vec{r}$ пробегает все точки прямой.

Выразим векторы $\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{s}$ в координатной форме:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j},\ \vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j},\ \vec{s} = \{m, n\} = m\vec{i} + n\vec{j}$$

и подставим в уравнение (3.1.3):

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + t(m\vec{i} + n\vec{j}) \quad \text{или} \quad x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0 + mt)\vec{i} + (y_0 + nt)\vec{j}.$$

Приравнивая координаты при ортах $\vec{i}$ и $\vec{j}$, получим *параметрические уравнения прямой* на плоскости

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases} \quad \text{где } -\infty < t < +\infty. \qquad (3.1.4)$$

Определение. Координаты *m* и *n* направляющего вектора прямой $\vec{s} = \{m, n\}$ называются направляющими коэффициентами прямой.

Пример. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;3)$ параллельно вектору $\vec{s} = \{-5;4\}$.

Решение.

Координаты начальной точки $x_0 = 2, y_0 = 3$, направляющие коэффициенты искомой прямой $m = -5, n = 4$. Параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = 2 - 5t, \\ y = 3 + 4t. \end{cases}$$

3. Каноническое уравнение прямой

Преобразуем параметрические уравнения прямой (3.1.4) к виду

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{m} = t, \\ \dfrac{y - y_0}{n} = t, \end{cases}$$

откуда следует *каноническое уравнение прямой*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \qquad (3.1.5)$$

проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{s} = \{m, n\}$.

Заметим, что уравнение (3.1.5) может быть получено и из условия коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ и $\vec{s} = \{m, n\}$, согласно которому соответствующие координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ требуется провести прямую. Возьмем на этой прямой любую (текущую) точку $M(x, y)$ и рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1\}$ и $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ (рис. 3.3). Эти векторы коллинеарны (лежат на одной прямой), поэтому их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (3.1.6)$$

Полученное уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через две данные точки.*

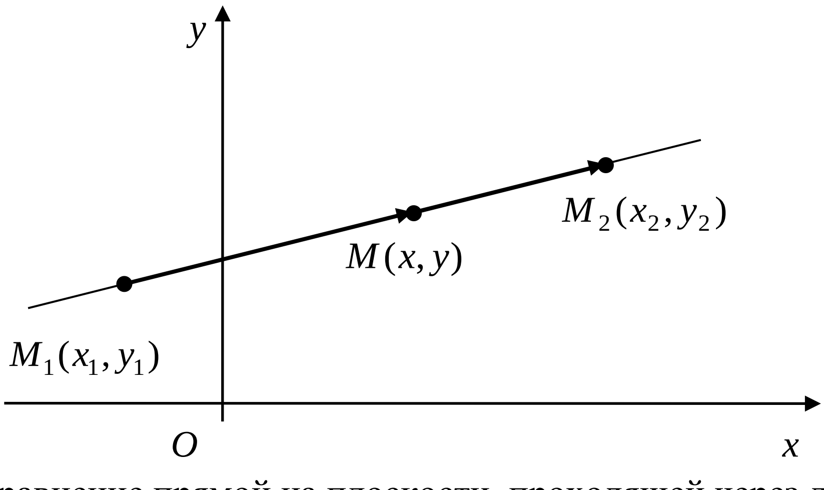


Рис. 3.3 Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две данные точки

Заметим, что данное уравнение можно рассматривать также и как каноническое уравнение прямой с начальной точкой $M_1(x_1, y_1)$ и направляющим вектором прямой $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$.

5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть дана начальная точка прямой $M_0(x_0, y_0)$ и ее направляющий вектор $\vec{s} = \{m, n\}$. Запишем параметрические уравнения прямой (3.1.4) в виде

$$\begin{cases} x - x_0 = mt, \\ y - y_0 = nt. \end{cases}$$

Если $m \neq 0$, то разделив почленно второе уравнение на первое, получим

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{n}{m}.$$

Но $\frac{n}{m} = tg\varphi$, где φ – угол, образованный прямой с положительным направлением оси абсцисс (рис. 3.4).

Число $k = tg\varphi$ называется *угловым коэффициентом прямой.*

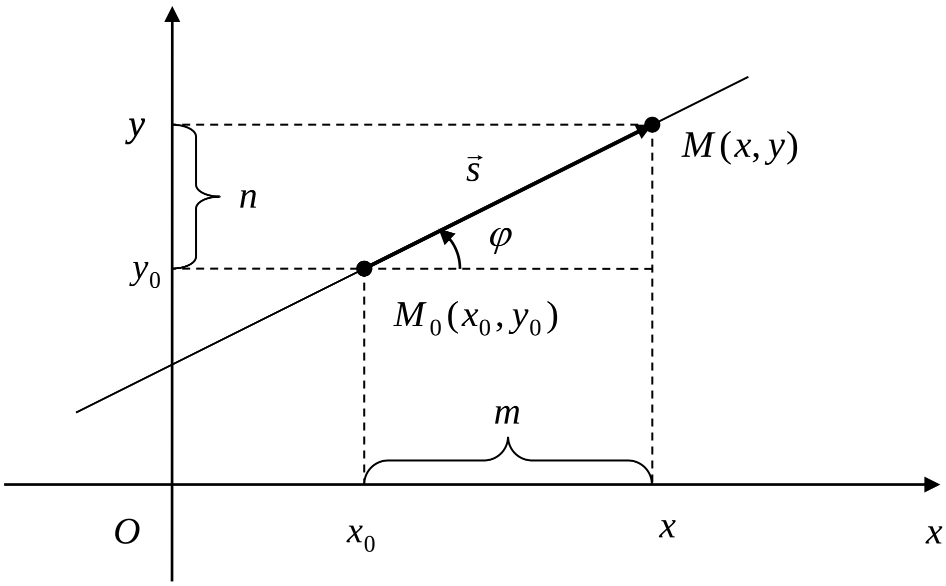


Рис. 3.4 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Заменив $\frac{n}{m} = k$, из последнего уравнения получим уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (3.1.7)$$

которое называется *уравнением прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом* или *уравнением пучка прямых с угловым коэффициентом.*

В последнем случае считается, что угловой коэффициент k принимает все возможные значения $-\infty < k < +\infty$, при этом все прямые пучка проходят через одну и ту же точку $M_0(x_0, y_0)$, называемую *центром пучка*.

Из уравнения (3.1.7) получаем $y = kx + y_0 - kx_0$. Положим $y_0 - kx_0 = b$, тогда $y = kx + b$.

Если $x = 0$, то $y = b$, где b – *величина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат.*

Уравнение прямой

$$y = kx + b, \qquad (3.1.8)$$

где k – угловой коэффициент прямой, а b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат, называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

Если же в параметрических уравнениях прямой (3.1.4)

$$\begin{cases} x - x_0 = mt, \\ y - y_0 = nt. \end{cases}$$

$m = 0$, то направляющий вектор прямой $\vec{s} = \{0, n\}$ и прямая параллельна оси ординат, а ее уравнение, как это следует из первого уравнения (3.1.4), принимает вид $x - x_0 = 0$ или $x = x_0$.

6. Уравнение прямой в отрезках на осях

Пусть прямая не параллельна ни одной из координатных осей и не проходит через начало координат. Это значит, что в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ ни один из коэффициентов A, B, C не равен нулю. Прямая пересекает оси координат в точках $(a,0), (0,b)$ (рис. 3.5).

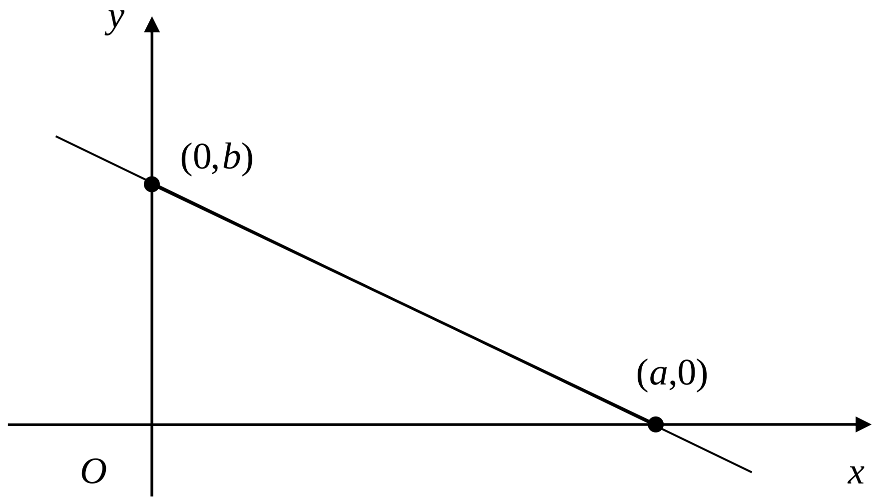


Рис. 3.5 Уравнение прямой в отрезках на осях

Выразим коэффициенты в уравнении прямой через величины отрезков на осях a и b. Подставим в общее уравнение прямой координаты точек $(a,0), (0,b)$ и получим

$$A \cdot a + B \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow A = -\frac{C}{a};$$

$$A \cdot 0 + B \cdot b + C = 0 \Rightarrow B = -\frac{C}{b}.$$

Подставляя в общее уравнение прямой вместо *A* и *B* их значения, имеем

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0.$$

После переноса свободного члена *C* в правую часть уравнения и деления на $(-C)$ получаем *уравнение прямой в отрезках на осях*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (3.1.9)$$

<u>Угол между двумя прямыми на плоскости</u>

1) Пусть заданы две прямые *общими уравнениями*

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

где $\overrightarrow{N_1} = \{A_1, B_1\}, \overrightarrow{N_2} = \{A_2, B_2\}$ – нормальные векторы прямых. Очевидно, угол φ между прямыми будет равен углу между их нормальными векторами, поэтому

$$\cos\varphi = \cos(\overrightarrow{N_1} \,\hat{,}\, \overrightarrow{N_2}) = \frac{(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2})}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности прямых совпадает с условием перпедикулярности нормальных векторов этих прямых:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0,$$

а *условием параллельности прямых* является условие параллельности их нормальных векторов, что выражается пропорциональностью их соответствующих координат:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

2) Пусть две прямые заданы теперь *параметрическими или каноническими уравнениями* с направляющими векторами $\overrightarrow{s_1} = \{m_1, n_1\}$ и $\overrightarrow{s_2} = \{m_2, n_2\}$.

Очевидно, угол φ между прямыми будет равен углу между их направляющими векторами, поэтому

$$\cos\varphi = \cos(\overrightarrow{s_1} \,\hat{,}\, \overrightarrow{s_2}) = \frac{(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2})}{\left|\overrightarrow{s_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{s_2}\right|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности прямых совпадает с условием перпедикулярности направляющих векторов этих прямых

$$m_1m_2 + n_1n_2 = 0,$$

а *условием параллельности прямых* является условие параллельности их направляющих векторов, что выражается пропорциональностью их соответствующих координат:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

3) Пусть теперь прямые заданы *уравнениями с угловыми коэффициентами*:

$$y = k_1 x + b_1 \text{ и } y = k_2 x + b_2,$$

где $k_1 = tg\varphi_1,\ k_2 = tg\varphi_2$ (рис.3.6). Требуется вычислить $tg\varphi$, где $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

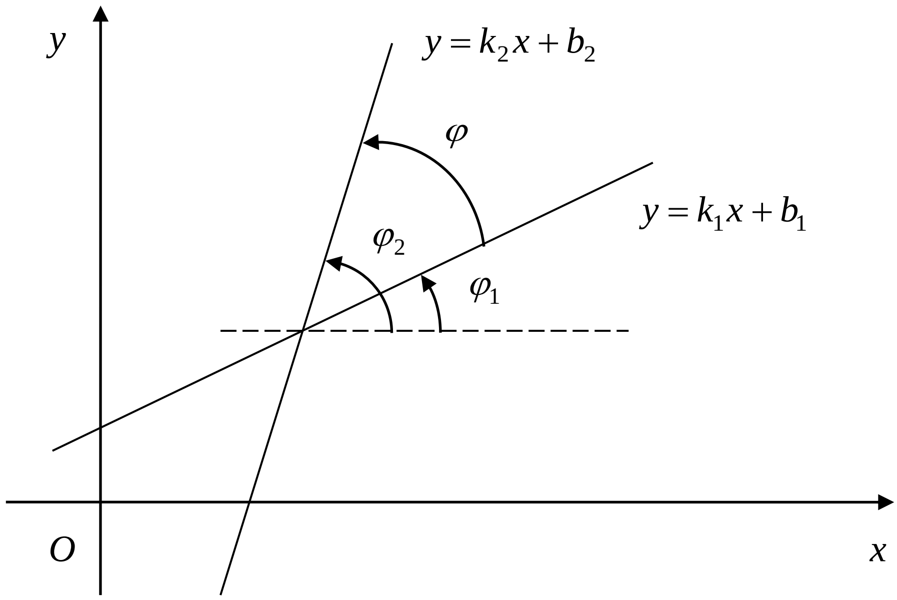


Рис. 3.6 Угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами

По формуле из тригонометрии имеем

$$tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Итак,

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Если прямые параллельны, то $tg\varphi = 0,\ k_2 - k_1 = 0$, и *условие параллельности прямых* выражается равенством их угловых коэффициентов:

$$k_1 = k_2.$$

Если прямые взаимно перпендикулярны, то $ctg\varphi = (1/tg\varphi) = 0;\ 1 + k_1 k_2 = 0$, и *условие перпендикулярности прямых* можно представить в виде:

$$k_1 k_2 = -1 \text{ или } k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Морозова, А.В. Высшая математика : учебное пособие в 4 ч. Ч. 1. Алгебра и аналитическая геометрия / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2016. – 102 с. Библиогр.: 7 назв. (стр.100).

Практическое занятие №7. Линии второго порядка на плоскости. (2ч.)

Кривой второго порядка называется плоская линия, определяемая уравнением второй степени относительно текущих декартовых координат (x, y). В общем случае это уравнение имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (16)$$

где коэффициенты A, B, C, D, E, F — действительные числа, и, по крайней мере, одно из чисел A, B, C отлично от нуля, т. е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

<u>Теорема 12</u> (преобразование общего уравнения кривой второго порядка поворотом декартовой системы координат). Поворотом декартовой системы координат Oxy общее уравнение кривой второго порядка всегда можно преобразовать так, что относительно новой системы координат в уравнении будет отсутствовать член с произведением xy.

Таким образом, в соответствующей системе координат каждая кривая второго порядка определяется уравнением вида

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (17)$$

при этом $A^2 + C^2 \neq 0$.

<u>Теорема 13</u>. Если в уравнении (17):

1) $A \cdot C > 0$, то уравнение эллиптического типа. Оно определяет или эллипс, или точку, или мнимое место точек.

2) $A \cdot C < 0$ — уравнение гиперболического типа. Определяет или гиперболу, или пару пересекающихся прямых.

3) $A \cdot C = 0$ — уравнение параболического типа. Определяет или параболу, или пару параллельных прямых.

К каноническому виду уравнение (17) можно преобразовать с помощью параллельного переноса декартовой системы координат.

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до двух данных точек плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обычно обозначают $2a$).

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (18)$$

где $b^2 = a^2 - c^2$, $2c$ — расстояние между фокусами F_1 и F_2.

Вид эллипса, определяемого уравнением (18) изображен на рис. 1.

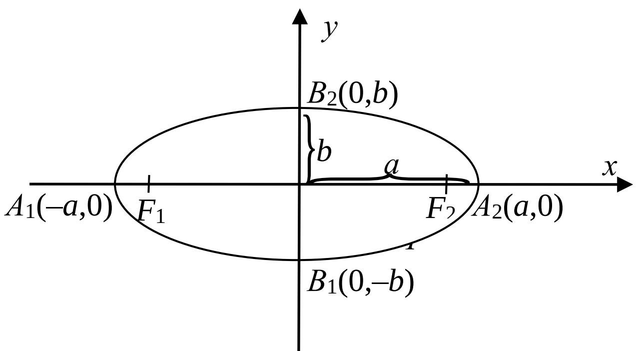


Рис. 1

Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ — вершины эллипса;

$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — фокусы эллипса;

a — полуось по оси Ox;

b — полуось по оси Oy;

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — половина фокусного расстояния.

Центр эллипса находится в начале координат O (0, 0). Если центр эллипса расположен в точке O_1 (x_0, y_0), а оси симметрии параллельны осям координат, то уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (19)$$

Окружность есть частный случай эллипса, когда полуоси эллипса a и b равны и равны радиусу окружности r.

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности ее расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$.

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (20)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$, $2c$ — расстояние между фокусами F_1 и F_2.

График гиперболы, определяемой уравнением (20):

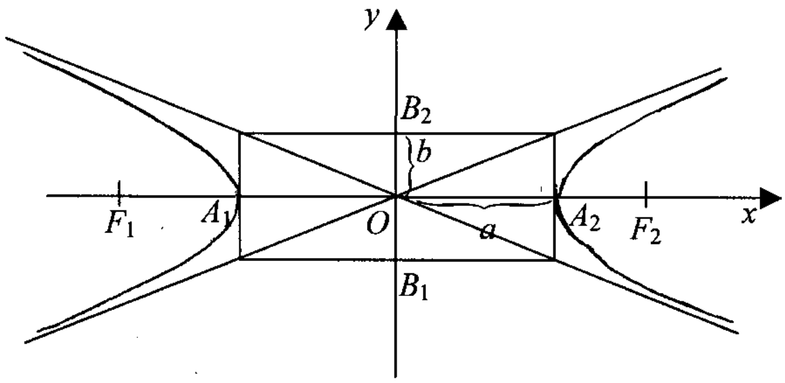


Рис. 2

Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ — действительные вершины гиперболы;

$B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ — мнимые вершины гиперболы;

$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — фокусы;

a — действительная полуось; b — мнимая полуось;

c — половина фокусного расстояния.

Центр гиперболы — точка пересечения ее осей симметрии — находится в начале координат O (0, 0).

Если центр гиперболы расположен в точке O_1 (x_0, y_0), а оси симметрии параллельны осям координат, то уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (21)$$

Гипербола, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1, \qquad (22)$$

называется *сопряженной* к гиперболе (20). Ее действительные вершины расположены на оси Oy в точках $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$, фокусы $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ также лежат на оси Oy.

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки плоскости, называемой *фокусом*, и от данной прямой, называемой *директрисой*.

Каноническое уравнение

$$y^2 = 2px \qquad (23)$$

определяет параболу с осью симметрии, совпадающей с осью Ox, вершиной в начале координат и ветвями, направленными в положительном направлении оси Ox, ее схематический вид приведен на рис. 3. Параметр $p>0$ равен расстоянию от фокуса до директрисы.

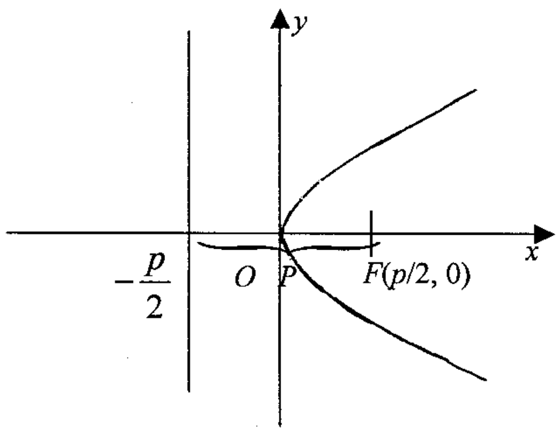


Рис. 3

Уравнение $y^2= -2px$ определяет параболу, симметричную относительно оси Ox; ветви параболы повернуты влево.

Уравнение $x^2= 2py$ определяет параболу, симметричную относительно оси Oy, с вершиной в начале координат и ветвями, направленными вверх. Уравнение $x^2= 2py$ задает параболу, ветви которой направлены вниз.

Парабола со смещенной вершиной, расположенной в точке O_1 (x_0, y_0), и осью симметрии, параллельной оси Ox или Oy, задается одним из уравнений

$$(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0)$$

$$(x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0).$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание. Кривая второго порядка задана общим уравнением. Определить тип кривой, найти ее каноническое уравнение и каноническую систему координат. Построить кривую и обе системы координат.

№ вар-та	Уравнение кривой	№ вар-та	Уравнение кривой
1	а) $x^2+4y^2-2x-16y+13=0$ б) $4x^2-y^2-8x=0$	16	а) $y^2-2x+4y+10=0$ б) $x^2-4y^2+4x-8y-4=0$
2	а) $16x^2-9y^2-96x+18y-9=0$ б) $y^2-6x+2y+13=0$	17	а) $16x^2+9y^2-96x-18y+9=0$ б) $9x^2-y^2-18=0$
3	а) $9x^2+y^2-18x=0$ б) $x^2-4y^2-2x+16y-19=0$	18	а) $9x^2+4y^2-18x-27=0$ б) $y^2-x-4y+1=0$
4	а) $4x^2+y^2-4y=0$ б) $y^2+0,5x-6y+8,5=0$	19	а) $x^2-25y^2+100y-125=0$ б) $y^2-0,5x+6y+10=0$
5	а) $x^2-9y^2-2x+36y+44=0$ б) $x^2-2x+4y+9=0$	20	а) $x^2+9y^2-2x-36y+28=0$ б) $9x^2-y^2+18x+4y-4=0$
6	а) $x^2-4y^2-8y=0$ б) $25x^2+y^2+100x+2y+76=0$	21	а) $y^2-3x+4y+13=0$ б) $4x^2+16y^2-8x-60=0$
7	а) $4x^2-y^2+4y-8=0$ б) $x^2-4x+6y+10=0$	22	а) $y^2-x-4y+2=0$ б) $9x^2+4y^2-18x-27=0$
8	а) $16x^2+4y^2-32x-16y-32=0$ б) $x^2-4y+y+7=0$	23	а) $4x^2-9y^2-8x+36y-68=0$ б) $x^2+16y^2-8x-15=0$
9	а) $x^2-y^2+6x+5=0$ б) $25x^2+4y^2-16y-84=0$	24	а) $y^2-4x-6y+5=0$ б) $4x^2-16y^2-8x-60=0$
10	а) $4x^2-y^2-24x+2y+31=0$ б) $x^2-6x+2y+13=0$	25	а) $x^2+4y^2-4x-16y+16=0$ б) $4x^2-y^2-8x+4y-16=0$
11	а) $x^2+4y^2+8y=0$ б) $x^2+4x+8y-12=0$	26	а) $x^2-4x+0,5y+5,5=0$ б) $x^2+9y^2+4x-18y+4=0$
12	а) $x^2-16y^2-2x-15=0$ б) $x^2+6x+y+7=0$	27	а) $16x^2+y^2-32x-4y+4=0$ б) $0,25x^2+25y^2+x+50y-30,25=0$
13	а) $25x^2+9y^2-100x-36y-89=0$ б) $9x^2-16y^2-18x-135=0$	28	а) $x^2+4x+y+2=0$ б) $x^2+25y^2-100y+75=0$
14	а) $25x^2-4y^2+16y-166=0$ б) $y^2-10x+4y+14=0$	29	а) $16x^2-y^2-32x+4y-4=0$ б) $x^2+6x+4y+1=0$
15	а) $0,25x^2+25y^2+x-50y+19,75=0$ б) $y^2-12x+2y+25=0$	30	а) $9x^2+y^2+18x-4y+4=0$ б) $x^2-2y+10=0$

Практическое занятие №8. Прямая и плоскость в пространстве. (2ч.)

Плоскость в пространстве

1. Общее уравнение плоскости

Пусть задана декартова прямоугольная система координат в пространстве и линейное уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3.3.1)$$

в этой системе, причем $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, т.е. хотя бы одно из действительных чисел A, B и C не равно нулю.

Покажем, что уравнение (3.3.1) есть уравнение плоскости.

Выберем точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, координаты которой удовлетворяют этому уравнению:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Вычтем из уравнения (3.3.1) почленно полученное равенство:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (3.3.2)$$

Левую часть этого уравнения можно рассматривать как скалярное произведение некоторого вектора $\overrightarrow{N} = \{A, B, C\}$ на вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, где координаты произвольной точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению (3.3.1). Тогда уравнение (3.3.2) можно представить в форме

$$(\overrightarrow{N}, \overrightarrow{M_0M}) = 0.$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{N}$ и, значит, все точки $M(x, y, z)$ лежат на плоскости, проходящей через точку M_0 (рис. 3.7) перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{N}$.

Обратно, для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на указанной плоскости, вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{N}$.

Следовательно, уравнение (3.3.1) есть уравнение плоскости.

Определение. Уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

называется *общим уравнением плоскости*.

Вектор $\vec{N} = \{A, B, C\}$, перпендикулярный к плоскости (3.3.1), называется *нормальным вектором* этой плоскости.

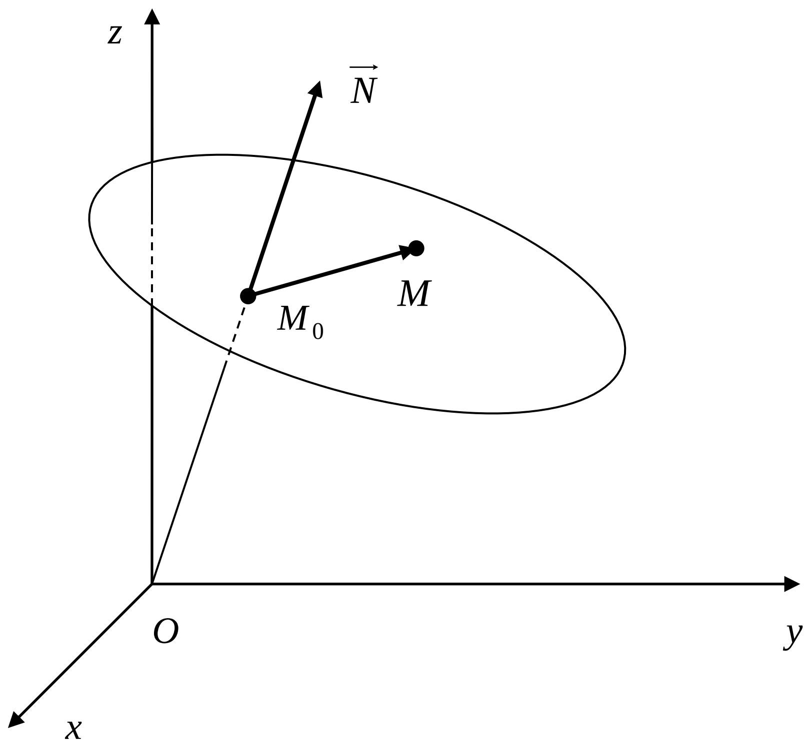


Рис. 3.7 Общее уравнение плоскости

Отметим *частные случаи положения плоскости относительно системы координат*:

1) если в уравнении (3.3.1) свободный член $D = 0$, т.е.

$$Ax + By + Cz = 0,$$

то плоскость проходит через начало координат, так как координаты точки $O(0;0;0)$ удовлетворяют уравнению;

2) если две из координат нормального вектора $\vec{N} = \{A, B, C\}$ равны нулю, то плоскость параллельна одной из координатных плоскостей. Например, для $\vec{N} = \{A, 0, 0\}$ плоскость $Ax + D = 0$ параллельна координатной плоскости yOz.

3) Если одна из координат нормального вектора равна нулю, то плоскость параллельна одной из координатных осей. Например, для $\vec{N} = \{A, B, 0\}$ плоскость $Ax + By + D = 0$ параллельна оси аппликат.

Заметим, что уравнение (3.3.1) можно умножить на любое число, не равное нулю, и полученное уравнение будет уравнением той же самой плоскости.

2. Уравнение плоскости в отрезках на осях

Пусть плоскость не параллельна ни одной из координатных осей и не проходит через начало координат. Это значит, что в общем уравнении плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ ни один из коэффициентов $A,\ B,\ C,\ D$ не равен нулю. Плоскость пересекает оси координат в точках $(a,0,0), (0,b,0), (0,0,c)$ (рис. 3.8).

Выразим коэффициенты в уравнении плоскости через величины отрезков на осях a, b, c. Подставим в общее уравнение плоскости координаты точек $(a,0,0), (0,b,0), (0,0,c)$ и получим

$$A\cdot a + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D = 0 \Rightarrow A = -\frac{D}{a};$$
$$A\cdot 0 + B\cdot b + C\cdot 0 + D = 0 \Rightarrow B = -\frac{D}{b};$$
$$A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot c + D = 0 \Rightarrow C = -\frac{D}{c}.$$

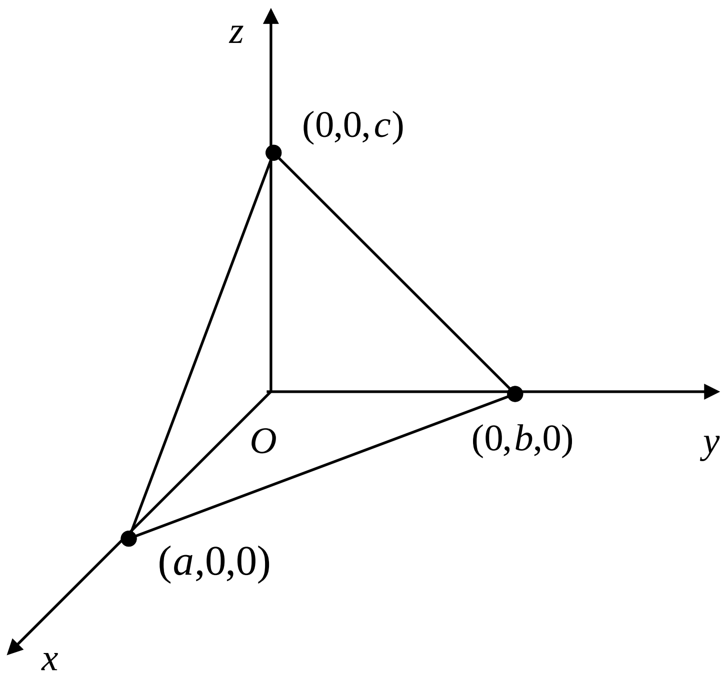


Рис. 3.8 Уравнение плоскости в отрезках на осях

Подставляя в общее уравнение плоскости вместо A, B, C их значения, имеем

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0.$$

После переноса свободного члена D в правую часть уравнения и деления на $-D$ получаем *уравнение плоскости в отрезках на осях*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (3.3.3)$$

3. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Даны три точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой (рис. 3.9). Требуется найти уравнение плоскости, проходящей через эти точки.

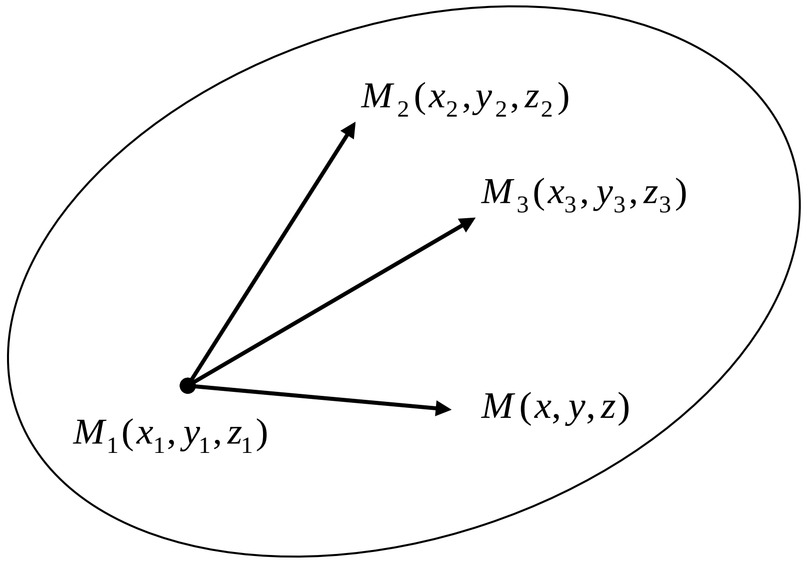


Рис.3.9 Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Чтобы точка M лежала в плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ были *компланарны*.

Условие компланарности векторов выражается равенством нулю их смешанного произведения

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0.$$

Если выразить векторы в координатной форме:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\},$$

то смешанное произведение можно записать в виде определителя, и *уравнение плоскости, проходящей через три данные точки*, примет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.3.4)$$

Чтобы привести уравнение (3.3.3) к общему виду, достаточно вычислить коэффициенты *A, B, C, D*, разлагая определитель по элементам первой строки.

Заметим, что если бы точки M_1, M_2, M_3 лежали на одной прямой, то вторая и третья строки в определителе уравнения (3.3.4) были бы пропорциональны и все коэффициенты уравнения плоскости были бы нулями.

Угол между двумя плоскостями

Углом между двумя плоскостями называется угол между векторами, нормальными к этим плоскостям (рис. 3.10).

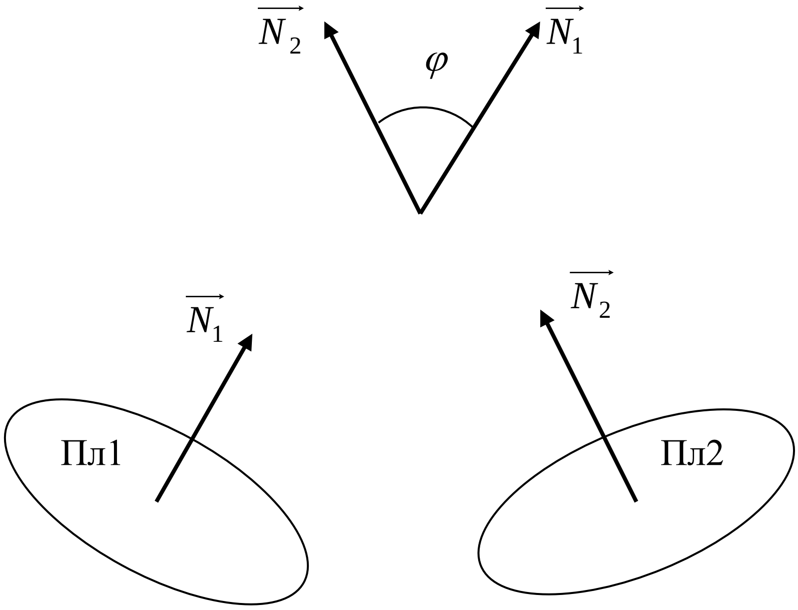


Рис.3.10 Угол между плоскостями

Пусть плоскости Пл1 и Пл2 заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 .$$

Нормальные векторы к этим плоскостям соответственно равны

$$\overrightarrow{N_1} = \{A_1, B_1, C_1\} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{N_2} = \{A_2, B_2, C_2\}.$$

Тогда

$$\cos\varphi = \cos(\overrightarrow{N_1} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{N_2}) = \frac{(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2})}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} .$$

Условие перпендикулярности плоскостей совпадает с условием перпедикулярности нормальных векторов этих плоскостей:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 ,$$

а *условием параллельности плоскостей* является условие параллельности их нормальных векторов, что выражается пропорциональностью их соответствующих координат:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} .$$

Прямая в пространстве

1. Параметрические уравнения прямой

Положение прямой в пространстве можно определить следующими данными:

1) точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую проходит прямая, называемой *начальной точкой*;

2) вектором $\vec{s} = \{m, n, p\}$, параллельным прямой, называемым *направляющим вектором прямой*.

Составим сначала уравнение прямой в векторной форме.

Пусть даны *начальный вектор* $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ и направляющий вектор прямой $\vec{s}$ (рис. 3.11).

Пусть $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ – радиус-вектор произвольной точки $M(x, y, z)$ прямой. Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}.$$

Так как $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$, то существует такое число t, что $M_0M = t\vec{s}$.

Полагая $\overrightarrow{OM} = \vec{r}, \overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0, \overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$, получаем *уравнение прямой в параметрической векторной форме*:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s} \qquad (3.5.1)$$

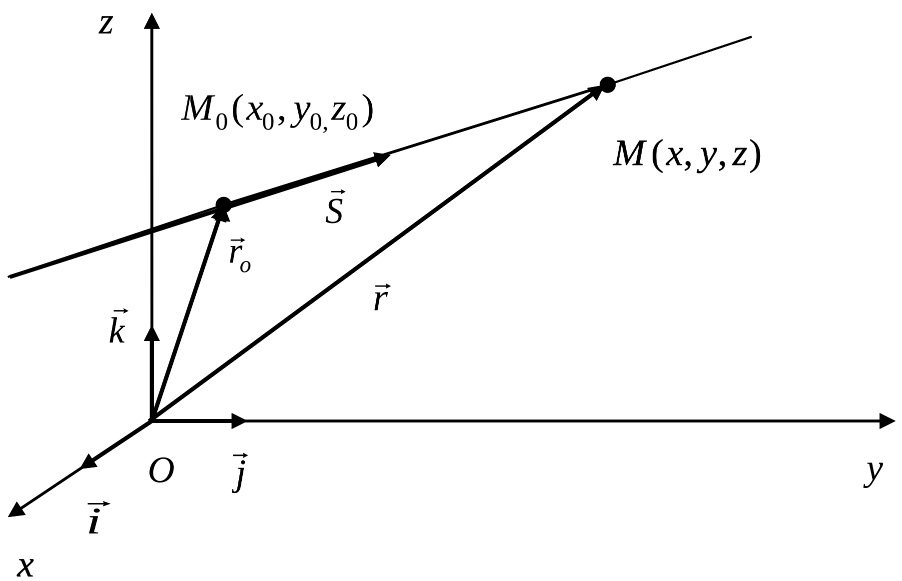


Рис. 3.11 Уравнение прямой в пространстве в векторной форме

Когда параметр t пробегает все вещественные значения $-\infty < t < +\infty$, конец вектора $\vec{r}$ пробегает все точки прямой.

Выразим векторы $\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{s}$ в координатной форме:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},\ \vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k},\ \vec{s} = \{m, n, p\} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$$

и подставим в уравнение (3.5.1):

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + t(m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k})$$

или

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_0 + mt)\vec{i} + (y_0 + nt)\vec{j} + (z_0 + pt)\vec{k}.$$

Приравнивая координаты при ортах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, получим *параметрические уравнения прямой* в пространстве

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad \text{где } -\infty < t < +\infty. \tag{3.5.2}$$

Определение. Координаты m, n, p направляющего вектора прямой $\vec{s} = \{m, n, p\}$ называются направляющими коэффициентами прямой.

Пример.

Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;3;-1)$ параллельно вектору $\vec{s} = \{-5;4;7\}$.

Решение.

Координаты начальной точки $x_0 = 2, y_0 = 3, z_0 = -1$, направляющие коэффициенты искомой прямой $m = -5, n = 4, p = 7$. Параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = 2 - 5t, \\ y = 3 + 4t, \\ z = -1 + 7t. \end{cases}$$

2. Канонические уравнения прямой

Преобразуем параметрические уравнения прямой (3.5.2) к виду

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{m} = t, \\ \dfrac{y - y_0}{n} = t, \\ \dfrac{z - z_0}{p} = t, \end{cases}$$

откуда следуют *канонические уравнения прямой*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \tag{3.5.3}$$

проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{s} = \{m, n, p\}$.

Заметим, что уравнение (3.5.3) может быть получено и из условия коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0 M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ и $\vec{s} = \{m, n, p\}$, согласно которому соответствующие координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ требуется провести прямую. Возьмем на этой прямой произвольную точку $M(x, y, z)$ и рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$ и $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ (рис. 3.12). Эти векторы коллинеарны (лежат на одной прямой), поэтому их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (3.5.4)$$

Полученное уравнение называется *уравнением прямой в пространстве, проходящей через две данные точки.*

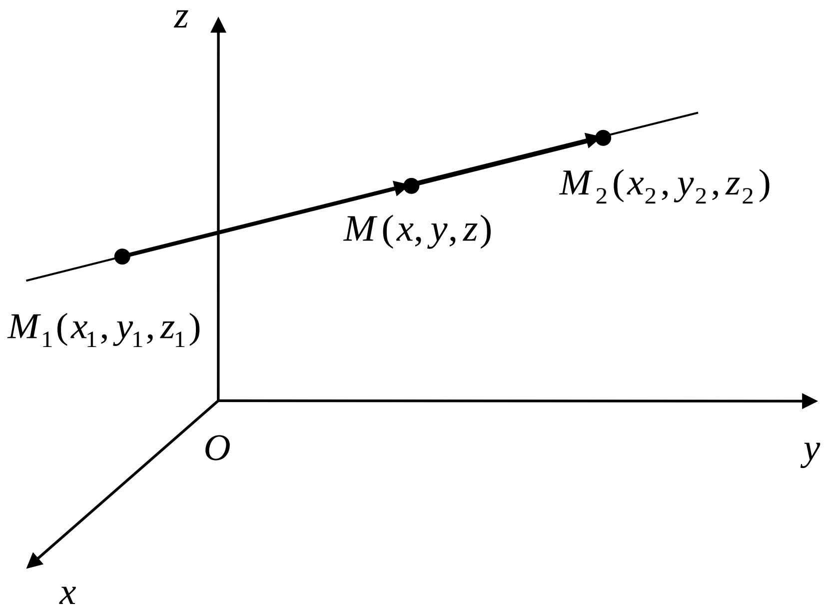


Рис. 3.12 Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две данные точки

Заметим, что данные уравнения можно рассматривать также и как канонические уравнения прямой с начальной точкой $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и направляющим вектором прямой $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

<u>*Угол между двумя прямыми в пространстве*</u>

Пусть две прямые заданы в пространстве *параметрическими или каноническими уравнениями* с направляющими векторами $\overrightarrow{s_1} = \{m_1, n_1, p_1\}$ и $\overrightarrow{s_2} = \{m_2, n_2, p_2\}$.

Очевидно, угол φ между прямыми будет равен углу между их направляющими векторами, поэтому

$$\cos\varphi = \cos(\overrightarrow{s_1} \,\hat{}\, \overrightarrow{s_2}) = \frac{(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2})}{|\overrightarrow{s_1}| \cdot |\overrightarrow{s_2}|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности прямых совпадает с условием перпедикулярности направляющих векторов этих прямых

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0,$$

а *условием параллельности прямых* является условие параллельности их направляющих векторов, что выражается пропорциональностью их соответствующих координат:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

<u>*Угол между прямой в пространстве и плоскостью*</u>

Если через данную прямую провести плоскость, перпендикулярную к данной плоскости, то пересечение плоскостей даст прямую, которая называется проекцией данной прямой на данную плоскость (рис. 3.13). Угол φ между прямой и ее проекцией на данную плоскость называется *углом между прямой и плоскостью.* Всегда можно считать $0 \le \varphi \le \pi/2$.

Если $\overrightarrow{N}$ – нормальный вектор плоскости, а $\vec{s}$ – направляющий вектор прямой (рис. 3.13), то

$$\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \left|\cos(\vec{s} \,\hat{,}\, \overrightarrow{N})\right| \ge 0.$$

Модуль взят потому, что угол между векторами $\overrightarrow{N}$ и $\vec{s}$ может оказаться тупым.

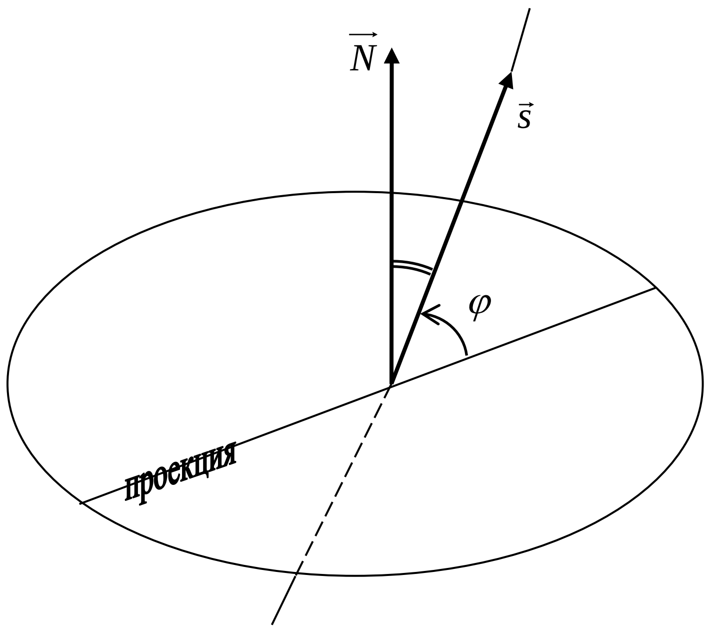


Рис. 3.13 Угол между прямой и плоскостью

Пусть заданы общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \overrightarrow{N} = \{A, B, C\}$$

и канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad \vec{s} = \{m, n, p\}.$$

Тогда

$$\sin\varphi = \left|\cos(\vec{s}\,\hat{,}\,\vec{N})\right| = \frac{\left|(\vec{N},\vec{s})\right|}{\left|\vec{N}\right|\cdot\left|\vec{s}\right|}$$

или
$$\sin\varphi = \frac{\left|Am + Bn + Cp\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Если плоскость и прямая параллельны, то $\sin\varphi = 0$, и условие параллельности прямой и плоскости выражается равенством

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Если $\vec{N} \parallel \vec{s}$, то прямая перпендикулярна к плоскости, и условия перпендикулярности прямой и плоскости выражаются равенствами

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Морозова, А.В. Высшая математика : учебное пособие в 4 ч. Ч. 1. Алгебра и аналитическая геометрия / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2016. – 102 с. Библиогр.: 7 назв. (стр.100).

Краткую теорию и индивидуальные задания для проведения занятий можно найти в учебном пособии: Морозова, А.В. Высшая математика : учебное пособие в 4 ч. Ч. 1. Алгебра и аналитическая геометрия / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2016. – 102 с. Библиогр.: 7 назв.

Самостоятельное изучение учебного материала. (85ч)

1. Морозова, А.В. Высшая математика: учебное пособие в 4 ч. Ч. 1. Алгебра и аналитическая геометрия / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2016. – 108 с. Библиогр.: 7 назв.
2. Идельсон, А. В. Математика для экономистов [Текст] : учеб. пособие для вузов; в 6 т. Т. 1. Аналитическая геометрия. Линейная алгебра / А.В. Идельсон, И.А. Блюмкина; Ред. Л.П. Гаштольд, Ред. В.Г. Дмитриев, Ред. А.Ф. Тарасюк. - М. : ИНФРА-М, 2000. - 199 с. : ил. - ISBN 5-16-000175-1
3. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст] : полный курс / Д.Т. Письменный. - 13-е изд. - М. : Айрис-пресс, 2015. - 603 с. : ил., прил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6043-0
4. Владимирский, Б. М. Математика. Общий курс [Текст] : учебник / Б. М. Владимирский, А. Б. Горстко, Я. М. Ерусалимский. - 4-е изд., стер. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2008. - 957 с. : ил., табл. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Предм. указ. - ISBN 978-5-8114-0445-2

СЕМЕСТР 2

Практическое занятие №1. Множества и функции. Предел функции в точке. (2ч.)

<u>*Элементы теории множеств*</u>

Множество – это совокупность, собрание каких-либо объектов произвольной природы. Множество задается правилом или признаком, согласно которому определяется, принадлежит ли данный объект множеству или не принадлежит. Объекты, составляющие множество, называются его *элементами.*

Множества обычно обозначают большими латинскими буквами, а их элементы – соответствующими малыми буквами.

Запись $a \in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A.

Запись $a \notin A$ или $a \overline{\in} A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Множество можно задать перечислением его элементов, записанных в фигурных скобках.

Пример. Множество

$$D = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;0\}$$

есть множество, состоящее из цифр десятичной системы счисления. Очевидно, $4 \in D$, а $0{,}25 \notin D$.

Множество можно задать и с помощью указания свойств его элементов.

Пример. Множество

$$C = \{x \in D : x < 3\} = \{0;1;2\}$$

есть множество, составленное из трех элементов множества D (см. предыдущий пример), величина каждого из которых меньше трех.

Определение. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается символом Ø.

Определение. Множество, элементами которого являются числа, называется *числовым множеством.*

Для часто встречающихся числовых множеств используются следующие обозначения и термины:

1) Множество всех *натуральных* чисел

$$N := \{1;2;3;...;n;...\}.$$

2) Множество всех *целых* чисел

$$Z := \{...;-n;...;-2;-1;0;1;2;...;n;...\}.$$

3) Множество всех *действительных (вещественных)* чисел R.

4) Множество всех *комплексных* чисел C.

5) *Отрезок (сегмент)*

$$[a,b]=\{x\in R: a\le x\le b\}.$$

6) *Интервал*

$$(a,b)=\,]a,b[\,=\{x\in R: a<x<b\}.$$

7) *Полуинтервалы (полусегменты)*

$$[a,b)=[a,b[\,=\{x\in R: a\le x<b\}.$$

$$(a,b]=\,]a,b]=\{x\in R: a<x\le b\}.$$

8) *Полупрямые*

$$(-\infty,a)=\,]-\infty,a[\,=\{x\in R: -\infty<x<a\},$$

$$(-\infty,a]=\,]-\infty,a]=\{x\in R: -\infty<x\le a\},$$

$$(a,+\infty)=\,]a,+\infty[\,=\{x\in R: a<x<+\infty\},$$

$$[a,+\infty)=[a,+\infty[\,=\{x\in R: a\le x<+\infty\}.$$

9) *Промежутком* будем называть отрезок, интервал, полуинтервал, полупрямую и числовую прямую.

Операции над множествами

Рассмотрим некоторые *операции над множествами.*

Определение. Множество *A*, все элементы которого принадлежат множеству *B*, называется *подмножеством* множества *B*:

$$A\subset B \text{ или } B\supset A.$$

Определение. Множества *A* и *B* называются *равными множествами,* если $A\subset B$ и $B\supset A$:

$$A=B\Leftrightarrow A\subset B\wedge B\supset A.$$

Определение. *Объединением* множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств *A, B* (рис. 1.1):

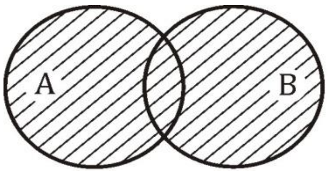
$$A\cup B=\{x: x\in A\vee x\in B\}.$$

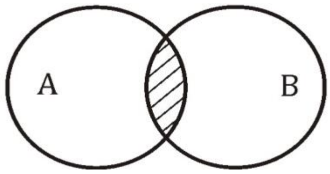
Определение. *Пересечением* множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат и множеству *A*, и множеству *B* (рис. 1.2):

$$A\cap B=\{x: x\in A\wedge x\in B\}.$$

Определение. *Разностью* множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из всех тех элементов множества *A*, которые не принадлежат множеству *B* (рис. 1.3):

$$A\setminus B=\{x: x\in A\wedge x\notin B\}.$$





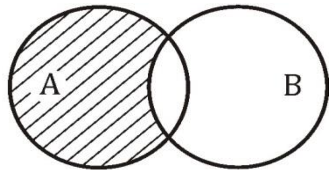


Рис. 1.1. $A \cup B$ Рис. 1.2. $A \cap B$ Рис. 1.3. $A \setminus B$

Примеры

1) $N \subset Z \subset R$. 2) $(0;3) \supset (1;2)$. 3) $(0;3) \cup (1;2) = (0;3)$.
4) $(1;3) \cup (2;4) = (1;4)$. 5) $(1;3) \cap (2;4) = (2;3)$. 6) $(1;2) \cap (3;4) = \varnothing$.
7) $(1;3) \setminus (2;4) = (1;2)$. 8) $(2;4) \setminus \{3\} = (2;3) \cup (3;4)$.

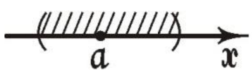
Введем понятия *окрестностей точки.*

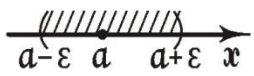
Определение. *Окрестностью* $U(a)$ точки a называется произвольный интервал, содержащий точку a (рис. 1.4).

Определение. *Е-окрестностью* $U(a,\varepsilon)$ точки a называется интервал $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, а число $\varepsilon > 0$ называется *радиусом окрестности* (рис. 1.5).

Определение. *Проколотой* *ε-окрестностью* $\dot{U}(a,\varepsilon)$ точки a называется ε-окрестность $U(a,\varepsilon)$ точки a, из которой удалена точка a (рис. 1.6):

$$\dot{U}(a,\varepsilon) = U(a,\varepsilon) \setminus \{a\} = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon).$$





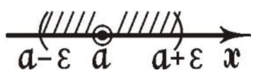


Рис. 1.4. $U(a)$ Рис. 1.5. $U(a,\varepsilon)$ Рис. 1.6. $\dot{U}(a,\varepsilon)$

Примеры

1) $U(5) = (-2;8)$. 2) $U(5;0{,}1) = (4{,}9;5{,}1)$. 3) $\dot{U}(5;0{,}1) = (4{,}9;5{,}0) \cup (5{,}0;5{,}1)$.

Понятие функции

Определение. Переменная y называется *функцией* переменной x, если каждому значению переменной x из некоторой области ее изменения $X \subset R$ по некоторому правилу или закону f ставится в соответствие одно определенное значение переменной y из некоторой области ее изменения $Y \subset R$.

Обозначения: $y = f(x)$ или $y = y(x)$.

Используют следующие названия:

x – независимая переменная или аргумент;

y – зависимая переменная или функция;

X – область определения функции;

Y – область значений функции.

Говорят еще, что функция f *отображает* множество X *на* множество Y.

Способы задания функции

Задать функцию f – значит указать, как по каждому данному значению аргумента x находить соответствующее ему значение функции $f(x)$. Существуют пять основных способов задания функций: аналитический, табличный, графический, программный и словесный.

1) *Аналитический способ* – функция задается с помощью формул. При этом функция может быть задана явно, неявно и параметрически.

а) При *явном* задании функции зависимая переменная непосредственно выражается через независимую переменную.

Примеры

1) Формула $y = x^2$ задает функцию, область определения которой – числовая прямая: $X = (-\infty, +\infty)$, а область значений – полупрямая: $Y = [0, +\infty)$.

2) Формула $y = n!$ ставит в соответствие каждому натуральному числу n число $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Например, если $n = 3$, то $y = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Область определения функции – множество всех натуральных чисел N, а область значений – множество $\{1!, 2!, 3!, \ldots, n!, \ldots\}$.

Функция $y = n!$ называется *факториалом*, причем полагается $0! = 1$.

б) При *неявном* задании функции зависимая переменная не выражается непосредственно через независимую переменную.

Примеры

1) $\sin x + \cos y + e^{xy} + 5 = 0$. 2) $xe^y - ye^x = 1$.

в) При *параметрическом* задании функции и зависимая и независимая переменные являются, в свою очередь, некоторыми явно заданными функциями новой переменной, называемой параметром:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

где t – параметр, принимающий значения из некоторой области $T \subset R$.

Пример. Уравнения

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

задают параметрически уравнение окружности радиусом R на плоскости Oxy с центром в начале координат, так как

$$x^2 + y^2 = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2,$$

т.е. $x^2 + y^2 = R^2$.

2) *Табличный способ* – функция задается с помощью таблицы, в которой в определенном порядке выписываются значения аргумента и соответствующие им значения функции.

Пример

x	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1,0
y	5,4	7,4	8,1	8,6	7,3	6,6

3) *Графический способ* – функция задается с помощью графика в некоторой системе координат на плоскости (рис. 2.1).

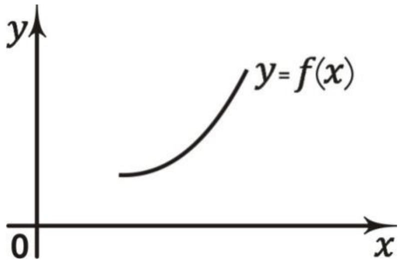


Рис. 2.1. Графическое задание функции $y = f(x)$

4) *Программный способ* – функция задается с помощью операторов некоторого языка программирования.

Пример. Функция

$$y = ABS\left(EXP\left(2 * x - 1\right) + \sin\left(3 * x + \pi / 4\right)\right)$$

при написании программы будет обеспечивать вычисление значений

$$y = \left| e^{2x-1} + \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \right|.$$

5) *Словесный способ* – функция задается словесным описанием.

Пример. Каждому действительному числу x ставится в соответствие наибольшее целое число, не превосходящее x. Эта функция называется *целой частью* x и обозначается $[x]$.

Основные характеристики функций

Монотонность, ограниченность, четность и периодичность функций

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* в области X, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, и *убывающей*, если выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей* в области X, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) \geq f(x_1)$, и *невозрастающей*, если выполняется неравенство $f(x_2) \leq f(x_1)$.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие функции объединяются общим названием – *монотонные функции.* Возрастающие и убывающие функции называются также *строго монотонными.*

Примеры

1) Функция $y = x^2$ монотонно убывает на промежутке $(-\infty, 0)$ и монотонно возрастает на промежутке $[0, +\infty)$ (рис. 2.5).

2) Функция $y = x^3$ монотонно возрастает на всей числовой оси, т.е. на промежутке $(-\infty, +\infty)$ (рис. 2.6).

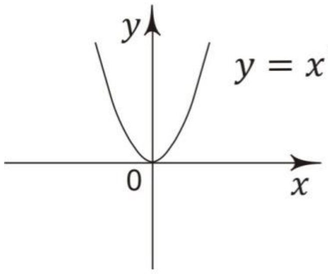


Рис. 2.5. График функции $y = x^2$

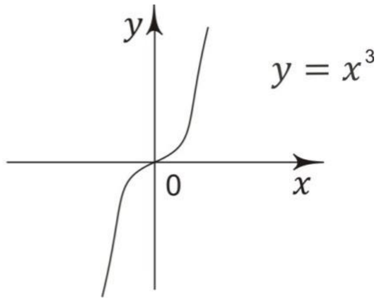


Рис. 2.6. График функции $y = x^3$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху (снизу)* в области X, если существует такое число M (m), что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$ $\quad (f(x) \geq m)$.

Функция $y = f(x)$, ограниченная и сверху и снизу в области X, называется *ограниченной* в этой области.

Условие ограниченности функции можно сформулировать и так: функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* в области X, если существует такое положительное число M, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.

С помощью логических символов условие ограниченности функции $y = f(x)$ можно записать в виде

$$(\exists M > 0)(\forall x \in X): |f(x)| \leq M,$$

а условие неограниченности – в виде

$$(\exists M > 0)(\exists x \in X): |f(x)| > M.$$

Примеры

1) Функция $y = \cos x$ ограничена на всей числовой прямой, так как $|\cos x| \leq 1$ при любом $x \in (-\infty, +\infty)$.

2) Функция $y = 1/x$ не является ограниченной сверху на интервале $(0,1)$, так как не существует числа M такого, что для любого $x \in (0,1)$ выполнялось бы неравенство $(1/x) \leq M$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *четной* в области X, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

Пример. Функция $y = x^2$ является четной на всей числовой оси, так как

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \text{ для } \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

График функции $y = x^2$ симметричен относительно оси Oy (см. рис. 2.5).

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *нечетной* в области X, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример.

Функция $y = x^3$ является нечетной на всей числовой оси, так как

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \text{ для } \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

График функции $y = x^3$ симметричен относительно начала координат (см. рис. 2.6).

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *периодической* в области X, если существует такое постоянное число $T > 0$, что для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$.

Минимальное из всевозможных чисел T называется *периодом* функции $y = f(x)$.

Пример. Из тригонометрии известно, что функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ являются периодическими функциями с периодом $T = 2\pi$, а функции $y = tgx$ и $y = ctgx$ – периодическими с периодом $T = \pi$ в области $X = (-\infty, +\infty)$.

Элементарные функции

Определение. *Основными элементарными функциями* называются следующие функции:

1) Постоянная (константа) $y = C$, где C – действительное число.
2) Степенная функция $y = x^\alpha$, где α – действительное число.
3) Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0; a \neq 1)$.
4) Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(a > 0; a \neq 1)$.
5) Тригонометрические функции: $y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$.
6) Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x, y = \arccos x$, $y = arctgx, y = arcctgx$.

Определение. *Элементарными функциями* называются функции, получаемые из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции.

Примеры

1) $y = \ln(1 + \cos^4 x)$. 2) $y = 3^{2x} + tg\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$. 3) $y = \dfrac{e^x - 2x}{x^2 + x + 6}$.

Рассмотрим некоторые важные частные случаи элементарных функций.

Определение. *Целой рациональной функцией* или *многочленом* называется функция вида

$$y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad x \in (-\infty, +\infty),$$

где n – натуральное число, называемое *степенью многочлена*; $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1,} a_n$ – действительные числа, называемые *коэффициентами многочлена*.

Постоянную функцию C можно рассматривать как многочлен нулевой степени $y = P_0(x) = a_0x^0 = a_0 = C$.

Многочлен первой степени $y = P_1(x) = a_0x + a_1$ называют *линейной функцией.*

Многочлен второй степени $y = P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ принято называть *квадратным трехчленом*.

Примеры многочленов:

1) $y = P_2(x) = 3x^2 - 7x + 1$. 2) $y = P_3(x) = x^3 - 5x^2 + 7$. 3) $y = P_{10}(x) = 4x^{10}$.

Определение. *Дробно-рациональной функцией* или *рациональной дробью* называется отношение двух многочленов

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}.$$

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе $(n < m)$; в противном случае $(n \geq m)$ рациональная дробь называется *неправильной.*

Дробно-рациональная функция $R(x)$ определена для всех значений x, за исключением тех, при которых знаменатель $Q_m(x)$ обращается в нуль.

Примеры рациональных дробей:

1) Правильная рациональная дробь

$$R(x) = \frac{5x^2 + x - 7}{8x^4 - 3x^2 + 2x}; \qquad (n = 2; m = 4; n < m).$$

2) Неправильная рациональная дробь

$$R(x) = \frac{x^3 + 5x - 1}{x + 2}; \qquad (n = 3; m = 1; n > m).$$

Целая рациональная функция является частным случаем дробно-рациональной функции, когда знаменатель последней – постоянная величина.

Совокупность целых рациональных и дробно-рациональных функций образует класс *рациональных функций*.

Определение. *Иррациональной функцией* называется функция, получаемая из рациональных функций и из степенных функций с рациональными нецелыми показателями с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции.

Примеры иррациональных функций:

1) $y=\sqrt[3]{x+1}$. 2) $y=\sqrt[5]{\dfrac{2x+5}{x+\sqrt{x}}}$. 3) $y=\sqrt{x^3}+x-2$.

<u>Обратная функция</u>

Пусть функция $y=f(x)$ имеет область определения X и область значений Y (рис. 2.2), т.е. каждому значению переменной $x\in X$ по закону f ставится в соответствие одно определенное значение переменной $y\in Y$.

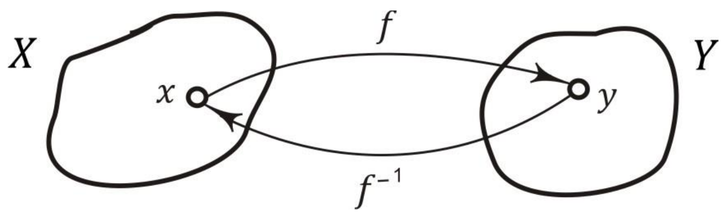


Рис. 2.2. Понятие обратной функции $x=f^{-1}(y)$

Если же при этом каждому значению переменной $y\in Y$ по закону g можно поставить в соответствие одно определенное значение переменной $x\in X$, то говорят, что задана *обратная функция* $x=g(y)$ или $x=f^{-1}(y)$, имеющая область определения Y и область значений X (рис. 2.2). Таким образом, областью определения обратной функции становится область значений исходной функции, а областью значений обратной функции – область определения исходной функции.

Очевидно, что для функции $x=f^{-1}(y)$ обратной является $y=f(x)$. Поэтому обе эти функции называются *взаимно обратными.*

Исходная функция $y=f(x)$ и ее обратная функция $x=f^{-1}(y)$ выражают одну и ту же связь между переменными x и y, поэтому одна и та же кривая служит графиком и для исходной функции и для обратной функции. Однако если для исходной функции ось *Ox* является осью независимой переменной, а ось *Oy* – осью зависимой переменной, то для обратной функции, наоборот, ось *Ox* является осью зависимой переменной, а ось *Oy* – осью независимой переменной.

Если же вернуться к обычному обозначению независимой переменной через x, а зависимой переменной – через y, то обратную функцию можно записать в виде $y=f^{-1}(x)$. График обратной функции $y=f^{-1}(x)$ симметричен графику исходной функции $y=f(x)$ относительно биссектрисы I и III координатных углов (квадрантов) – прямой $y=x$.

Пример

Исходная функция: $y=e^x$; $X=(-\infty,+\infty)$; $Y=(0,+\infty)$.

Обратная функция: $y = \ln x$; $X = (0, +\infty)$; $Y = (-\infty, +\infty)$.

Графики исходной функции $y = e^x$ и обратной функции $y = \ln x$ приведены на рис. 2.3.

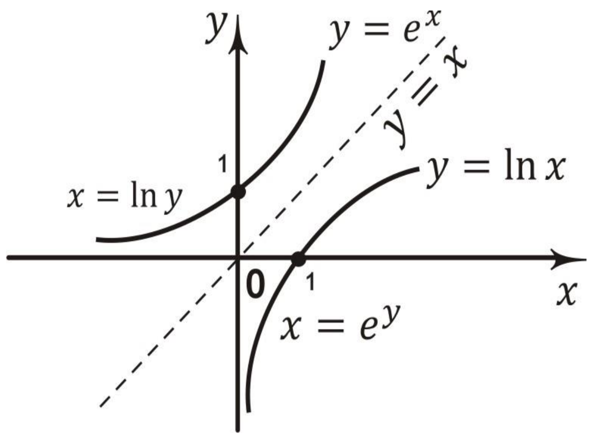


Рис. 2.3. Графики исходной функции $y = e^x$ и обратной функции $y = \ln x$

Сложная функция

Определение. Если в области X определена функция $y = \varphi(x)$ с областью значений Y, а в области Y определена функция $z = f(y)$, то *функция от функции* $z = f[\varphi(x)]$ называется *сложной функцией от* x, а переменная y – *промежуточной переменной* сложной функции (рис. 2.4).

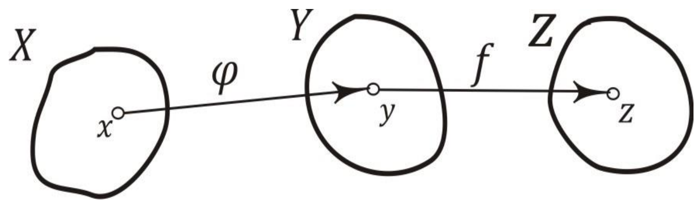


Рис. 2.4. Понятие сложной функции $z = f[\varphi(x)]$

Пример. Функция $z = e^{x^2}$ – сложная функция. Здесь:

$$y = \varphi(x) = x^2; \; X = (-\infty, +\infty); \; Y = [0, +\infty).$$

$$z = f(y) = e^y; \; Y = [0, +\infty); \quad Z = [1, +\infty).$$

Таким образом, для сложной функции $z = e^{x^2}$ область определения $X = (-\infty, +\infty)$, а область значений $Z = [1, +\infty)$.

Функция от функции может браться несколько раз.

Пример. В сложной функции $y = e^{\cos(\sqrt[3]{\ln x})}$ функция от функции берется три раза.

Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой области X и $x_0 \in X$.

Рассмотрим понятие *предела функции в точке.*

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0$, если для любого произвольно малого положительного числа ε существует такое зависящее от него положительное число δ, что для всех $x \in X$, отличных от x_0 и удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Тот факт, что число A есть предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$, принято записывать следующим образом:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \qquad \text{или} \qquad f(x) \to A \text{ ïðè } x \to x_0 .$$

Данное определение называют определением *«на языке $\varepsilon - \delta$»*.

Символическая запись определения предела функции $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет вид:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Отметим, что условия $x \neq x_0, |x - x_0| < \delta$ можно записать в виде $0 < |x - x_0| < \delta$. Так как

$$\forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow \forall x \in \dot{U}(x_{0,} \delta) \subset X \quad \text{и} \quad |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow y \in U(A, \varepsilon),$$

то символическая запись определения предела примет вид

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \dot{U}(x_0, \delta) \subset X): y \in U(A, \varepsilon).$$

Геометрический смысл предела функции $f(x)$ *при* $x \to x_0$ заключается в следующем: для любого произвольно малого положительного числа ε существует такое зависящее от него положительное число δ, что для всех x из проколотой δ-окрестности точки x_0 график функции $f(x)$ лежит в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$ (рис. 2.8).

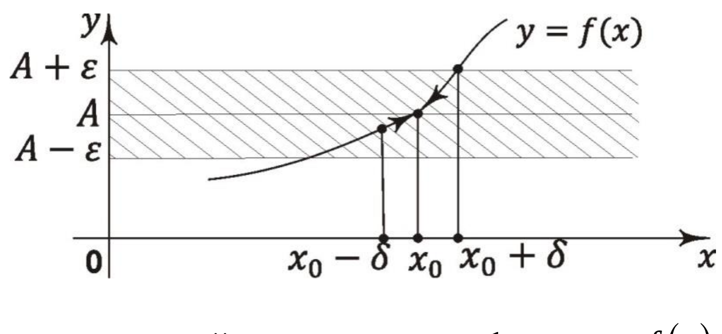


Рис. 2.8. Геометрический смысл предела функции $f(x)$ при $x \to x_0$

Иными словами, значения функции y будут заключены в произвольной ε-окрестности точки A при условии, что значения аргумента x взяты в проколотой δ-окрестности точки x_0.

Заметим, что на рис. 2.8 показано, очевидно, наибольшее из всевозможных чисел δ, найденное по заданному числу ε. Ясно и то, что в данном случае при увеличении или уменьшении числа ε число δ также соответственно увеличивается или уменьшается, т.е., вообще говоря, $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Замечание. Для существования предела функции $f(x)$ при $x \to x_0$ не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$.

Примеры

1) Докажем, что

$$\lim_{x \to 1}(2x+3) = 5.$$

Зададим произвольное положительное число ε. Для того чтобы при $A = 5$ выполнялось неравенство

$$|(2x+3)-5| < \varepsilon,$$

необходимо выполнение неравенства

$$|2x-2| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если положить $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, то при любом ε для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x-1| < \delta$, будет выполняться неравенство $|(2x+3)-5| < \varepsilon$. А это и означает, что число 5 есть предел функции $f(x) = 2x+3$ при $x \to 1$.

2) Докажем, что

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0.$$

Зададим произвольное положительное число ε. Для того чтобы при $A = x_0$ выполнялось неравенство

$$|x - x_0| < \varepsilon,$$

необходимо выполнение неравенства

$$|x - x_0| < \delta,$$

что всегда возможно, если выбрать $\delta = \varepsilon$. А это и означает, что x_0 есть предел функции $f(x) = x$ при $x \to x_0$.

<u>Односторонние пределы функции в точке</u>

Определение. Число A называется *левосторонним (правосторонним) пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0$ слева (справа), если для любого произвольно малого положительного числа ε существует такое зависящее от него положительное число δ, что для всех $x \in X$, меньших (больших) x_0 и удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Тот факт, что число A есть *левосторонний предел функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0$, принято записывать следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \to A \text{ при } x \to x_0 - 0 \quad \text{или} \quad f(x_0 - 0) = A.$$

Если же число A есть *правосторонний предел функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0$, то пишут так:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \to A \text{ при } x \to x_0 + 0 \quad \text{или} \quad f(x_0 + 0) = A.$$

Данное определение, как и предыдущее, сформулировано *«на языке $\varepsilon - \delta$»*.

Символическая запись определения *левостороннего предела функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0$ имеет вид:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X, x < x_0, |x - x_0| < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Символическая запись определения *правостороннего предела функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0$ имеет вид:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X, x > x_0, |x - x_0| < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Геометрический смысл левостороннего предела функции $f(x)$ *при* $x \to x_0$ заключается в следующем: для любого произвольно малого положительного числа ε существует такое зависящее от него положительное число δ, что для всех x, лежащих между $x_0 - \delta$ и x_0, график функции $f(x)$ лежит в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$ (рис. 2.9).

Иными словами, значения функции y будут заключены в произвольной ε-окрестности точки A при условии, что значения аргумента x взяты из интервала $(x_0 - \delta, x_0)$.

Левосторонний предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ на графике функции *изображается стрелкой слева от точки* x_0 (см. рис. 2.9).

Геометрический смысл правостороннего предела функции $f(x)$ *при* $x \to x_0$ заключается в следующем: для любого произвольно малого положительного числа ε существует такое зависящее от него положительное число δ, что для всех x, лежащих между x_0 и $x_0 + \delta$, график функции $f(x)$ лежит в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$ (рис. 2.10).

Иными словами, значения функции y будут заключены в произвольной ε-окрестности точки A при условии, что значения аргумента x взяты из интервала $(x_0, x_0 + \delta)$.

Правосторонний предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ на графике функции *изображается стрелкой справа от точки* x_0 (см. рис. 2.10).

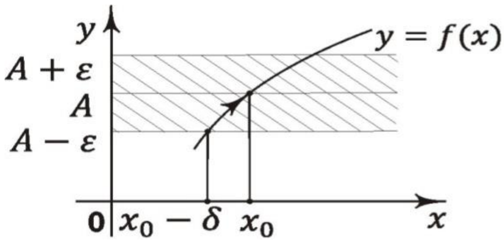


Рис. 2.9. Геометрический смысл левостороннего предела функции $f(x)$ при $x \to x_0$

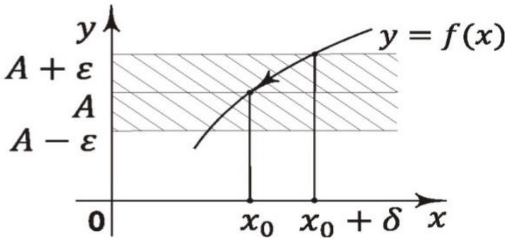


Рис. 2.10. Геометрический смысл правостороннего предела функции $f(x)$ при $x \to x_0$

Вычисление пределов элементарных функций в точке

На практике вычисляют значение элементарной функции, стоящей под знаком предела, при $x = x_0$. При этом возможны следующие случаи:

1) Если x_0 принадлежит области определения функции и в результате получено некоторое число *А*, то оно и является пределом:

$$\lim_{x \to x_0}\left(f(x)\right) = f(x_0) = A.$$

2) Если x_0 не принадлежит области определения функции и при $x \to x_0$ функция $f(x) \to \infty$, то она является бесконечно большой и считают, что предел функции равен бесконечности:

$$\lim_{x \to x_0}\left(f(x)\right) = \infty.$$

3) Если же в результате подстановки значения x_0 вместо x получаются формальные выражения вида

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 0 \cdot \infty;\ \infty - \infty;\ 1^{\infty};\ \infty^{0};\ 0^{0},$$

то говорят о неопределенности соответствующего вида. В этом случае исследование предела и его вычисление называют *раскрытием неопределенности* и используют различные специальные методы (алгебраические преобразования, эквивалентные бесконечно малые, первый и второй замечательные пределы, правило Лопиталя и др.).

Примеры

1) Найти предел

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 + 3}{x - 4}.$$

Так как $x_0 = 5$ принадлежит области определения элементарной функции, стоящей под знаком предела, то вычисления дают (случай 1):

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2+3}{x-4}=\left(\frac{x^2+3}{x-4}\right)\Bigg|_{x=5}=\frac{5^2+3}{5-4}=28.$$

2) Найти предел

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x^2}{x-4}.$$

Так как $x_0=4$ не принадлежит области определения элементарной функции, стоящей под знаком предела, и $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)=0$, а $\lim\limits_{x\to 4}3x^2=3x^2\Big|_{x=4}=3\cdot 4^2=48$, то (случай 2):

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x^2}{x-4}=\frac{48}{0}=\infty.$$

3) Найти предел

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+7x+12}.$$

В результате подстановки значения $x_0=-3$ вместо x в функцию, стоящую под знаком предела, получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$ (случай 3).

Для раскрытия неопределенности воспользуемся алгебраическими преобразованиями. Разложим числитель и знаменатель дроби $\frac{x^2-9}{x^2+7x+12}$ на множители: числитель – по формуле сокращенного умножения (разность квадратов), а знаменатель – по формуле разложения квадратного трехчлена на множители. Получим

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+7x+12}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(x+4)}=\lim_{x\to -3}\frac{x-3}{x+4}=\left(\frac{x-3}{x+4}\right)\Bigg|_{x=-3}=\frac{-6}{1}=-6$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1. Багрова, В.Н. Дополнительные главы элементарной математики: учебно-методическое пособие к выполнению аудиторных и домашних заданий (для студентов целевого обучения). В 4 ч. Ч. 2. Алгебра / В.Н. Багрова, Е.Б. Фомичева, Г.Д. Вернигора; ФГБОУ ВО РГУПС. − Ростов н/Д, 2015. − 47 с. – Библиогр.: с. 46. / Л.В. Данилова, Е.В. Пиневич, Рост. гос. ун-т путей сообщения. - Ростов н/Д: 2007. – 29 с. Библиогр.: 9 назв.

2. Морозова, А.В. Высшая математика: учебное пособие в 4 ч. Ч. 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2010. – 132 с. Библиогр.: 7 назв. ***Задание 6.1.*** (стр.96-98).

Практическое занятие №2. Предел функции в бесконечности, первый и второй замечательные пределы. (2ч.)

Предел функции в бесконечности

Кроме рассмотренных ранее понятий предела функции в точке x_0 (при $x \to x_0$) и односторонних пределов, существует также понятие *предела функции при стремлении аргумента к бесконечности.*

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если для любого произвольно малого положительного числа ε существует такое зависящее от него положительное (отрицательное) число M, что для всех $x \in X$ и $x > M > 0\,(x < M < 0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Тот факт, что число A есть *предел функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, принято записывать следующим образом:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \to A \text{ при } x \to +\infty \quad \text{или} \quad f(+\infty) = A.$$

Если же число A есть *предел функции* $f(x)$ *при* $x \to -\infty$, то пишут так:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \to A \text{ при } x \to -\infty \quad \text{или} \quad f(-\infty) = A.$$

Данное определение, как и предыдущее, сформулировано *«на языке $\varepsilon - \delta$»*.

Символическая запись определения *предела функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$ имеет вид:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X, x > M > 0) : |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Символическая запись определения *предела функции* $f(x)$ *при* $x \to -\infty$ имеет вид:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M(\varepsilon) < 0)(\forall x \in X, x < M < 0) : |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Геометрический смысл предела функции $f(x)$ *при* $x \to +\infty$ заключается в следующем: для любого произвольно малого положительного числа ε существует такое зависящее от него положительное число M, что для всех x, больших M, график функции $f(x)$ лежит в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$ (рис. 2.11).

Иными словами, значения функции y будут заключены в произвольной ε-окрестности точки A при условии, что значения аргумента x взяты из интервала $(M, +\infty)$.

Геометрический смысл предела функции $f(x)$ *при* $x \to -\infty$ заключается в следующем: для любого произвольно малого положительного числа ε существует такое зависящее от него отрицательное число M, что для всех x, меньших M, график функции $f(x)$ лежит в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$ (рис. 2.12).

Иными словами, значения функции y будут заключены в произвольной ε-окрестности точки A при условии, что значения аргумента x взяты из интервала $(-\infty, M)$.

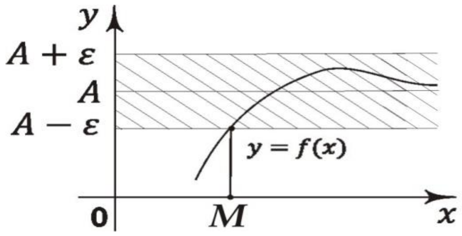


Рис. 2.11. Геометрический смысл предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$

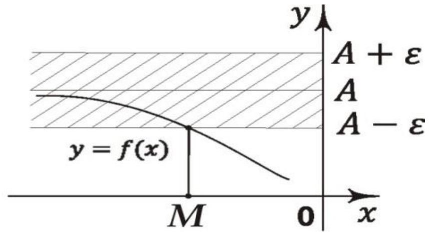


Рис. 2.12. Геометрический смысл предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$

Примеры

1) Докажем, что

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Зададим произвольное положительное число ε. Для того чтобы при $A = 0$ выполнялось неравенство

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon,$$

необходимо выполнение неравенства

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon},$$

которое можно записать в виде

$$x > \frac{1}{\varepsilon} \;\text{è}\; x < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Если положить $M = \frac{1}{\varepsilon}$, то при любом ε для всех значений x, удовлетворяющих неравенствам $x > M$ и $x < -M$, будет выполняться неравенство $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$. А это и означает, что число 0 есть предел функции $f(x) = \frac{1}{x}$ как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$.

2) Докажем, что *предел постоянной равен самой постоянной*:

$$\lim_{x\to+\infty} C = C,$$

где C – некоторая постоянная величина.

Зададим произвольное положительное число ε. При $f(x) = C$ и $A = C$ неравенство

$$\left|f(x)-A\right|=\left|C-C\right|=0<\varepsilon,$$

выполняется для всех значений $x\in(-\infty,+\infty)$, в том числе и для $x>M$, где M – любое положительное число.

А это и означает, что число C есть предел функции $f(x)=C$ при $x\to+\infty$.

Замечание. Для остальных случаев $\left(x\to x_0, x\to x_0-0, x\to x_0+0, x\to-\infty\right)$ доказательства аналогичны.

Первый и второй замечательные пределы

В математике и других науках важную роль играют два замечательных предела.

Первый замечательный предел имеет вид

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

Второй замечательный предел имеет вид

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \quad \text{или} \quad \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e,$$

где $e=2{,}718281828$ – основание натуральных логарифмов.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1. Морозова, А.В. Высшая математика: учебное пособие в 4 ч. Ч. 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2010. – 132 с. Библиогр.: 7 назв. ***Задание 6.1.*** (стр.98-104).

2. Багрова, В.Н. Математика. Предел функции одной переменной : учебно-методическое пособие к выполнению аудиторных и домашних заданий / В.Н. Багрова, Е.В. Кручинина, Л.Н. Стадник, Г.Д. Вернигора, О.Б. Сухорукова; Рост. гос. ун-т пу-тей сообщения. – Ростов н/Д, 2012. – 50 с. Библиогр.: 17 назв., ил. 6.

Практическое занятие №3. Производная функции: таблица производных, правила дифференцирования. (2ч.)

Производная функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна для $\forall x\in X$.

Определение. *Производной* функции $f(x)$ в точке x называется предел, если он существует, отношения приращения функции Δy в этой точке к приращению аргумента Δx при $\Delta x\to 0$.

Производная функции $y=f(x)$ в точке x обозначается символами:

$$f'(x),\ f'_x,\ f',\ y'(x),\ y'_x,\ \frac{df}{dx},\ \frac{dy}{dx}.$$

Итак, по определению

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если для некоторого значения x выполняется условие

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty \text{ или } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty,$$

то говорят, что в точке x функция имеет *бесконечную производную.*

Используя понятие левостороннего и правостороннего пределов, можно определить *левую и правую производные* функции $y = f(x)$ в точке x:

$$f'_-(x) := \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad f'_+(x) := \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Из теоремы 2.1 следует, что функция $f(x)$ имеет в точке x производную тогда и только тогда, когда в этой точке существуют по отдельности и равны между собой обе – левая и правая – односторонние производные. В этом случае их общее значение и равно производной функции в точке x.

Однако существуют функции, имеющие в данной точке x правую и левую производные, но не имеющие производной в этой точке.

Пример. Функция $y = |x|$, график которой изображён на рис. 3.1, имеет в точке $x = 0$ левую производную, равную $f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$ (при $x < 0$ $\Delta y = -\Delta x$), и правую производную, равную $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ (при $x \geq 0$ $\Delta y = \Delta x$), но не имеет в этой точке производной, так как $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

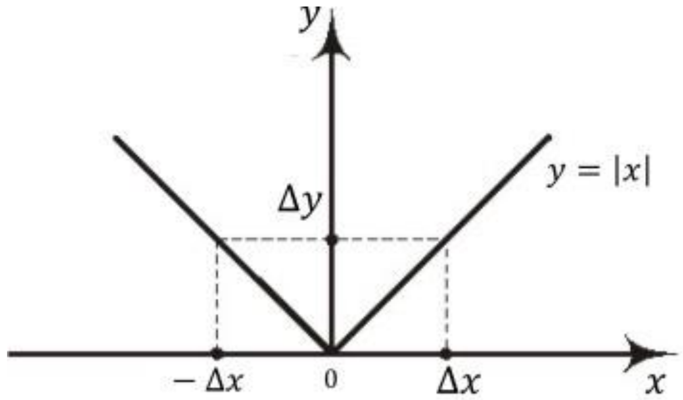


Рис. 3.1. График функции $y = |x|$

Установим связь между существованием производной функции и её непрерывностью в данной точке.

Теорема 3.1. Функция $y = f(x)$, имеющая производную в точке x, непрерывна в этой точке.

Замечание. Обратное утверждение неверно. Функция может быть непрерывной в точке, но не иметь производной в этой точке.

Пример. Функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$ по третьему определению непрерывности функции (рис. 3.1):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(-\Delta x) = 0 \qquad \text{для } x < 0,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x) = 0 \qquad \text{для } x \geq 0,$$

но, как было показано в предыдущем примере, не имеет в точке $x = 0$ производной.

Если функция $f(x)$ имеет конечную производную в каждой точке $x \in X$, то производную $f'(x)$ можно рассматривать как функцию от x, также определённую для $\forall x \in X$.

Из определения производной вытекает и способ её вычисления.

Пример. Найдём производную функции $y = x^2$.

Для любого x из области определения $X = (-\infty, +\infty)$ приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Пользуясь определением производной и считая x фиксированным, получим

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом, производная $(x^2)' = 2x$ определена, также как и исходная функция, в области $X = (-\infty, +\infty)$. Например, значение производной в точке $x = 3$ равно $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Геометрический смысл производной

Зададим на графике функции $y = f(x)$ точки $M(x, y)$и $P(x + \Delta x, y + \Delta y)$ и проведём через них секущую MP (рис. 3.2). Угол между секущей и осью Ox обозначим через α. Из ΔMPK найдём $tg\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

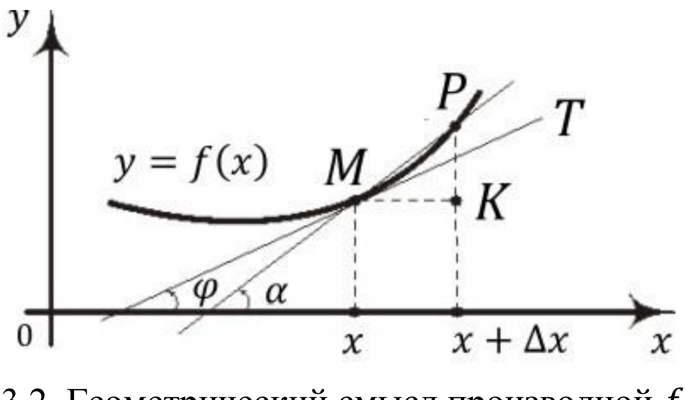


Рис. 3.2. Геометрический смысл производной $f'(x)$

Устремим точку P вдоль кривой к точке M или, что то же самое, устремим $\Delta x \to 0$. При этом секущая MP будет изменять своё положение и стремиться к некоторому предельному положению (если оно существует) – прямой MT, которую называют *касательной* к графику функции в точке $M(x, y)$. Обозначим угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$ к оси Ox через φ. Определим угловой коэффициент касательной

$$k = tg\varphi = tg\left(\lim_{\Delta x \to 0} \alpha\right) = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Тем самым устанавливается *геометрический смысл производной*: производная функции $y = f(x)$ в точке x равна тангенсу угла наклона (угловому коэффициенту) касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$ к оси Ox .

Используя геометрический смысл производной, легко записать *уравнение касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

и уравнение нормали в этой же точке:

$$y - f(x_0) = -(1/f'(x_0))(x - x_0),$$

так как произведение угловых коэффициентов двух взаимно перпендикулярных прямых равно, как известно, –1.

Механический смысл производной

Пусть материальная точка движется неравномерно вдоль некоторой прямой по закону $s = f(t)$, где t – время, а s – путь, проходимый точкой за время t. За промежуток времени Δt материальная точка проходит путь $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$. Средняя скорость $v_{\text{ср}}$ за промежуток времени Δt определяется, как известно из физики, соотношением пройденного пути ко времени:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Скорость точки v в момент времени t или *мгновенная скорость* определяется как предел средней скорости $v_{\text{ср}}$ при $\Delta t \to 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t).$$

Тем самым устанавливается *механический смысл производной*: скорость неравномерного движения в каждый данный момент времени равна производной от пути по времени.

Основные правила нахождения производных

Пусть функции $u(x)$и $v(x)$ непрерывны и имеют производные для $\forall x \in X$ и C – постоянная.

Правило 1. Постоянный множитель выносится за знак производной

$$(Cu)' = Cu'.$$

Правило 2. Производная суммы функций

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Правило 3. Производная произведения функций

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Правило 4. Производная частного функций ($v(x) \neq 0$)

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Таблица производных основных элементарных функций

Пусть функция $u = u(x)$ имеет производную в некоторой точке x и C – постоянная. Тогда справедливы следующие формулы:

1 $(C)' = 0$.

2 $(x)' = 1$.

3 $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$.

4 $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

5 $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$.

6 $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

7 $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$.

8 $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.

9 $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

10 $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

11 $(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.

12 $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

13 $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

14 $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

15 $(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

16 $(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

17 $(shu)' = chu \cdot u'$.

18 $(chu)' = shu \cdot u'$.

19 $(thu)' = \dfrac{1}{ch^2 u} \cdot u'$.

20 $(cthu)' = -\dfrac{1}{sh^2 u} \cdot u'$.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Морозова, А.В. Высшая математика: учебное пособие в 4 ч. Ч. 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2010. – 132 с. Библиогр.: 7 назв. ***Задание 6.3.*** (стр.107-109).

Практическое занятие №4. Производная сложной и обратной функций. (2ч.)

Производная сложной функции

Теорема 3.2. Производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточной переменной на производную промежуточной переменной по независимой переменной:

$$y = y[u(x)]; \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Производная обратной функции

Теорема 3.3. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой области X и имеет в точке $x \in X$ производную $f'(x) \neq 0$, то обратная функция $x = g(y)$ также имеет в соответствующей точке Y производную, равную

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Пример. Найти производную функции $y = x^2 \ln x + e^{\sin x} - 4$.

$$y' = \left(x^2 \ln x + e^{\sin x} - 4\right)' = (x^2 \ln x)' + \left(e^{\sin x}\right)' - (4)' =$$

$$= (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' + e^{\sin x} (\sin x)' - (4)' = 2x \cdot ln\, x + x + e^{\sin x} \cdot \cos x.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Морозова, А.В. Высшая математика: учебное пособие в 4 ч. Ч. 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2010. – 132 с. Библиогр.: 7 назв. ***Задание 6.3.*** (стр.109-112).

Практическое занятие №5. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. (2ч.)

Производная функции, заданной неявно

Для нахождения производной y' от функции, заданной неявно, используют следующее **правило:**

1 Находим и приравниваем производные от обеих частей равенства, *считая y функцией от x*.

2 Слагаемые, содержащие y', собираем в левой части равенства, а остальные слагаемые – в правой.

3 Из полученного равенства выражаем y' как функцию от x и y.

Пример. Найти производную функции $x^4 + y^4 = 4xy$.

1) $(x^4 + y^4)' = (4xy)'$;

$(x^4)' + (y^4)' = 4(xy)'$;

$4x^3 + 4y^3 \cdot y' = 4(y + x \cdot y')$.

2) $y^3y' - xy' = y - x^3$.

3) $y' = \dfrac{y - x^3}{y^3 - x}$.

Производная функции, заданной параметрически

Для нахождения производной y'_x от функции, заданной параметрически, справедлива формула

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример. Найти производную функции

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

По формуле для производной функции, заданной параметрически:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(R\sin t)'}{(R\cos t)'} = \frac{R\cos t}{-R\sin t} = -ctg\, t = -\frac{x}{y}.$$

Замечание. Уравнения

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

являются параметрическими уравнениями окружности радиуса R с центром в начале координат, так как $x^2 + y^2 = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t = R^2$.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Морозова, А.В. Высшая математика: учебное пособие в 4 ч. Ч. 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2010. – 132 с. Библиогр.: 7 назв. ***Задание 6.3.*** (стр.118-121).

Практическое занятие №6. Логарифмическое дифференцирование, производные высших порядков. (2ч.)

Логарифмическая производная

Во многих случаях, особенно когда надо найти производную от многих сомножителей или частного, в котором и числитель и знаменатель состоят из нескольких сомножителей, а также при отыскании производных от *показательно-степенной функции* $y(x) = u(x)^{v(x)}$, полезным оказывается применение так называемой *логарифмической производной*

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = y(\ln y)'.$$

Пример. Найти производную функции

$$y = \frac{e^x\sqrt{1+x^2}cos^3x}{x^5(x^4+1)^2}.$$

1) Прологарифмируем обе части равенства, используя свойства логарифмов произведения, частного и степени:

$$\ln y = x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 3\ln\cos x - 5\ln x - 2\ln(x^4+1).$$

2) Возьмём производные от обеих частей полученного равенства:

$$\frac{y'}{y} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x + 3\cdot\frac{1}{\cos x}(-\sin x) - 5\cdot\frac{1}{x} - 2\cdot\frac{1}{x^4+1}\cdot 4x^3$$

или

$$\frac{y'}{y} = 1 + \frac{x}{1+x^2} - 3tg\,x - \frac{5}{x} - \frac{8x^3}{x^4+1}.$$

3) Подставляя вместо y заданную функцию, находим производную:

$$y' = \frac{e^x\sqrt{1+x^2}cos^3x}{x^5(x^4+1)^2}\left(1 + \frac{x}{1+x^2} - 3tg\,x - \frac{5}{x} - \frac{8x^3}{x^4+1}\right).$$

Пример. Найти производную показательно-степенной функции

$$y(x) = u(x)^{v(x)}.$$

1) Прологарифмируем обе части равенства, используя свойство логарифма степени:

$$\ln y = v\cdot\ln u.$$

2) Возьмём производные от обеих частей полученного равенства:

$$\frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{u'}{u}.$$

3) Подставляя вместо y заданную функцию, получаем *формулу для производной показательно-степенной функции*:

$$(u^v)' = u^v\ln u\cdot v' + vu^{v-1}\cdot u'.$$

Например, для функции $y = x^{\sin x}$ имеем $u = x,\ v = \sin x$ и производная

$$\left(x^{\sin x}\right)' = x^{\sin x}\cdot\cos x\cdot\ln x + \sin x\cdot x^{\sin x - 1}.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ №1

Морозова, А.В. Высшая математика: учебное пособие в 4 ч. Ч. 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2010. – 132 с. Библиогр.: 7 назв. ***Задание 6.3.*** (стр.112-118).

Производные высших порядков

Назовём $f'(x)$ *производной первого порядка* (или *первой производной*) функции $f(x)$.

Производная от производной первого порядка называется *производной второго порядка* (или *второй производной*) функции $f(x)$. Производная от производной второго порядка называется *производной третьего порядка* (или *третьей производной*) и т.д. Производная от производной (*n–1*)-го порядка называется *производной n-го порядка* (или *n-й производной*).

Производные, начиная со второй, называются *производными высших порядков* и обозначаются так:

$$y'', y''', y'''', \dots \quad \text{или} \quad f''(x), f'''(x), f''''(x), \dots;$$

$$y^{(2)}, y^{(3)}, y^{(4)}, \dots, y^{(n)}, \dots \quad \text{или} \quad f^{(2)}(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x), \dots, f^{(n)}(x) \dots .$$

Функция, имеющая n-ю производную в точке x, называется *n раз дифференцируемой* в этой точке. Функция, имеющая в точке x производные всех порядков, называется *бесконечно дифференцируемой* в этой точке.

Пример. Найти производную третьего порядка функции $y = \ln x$.

Находим последовательно первую, вторую и третью производные:

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}; \;\; y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \;\; y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}.$$

Пример. Найти производную n-го порядка функции $y = e^{kx}$.

Находим последовательно:

$$y' = (e^{kx})' = ke^{kx}; \;\; y'' = (ke^{kx})' = k^2e^{kx}; \;\; y''' = (k^2e^{kx})' = k^3e^{kx}.$$

По аналогии получаем

$$y^{(n)} = (e^{kx})^{(n)} = k^ne^{kx}.$$

Механический смысл второй производной

Пусть материальная точка движется неравномерно вдоль некоторой прямой по закону $s = f(t)$, где t – время, а s – путь, проходимый точкой за время t. Скорость движения точки зададим функцией $v = v(t)$. За промежуток времени Δt скорость точки изменится на величину $\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$. Отношение $\Delta v/\Delta t = w_{\text{ср}}$ называется *средним ускорением* за промежуток времени Δt. *Ускорением* w в момент времени t называется предел среднего ускорения при $\Delta t \to 0$:

$$w(t) = \lim_{\Delta t \to 0} w_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t).$$

Таким образом, *ускорение прямолинейного движения точки есть производная скорости по времени*.

Учитывая, что скорость есть производная пути s по времени t, получим:

$$w(t) = v'(t) = [s'(t)]' = s''(t),$$

т.е. *ускорение неравномерного движения равно второй производной от пути по времени*.

Производные высших порядков от функции, заданной неявно

Для нахождения производной n-го порядка от функции, заданной неявно, надо применять последовательно n раз правило нахождения производной первого порядка (см. п. 3.8), повышая на каждом шаге порядок производных на единицу.

Пример. Найти производную третьего порядка функции $x^2 + y^2 = R^2$.

Находим производную первого порядка:

$$2x + 2yy' = 0 \;\; \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

Находим производную второго порядка:

$$y'' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{R^2}{y^3},$$

где учтено, что $x^2 + y^2 = R^2$.

Находим производную третьего порядка:

$$y''' = \left(-\frac{R^2}{y^3}\right)' = -R^2\left(\frac{3}{y^4} \cdot y'\right) = \frac{3R^2}{y^4}\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{3R^2 x}{y^5}.$$

Производные высших порядков от функции, заданной параметрически

Выведем формулу для нахождения производной n-го порядка $y_x^{(n)}$ от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in T.$$

Производная первого порядка находится по формуле (см. п. 3.9)

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \qquad (x'_t \neq 0)$$

и является, в общем случае, некоторой функцией параметра t: $y'_x = y'_x(\, t)$.

Тогда производная второго порядка y''_x может быть найдена по той же самой формуле как производная по x от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y'_x = y'_x(t), \end{cases} \quad t \in T_1,$$

т.е. в формуле y надо заменить на y'_x:

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

причём, в общем случае, $y''_x = y''_x(t)$ есть некоторая функция параметра t.

Производная третьего порядка y'''_x может быть найдена по той же самой формуле как производная по x от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y''_x = y''_x(t), \end{cases} \quad t \in T_2,$$

т.е. в формуле y надо заменить теперь на y''_x:

$$y'''_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t}.$$

Аналогично получаем

$$y_x^{(n)} = \frac{\left(y_x^{(n-1)}\right)'_t}{x'_t}.$$

Пример. Найти производную третьего порядка функции:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Производная первого порядка

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(R\sin t)'}{(R\cos t)'} = \frac{R\cos t}{-R\sin t} = -ctg\, t.$$

Производная второго порядка

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-ctg\, t)'}{(R\cos t)'} = \frac{\frac{1}{sin^2 t}}{-R\sin t} = -\frac{1}{Rsin^3 t}.$$

Производная третьего порядка

$$y'''_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(-\frac{1}{Rsin^3 t}\right)'}{(R\cos t)'} = \frac{-\frac{1}{R}\left(-\frac{3\cos t}{sin^4 t}\right)}{-R\sin t} = -\frac{3\cos t}{R^2 sin^5 t}.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ №2

Морозова, А.В. Высшая математика: учебное пособие в 4 ч. Ч. 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2010. – 132 с. Библиогр.: 7 назв. ***Задание 6.3.*** (стр.121-125).

Практическое занятие №7. Частные производные и дифференциал. (2ч.)

Частные производные

Пусть функция $z = f(P) = f(x, y)$ определена в некоторой области $D \subset R^2$ и пусть окрестность точки $P(x, y)$ принадлежит D.

Определение. Приращение, которое получает функция $f(P)$ в точке P, когда изменяется только одна из переменных, называется *частным приращением* функции $f(P)$ в точке P по этой переменной:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y); \qquad \Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Определение. *Частной производной* функции $f(P)$ в точке P по переменной x (по переменной y) называется предел, если он существует, отношения частного приращения функции $\Delta_x z$ $(\Delta_y z)$ к приращению аргумента Δx (Δy) при $\Delta x \to 0$ (при $\Delta y \to 0$):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = z'_y = f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Геометрический смысл частной производной заключается в том, что величина $f'_x(x, y)$ $(f'_y(x, y))$ равна тангенсу угла наклона к оси Ox (Oy) касательной к кривой, получающейся в сечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = const$ в точке с абсциссой x (плоскостью $x = const$ в точке с ординатой y) (рис. 6.3).

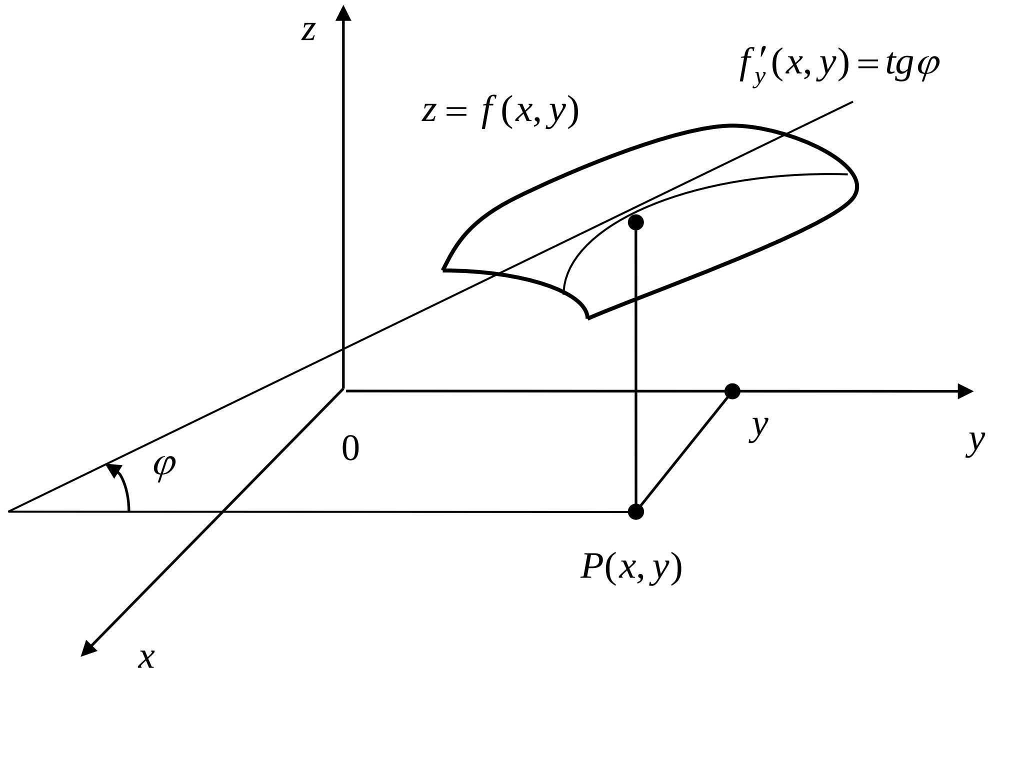


Рис. 6.3. Геометрический смысл частной производной

Аналогично определяются частные производные от функции любого числа переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} u}{\Delta_{x_1}}, \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{\Delta_{x_2} u}{\Delta_{x_2}}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} = \lim_{\Delta x_n \to 0} \frac{\Delta_{x_n} u}{\Delta_{x_n}}.$$

Из определения следует *правило вычисления частных производных:*

При вычислении частных производных пользуются формулами и правилами вычисления обыкновенных производных, считая все переменные, кроме одной, по которой берется производная, постоянными величинами.

Примеры

1) $z = x^2 + y^3 + xy; \ \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y; \ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + x.$

2) $u = ze^{xy}; \ \frac{\partial u}{\partial x} = yze^{xy}; \ \frac{\partial u}{\partial y} = xze^{xy}; \ \frac{\partial u}{\partial z} = e^{xy}.$

Частные производные высших порядков

Определение. Назовем частные производные функции нескольких переменных *первыми частными производными* или *частными производными первого порядка.* Эти производные являются, вообще говоря, функциями тех же переменных, что и исходная функция и, в свою очередь, могут иметь частные производные, которые называются *вторыми частными производными* или *частными производными второго порядка* исходной функции.

Так, например, функция $z = f(x, y)$ двух переменных имеет четыре частных производных второго порядка, которые определяются и обозначаются следующим образом:

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$, здесь f дифференцируется последовательно два раза по x;

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$, здесь f дифференцируется последовательно два раза по y;

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$, здесь f сначала дифференцируется по x, а потом результат дифференцируется по y;

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$, здесь f сначала дифференцируется по y, а потом результат дифференцируется по x.

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и более высоких порядков функции нескольких переменных.

Определение. *Частной производной n-го порядка* функции нескольких переменных называется частная производная первого порядка от частной производной (n-1)-го порядка той же функции.

Частные производные второго порядка и выше называются *частными производными высших порядков.*

Определение. Частная производная высшего порядка, взятая по нескольким различным переменным, называется *смешанной частной производной.*

Примеры

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} -$$

смешанные частные производные функции двух переменных $z = f(x, y)$.

Теорема 6.1. Если две смешанные частные производные одной и той же функции отличаются лишь порядком дифференцирования и непрерывны, то они равны между собой.

Например, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}.$$

Пример. Найти смешанные частные производные второго порядка функции $z = x^3 y^2$.

Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y.$$

Затем находим смешанные частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 y^2\right) = 6x^2 y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3 y\right) = 6x^2 y.$$

Заметим, что согласно теореме 6.1 они равны между собой.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ №1

Задание 1. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

1	1. $z = 3xy^3 - 5y + \sin(x - 2y)$	2. $z = arctg\,\frac{x+y}{x-y}$
2	1. $z = 2x + 4x^2 y^5 - e^{3x-y}$	2. $z = \sin\frac{x}{y} \cdot \cos\frac{y}{x}$
3	1. $z = y - 5x^6 y + \arcsin(xy)$	2. $z = xy\ln\left(x^2 + y^2\right)$

4	1. $z=2x^2y^7-9x-\ln(2x-y)$	2. $z=x\cdot 5^{x^2+xy^3}$
5	1. $z=8y+7xy+2^{5x-y}$	2. $z=\dfrac{x^3+y^3}{1-x}$
6	1. $z=x-4x^7y^3-arctg(x-y)$	2. $z=\sqrt[4]{2x^2y-y^2}$
7	1. $z=x^9y+2y+\lg(x-3y)$	2. $z=tg^2\dfrac{x}{y^2+1}$
8	1. $z=5x-3x^4y^5-e^{3xy}$	2. $z=(x^3+y)^2\cdot\cos\sqrt{xy}$
9	1. $z=3y+2x^2y+\arccos(2x)$	2. $z=e^{xy(x^2+y^2)}$
10	1. $z=7xy-3x-tg(xy)$	2. $z=\lg(x^2-y)\cdot y^3$
11	1. $z=-x+5x^4y^3+3^{-x+y}$	2. $z=xy\cdot tg\dfrac{x}{y}$
12	1. $z=xy-2y-\ln(xy)$	2. $z=\dfrac{x^3}{\sqrt{x-y}}$
13	1. $z=3y^2+4x^2y+\sqrt[3]{xy}$	2. $z=\cos^2(1+xy^3)$
14	1. $z=4x-2xy^5-\cos(x+3y)$	2. $z=\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{y}$
15	1. $z=2x^2y^2-3x^8arctg5y$	2. $z=2^{x\ln y+y}$
16	1. $z=x^3+5x^4y-e^{2x+y}$	2. $z=\ln(xy^2+5\sqrt{x})$
17	1. $z=5y-2x^5y^3+\lg(x+4y)$	2. $z=xy\cos^2 y$

18	1. $z=7xy^4+x-\sqrt[5]{5x-y}$	2. $z=e^{xy}\cdot tg\,\dfrac{y}{x}$
19	1. $z=9x-xy+10^{7xy}$	2. $z=\dfrac{x+\sin x^2}{y}$
20	1. $z=y+3x^2y^7-ctg(7x-y)$	2. $z=\sqrt[5]{x+\sqrt[3]{x^2y}}$
21	1. $z=3xy^9-5x+\ln(y-x)$	2. $z=arcctg\,\dfrac{x+y}{1-xy}$
22	1. $z=2x^3-10xy-\arcsin(xy)$	2. $z=e^{xy^{2-\sqrt{x}}}$
23	1. $z=y^2+3x^6y+e^{2x-3y}$	2. $z=\left(x^2-y\right)^3\cdot\sqrt{y}$
24	1. $z=4xy^2-2x^3-\log_2(4-3x)$	2. $\cos\left(\sqrt[3]{x}y+2x\right)$
25	1. $z=7y^5+3x^3y^4+\sin(2y-x)$	2. $z=\sqrt{x^5}\cdot y^{\ln x}$
26	1. $z=3x-2xe^7-\sqrt[4]{5y-8x}$	2. $z=\ln\left(y-x^4\sqrt{y}\right)$
27	1. $z=5xy+10y^2+arctg(xy)$	2. $z=x^2\cdot\sin\left(x-y^3\right)$
28	1. $z=-y+4x^6y-9^{3x+y}$	2. $z=\dfrac{y-1}{x^2-4y^3}$
29	1. $z=9x^2-3x^4y^5+\ln(x-y)$	2. $z=e^{x+y}\cdot x\cdot\cos^2 y$
30	1. $z=6xy+2y-\cos(3xy)$	2. $z=arctgx^y$

Задание 2. Найти частную производную указанного порядка

1	$z=\sin(xy),\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$	2	$z=xy+\sin(x+y),\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$
3	$z=arctg\,\dfrac{x}{y},\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$	4	$z=x^2\ln(x+y),\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$
5	$z=\ln tg(x+y),\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$	6	$z=x\cdot\sin(xy),\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$
7	$z=2^{xy},\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$	8	$z=y\cdot\cos(xy),\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$
9	$z=xe^{y^2},\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$	10	$z=x^3\sin^2 y,\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$
11	$z=\ln(1+xy^2),\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$	12	$z=e^{x\sqrt{y}},\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$
13	$z=\dfrac{y}{y-x},\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$	14	$z=\dfrac{x+y}{x-y},\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$
15	$z=\cos^2(x-y),\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$	16	$z=\arcsin(xy),\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$
17	$z=\dfrac{\sin x^2}{x+y},\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$	18	$z=5^{x^2+y},\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$
19	$z=(x^2-y^2)^5$	20	$z=\ln(x^3+\sqrt{y}),\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$
21	$z=y^{\ln x},\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$	22	$z=\cos\dfrac{y}{x^2},\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$
23	$z=\sqrt{x}\cdot\ln(x^2+y),\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$	24	$z=e^{x^2+y^2},\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$
25	$z=arcctg(xy),\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$	26	$z=\dfrac{xy^4}{x+2y},\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

27	$z=x^3e^{xy^2}$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$	28	$z=x\ln\left(x+y^2\right)$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$
29	$z=tg(xy)$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$	30	$z=x^{y^2}$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

Полный дифференциал функции двух переменных

Определение. *Полным приращением функции* $z=f(x,y)$ в точке $P(x,y)$ называется разность

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Определение. Функция $z=f(x,y)$ называется *дифференцируемой в точке* $P(x,y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в следующем виде:

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\Delta x,\Delta y) \text{ при } \Delta x\to 0, \Delta y\to 0.$$

Главная часть полного приращения функции Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy, называется *полным дифференциалом функции* $z=f(x,y)$ в точке $P(x,y)$ и обозначается символом dz:

$$dz = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y.$$

Необходимые условия дифференцируемости. Если функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $P(x,y)$, то она имеет в этой точке частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$, причем:

$$f'_x(x,y)=A(x,y); \quad f'_x(x,y)=B(x,y).$$

Доказательство. Так как функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $P(x,y)$, то имеет место соотношение

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\Delta x,\Delta y) \text{ при } \Delta x\to 0, \Delta y\to 0.$$

Рассмотрим два случая.

1. $\Delta x\neq 0,\ \Delta y=0$.

Тогда

$$\Delta z = \Delta_x z = A(x,y)\Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x\to 0.$$

Разделив обе части равенства на Δx и переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(A(x,y)+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right) = A(x,y).$$

Следовательно, в точке $P(x,y)$ существует частная производная

$$f'_x(x,y)=A(x,y).$$

2. $\Delta x=0,\ \Delta y\neq 0$.

Тогда

$$\Delta z = \Delta_y z = B(x,y)\Delta y + o(\Delta y) \text{ при } \Delta y \to 0.$$

Разделив обе части равенства на Δy и переходя к пределу при $\Delta y \to 0$, получим:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\left(B(x,y) + \frac{o(\Delta y)}{\Delta y}\right) = B(x,y).$$

Следовательно, в точке $P(x,y)$ существует частная производная

$$f'_y(x,y) = B(x,y).$$

Таким образом, выражение для полного дифференциала функции $z = f(x,y)$ в точке $P(x,y)$ имеет вид

$$dz = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

Рассматривая полные дифференциалы функций $z=x$ и $z=y$:

$$dz = dx = \frac{\partial(x)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial(x)}{\partial y}\Delta y = \Delta x,$$

$$dz = dy = \frac{\partial(y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial(y)}{\partial y}\Delta y = \Delta y,$$

устанавливаем, что $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$, поэтому

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $z = xe^y$.

Имеем

$$dz = \frac{\partial(xe^y)}{\partial x}dx + \frac{\partial(xe^y)}{\partial y}dy = e^y dx + xe^y dy = e^y(dx + xdy).$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ №2

Найти полный дифференциал функции

1	$z = y \cdot x^y$	2	$z = arctg\,\frac{y}{x}$
3	$z = (x+y)e^{xy}$	4	$z = \ln\left(x + \sqrt{y}\right)$
5	$z = \frac{x+y}{x-y}$	6	$z = \arcsin\,\frac{x}{y}$
7	$z = x\sin^2 y$	8	$z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

9	$z = y^{\ln x}$	10	$z = arcctg\sqrt{xy}$
11	$z = e^{\frac{x}{y}}$	12	$z = \cos\dfrac{x}{\sqrt{y}}$
13	$z = \sin\dfrac{y}{x}$	14	$z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3y}}$
15	$z = \sqrt[3]{\dfrac{xy}{x+y}}$	16	$z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$
17	$z = tg\dfrac{y}{1+x^2}$	18	$z = \arccos\left(x^2 y\right)$
19	$z = 2^{xy^2}$	20	$z = \sin^2\left(x^3 - 3y\right)$
21	$z = x^5 y^4 + \sqrt{xy}$	22	$z = \dfrac{x-y}{x^2 + y^2}$
23	$z = \sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$	24	$z = x \cdot y^x$
25	$z = \ln\left(y - \sqrt{x^2 + y}\right)$	26	$z = 3^{y^2\sqrt{x}}$
27	$z = ctg\dfrac{x^3}{1-y}$	28	$z = arctg\dfrac{y-1}{x}$
29	$z = x^2 \cdot \cos^3 y$	30	$z = \sqrt{x \cdot \sin y}$

Практическое занятие №8. Экстремумы функции двух переменных. (2ч.)

Пусть функция $f(P) = f(x, y)$ определена в некоторой δ-окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$. Обозначим эту окрестность через $U(P_0, \delta)$. Проколотую δ-окрестность точки $P_0(x_0, y_0)$ обозначим через $\dot{U}(P_0, \delta)$.

Определение. Точка $P_0(x_0,y_0)$ называется *точкой локального максимума (минимума)* функции $f(P)$, если для $\forall P\in\dot{U}(P_0,\delta)$ выполняется неравенство $f(P)<f(P_0)$ $(f(P)>f(P_0))$.

Локальный максимум и локальный минимум объединяются общим названием *локальный экстремум.*

Необходимое условие локального экстремума. В точке локального экстремума частные производные первого порядка, если они существуют, равны нулю или хотя бы одна из них не существует.

Определение. Точки, в которых первые частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ функции $z=f(x,y)$ обращаются в нуль или не существуют, называются *критическими точками* или *точками возможного экстремума*.

Из изложенного выше следует, что точки экстремума функции следует искать среди ее критических точек. Однако существуют критические точки, не являющиеся точками экстремума.

Рассмотрим, например, функцию $z=xy$. Первые частные производные этой функции $f'_x(x,y)=y$ и $f'_y(x,y)=x$ обращаются в нуль в точке $O(0;0)$, следовательно, эта точка является критической. Однако экстремума в ней функция $z=xy$ не имеет. В самом деле, $z(0;0)=0$, но в любой окрестности точки $O(0;0)$ имеются как положительные (в точках, принадлежащих I и III четвертям), так и отрицательные (в точках, принадлежащих II и IV четвертям) значения функции z.

Судить о том, будет данная критическая точка точкой экстремума функции $z=f(x,y)$ или нет, можно на основании достаточного условия экстремума.

Достаточное условие локального экстремума (без доказательства). Пусть в критической точке $P_0(x_0,y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. Обозначим:

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0);\;\; B=f''_{xy}(x_0,y_0);\;\; C=f''_{yy}(x_0,y_0).$$

Тогда:

1. Если $B^2-AC<0$, то функция $z=f(x,y)$ имеет в точке $P_0(x_0,y_0)$ экстремум: максимум при $A<0$ и $C<0$ и минимум при $A>0$ и $C>0$.

2. Если $B^2-AC>0$, то в точке $P_0(x_0,y_0)$ экстремума нет.

3. Если $B^2-AC=0$, то в точке $P_0(x_0,y_0)$ экстремум может быть, а может и не быть. Требуется дополнительное исследование.

Приведем *схему* исследования функции двух переменных $z=f(x,y)$ на экстремум:

1. Находим первые частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ функции $z=f(x,y)$ и определяем критические точки как точки, в которых эти

производные равны нулю или не существуют. (Критические точки должны принадлежать области определения функции $z = f(x, y)$).

2. Каждую критическую точку исследуем с помощью достаточного условия локального экстремума.

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y.$$

1. Находим первые частные производные:

$$f'_x(x, y) = 2x + y - 2; \quad f'_y(x, y) = x + 2y - 3.$$

Точек, в которых они не существуют, в данном случае нет. Поэтому критические точки определяем как точки, в которых первые частные производные равны нулю. Для этого составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Ее решение $x = 1/3; \; y = 4/3$ определяет критическую точку $P_0(1/3; 4/3)$, принадлежащую области определения функции $D = R^2$.

2. Для исследования критической точки $P_0(1/3; 4/3)$ применим достаточное условие локального экстремума. Вычислим в ней вторые частные производные:

$$A = f''_{xx}(1/3; 4/3) = 2; \quad B = f''_{xy}(1/3; 4/3) = 1; \quad C = f''_{yy}(1/3; 4/3) = 2.$$

Так как $B^2 - AC = -3 < 0$ и $A = 2 > 0$, $C = 2 > 0$, то в точке $P_0(1/3; 4/3)$ данная функция имеет минимум:

$$z_{\min} = z(1/3; 4/3) = -7/3.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Найти экстремумы функции

1	$z = (x-1)^2 + 2y^2$	2	$z = \dfrac{x^2}{2} + y^2 + x - 2y + \dfrac{11}{2}$
3	$z = -4x^2 - 3y^2 - 16x + 2y + 3\dfrac{2}{3}$	4	$z = x^2 + y^2 - x + 6y + \dfrac{37}{4}$
5	$z = 2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 13$	6	$z = x^2 + y^2 - 4x - \dfrac{4}{3}y + \dfrac{103}{9}$
7	$z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$	8	$z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$
9	$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$	10	$z = -3x^2 + xy + y^2 - x + y$

11	$z=-x^2+\frac{1}{2}xy+y^2+x+y+7$	12	$z=x^2-xy+y^2-x-\frac{y}{2}-1$
13	$z=\frac{x^2}{3}-xy+6y^2-3y-1$	14	$z=-3x^2+2xy+y^2+2x-y$
15	$z=2x^2+xy+\frac{y^2}{3}-2x+y-\frac{1}{2}$	16	$z=x^2-xy+3y^2-6x-2y-1$
17	$z=5x^2+2xy+3y^2+6x-4y$	18	$z=4x^2-5xy+2y^2+4x-3y+7$
19	$z=12x^2+6xy+y^2+7x-5y+1$	20	$z=-x^2+xy+10y^2-5y+7$
21	$z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$	22	$z=x^3+y^3-15xy$
23	$z=2x^2+y^2-2xy+2x+5$	24	$z=x^2+xy+y^2-3x-6y$
25	$z=1+6x-x^2-xy-y^2$	26	$z=\frac{xy}{2}+(47-x-y)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)$
27	$z=xy^2(1-x-y)$	28	$z=e^{2x}\left(x+y^2+2y\right)$
29	$z=4-\left(x^2+y^2\right)^{\frac{2}{3}}$	30	$z=\left(x^2+y^2\right)\left(e^{-\left(x^2+y^2\right)}-1\right)$

Практическое занятие №9. Понятие неопределенного интеграла: свойства, таблица основных неопределённых интегралов. Метод непосредственного интегрирования. (2ч.)

Первообразная функция

В дифференциальном исчислении по заданной функции $f(x)$ приходилось отыскивать ее производную $f'(x)$.

В интегральном исчислении рассматривается обратная задача: по заданной функции $f(x)$ восстановить такую функцию $F(x)$, для которой $f(x)$ была бы производной, т.е. $F'(x)=f(x)$.

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной (функцией)* для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если для всех значений x из этого интервала выполняется равенство

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a,b).$$

Примеры

1) Функция $F(x)=\sin x$ является первообразной для функции $f(x)=\cos x$ на всей числовой прямой, так как при любом значении $x \in (-\infty, +\infty)$ выполняется равенство $(\sin x)' = \cos x$.

2) Функция $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ является первообразной для функции $f(x)=-x/\sqrt{1-x^2}$ на интервале $(-1;1)$, так как в любой точке x этого интервала $\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -x/\sqrt{1-x^2}$.

Однако задача отыскания по данной функции $f(x)$ её первообразной решается неоднозначно. Действительно, если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$, то функция $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$, так как $(F(x)+C)' = f(x)$ для любого числа C.

Например, для $f(x)=\cos x$ первообразной является не только $\sin x$, но и функция $\sin x + C$, так как $(\sin x + C)' = \cos x$.

Возникает вопрос: если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для одной и той же функции $f(x)$, то всегда ли они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое? Оказывается, что это действительно так.

Теорема 1.1. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то $F_2(x)=F_1(x)+C$, где C – некоторая постоянная.

Следствие. Все первообразные для функции $f(x)$ на интервале (a,b) даются формулой $F(x)+C$, где $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$, а C – произвольная постоянная.

Неопределенный интеграл

Определение. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на интервале (a,b) называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, а переменная x – *переменной интегрирования*.

Нахождение первообразных для функции $f(x)$ называется *интегрированием* функции $f(x)$.

Отметим, что подынтегральное выражение является дифференциалом первообразной:

$$f(x)dx = F'(x)dx = dF(x).$$

Примеры

1) $\int \cos x dx = \sin x + C$, так как $(\sin x + C)' = \cos x$.

2) $\int 2x dx = x^2 + C$, так как $(x^2 + C)' = 2x$.

Теорема 1.2. Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b), то для неё существует первообразная на (a,b), а следовательно, и неопределенный интеграл.

Основные свойства неопределенного интеграла

Свойство 1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \quad \text{и} \quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx.$$

Свойство 2. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Свойство 3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx.$$

Свойство 4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Отметим, что данное свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых функций.

Таблица основных интегралов

Приведем таблицу основных интегралов, которая непосредственно следует из определения интегрирования как операции, обратной дифференцированию, и таблицы производных. Справедливость всех формул легко проверить дифференцированием первообразных. Интегралы, содержащиеся в этой (или подобной ей) таблице, принято называть *табличными.*

Таблица интегралов в силу инвариантности формы дифференциала функции оказывается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования u независимой переменной $(u = x)$ или любой её дифференцируемой функцией ($u = u(x)$).

1. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad (\alpha \neq -1); \qquad \int du = u + C$.
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$.
3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad (a > 0, a \neq 1); \quad \int e^u du = e^u + C$.
4. $\int \sin u du = -\cos u + C$.
5. $\int \cos u du = \sin u + C$.
6. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$.
7. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$.
8. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C, \quad (a \neq 0)$.
9. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$.
10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$.
11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$.
12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$.
13. $\int shudu = chu + C$.
14. $\int chudu = shu + C$.
15. $\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C$.
16. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C$.

Отметим, что если операция дифференцирования элементарных функций снова приводит к элементарным функциям, то операция интегрирования уже может привести к неэлементарным функциям, т.е. функциям, которые не выражаются через конечное число арифметических операций и суперпозиций элементарных функций.

Например, доказано, что следующие интегралы хотя и существуют, но не являются элементарными функциями:

$\int e^{-x^2}dx$ – интеграл Пуассона;

$\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм;

$\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx$ – интегралы Френеля.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Морозова, А.В. Высшая математика: учебное пособие в 4 ч. Ч. 3. Интегральное исчисление / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2011. – 138 с. Библиогр.: 7 назв. ***Задание 9.1.*** (стр.90-96).

Практическое занятие №10. Основные методы интегрирования: замена переменной. (2ч.)

Метод, позволяющий с помощью введения новой переменной интегрирования свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла, называется *методом подстановки или методом замены переменной.*

Метод основан на следующей теореме.

Теорема 1.3. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором множестве T и пусть X – множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива *формула замены переменной в неопределенном интеграле:*

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\,.$$

Пример

$$\int \sqrt{x-2}dx = \begin{vmatrix} x = t+2;\ t = x-2 \\ dx = dt \end{vmatrix} = \int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}(x-2)^{3/2} + C\,.$$

Иногда формулу замены переменной полезно применять справа налево:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt\Big|_{t=\varphi(x)}.$$

Пример

$$\int e^{\sin x}\cos x dx = \begin{vmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{vmatrix} = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C\,.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Морозова, А.В. Высшая математика: учебное пособие в 4 ч. Ч. 3. Интегральное исчисление / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2011. – 138 с. Библиогр.: 7 назв. ***Задание 9.1.*** (стр.90-96).

Практическое занятие №11. Основные методы интегрирования: интегрирование по частям. (2ч.)

Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы дифференцирования произведения двух функций.

Теорема 1.4. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на некотором промежутке X и пусть функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на этом промежутке. Тогда на промежутке X функция $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную и справедлива *формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле:*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Замечание. Так как $u'(x)dx = du,\ v'(x)dx = dv$, то формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле можно записать в виде

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Пример

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos x dx}_{dv} = \left| \begin{matrix} u = x;\ dv = \cos x dx \\ du = dx;\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{matrix} \right| = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Замечание. Формула интегрирования по частям может применяться неоднократно.

Пример

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^x dx}_{dv} = \left| \begin{matrix} u = x^2;\ dv = e^x dx \\ du = 2xdx;\ v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right| = x^2e^x - 2\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x dx}_{dv} = \left| \begin{matrix} u = x;\ dv = e^x dx \\ du = dx;\ v = e^x \end{matrix} \right| =$$

$$= x^2e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Морозова, А.В. Высшая математика: учебное пособие в 4 ч. Ч. 3. Интегральное исчисление / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2011. – 138 с. Библиогр.: 7 назв. ***Задание 9.1.*** (стр.97-99).

Практическое занятие №12. Вычисление определенного интеграла. (2ч.)

Формула Ньютона – Лейбница

Эта формула дает способ вычисления определенного интеграла через первообразную от подынтегральной функции, не прибегая к составлению интегральной суммы и к вычислению ее предела.

Теорема 2.3. Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная от непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$, то справедлива *формула Ньютона – Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 2.4. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a,b]$. Тогда, если: 1) функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$ и $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$; 2) множеством значений функции $x=\varphi(t)$ является отрезок $[a,b]$; 3) $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$, то справедлива *формула замены переменной в определенном интеграле*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Пример

$$\int_0^1 \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t;\ dx = a\cos t dt; \\ t = \arcsin\dfrac{x}{a}; \\ \alpha = \arcsin 0 = 0;\ \beta = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t dt =$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \cdot d(2t) \right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\sin 0\right)\right] = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 2.5. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, то справедлива *формула интегрирования по частям в определенном интеграле:*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du\,.$$

Пример.

$$\int_1^e \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x;\ dv = dx; \\ du = \dfrac{dx}{x};\ v = x \end{matrix} \right| = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{dx}{x} = (x\ln x - x)\Big|_1^e = (e\ln e - e) - (1\cdot\ln 1 - 1) = 1.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Морозова, А.В. Высшая математика: учебное пособие в 4 ч. Ч. 3. Интегральное исчисление / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2011. – 138 с. Библиогр.: 7 назв. ***Задание 9.1.*** (стр.116-120)

Практическое занятие №13. Дифференциальные уравнения первого порядка. (2ч.)

Определение. Уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0,$$

где x – независимая переменная, y – искомая функция, y' – ее производная, называется *дифференциальным уравнением первого порядка.*

Если это уравнение можно разрешить относительно y', то оно принимает вид

$$y' = f(x, y) \text{ или } \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

и называется *уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.*

Будем рассматривать именно такие уравнения и, вообще говоря, считать, что переменные x и y в нем равноправны, т.е. каждую из них можно рассматривать как функцию другой.

Пример

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}.$$

Определение. *Общим решением дифференциального уравнения* первого порядка называется семейство функций

$$y = \varphi(x, C),$$

обращающих дифференциальное уравнение в тождество при любом значении произвольной постоянной C.

Определение. *Общим интегралом* дифференциального уравнения первого порядка называется семейство функций

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

обращающих дифференциальное уравнение в тождество при любом значении произвольной постоянной *C*.

Определение. *Частным решением* дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция

$$y = \varphi(x, C_0),$$

получаемая из общего решения при задании определенного значения $C = C_0$ произвольной постоянной *C*.

Определение. *Частным интегралом* дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция

$$\Phi(x, y, C_0) = 0,$$

получаемая из общего интеграла при задании определенного значения $C = C_0$ произвольной постоянной *C*.

Пример. Уравнение $y' = 2x$ имеет общее решение $y = x^2 + C$ и частное решение $y = x^2 + 1$ при $C = 1$.

Действительно, подстановка $y = x^2 + C$ в исходное уравнение $y' = 2x$ дает

$$y' = (x^2 + C)' = (x^2)' + C' = 2x,$$

т.е. тождество $2x = 2x$ при любом значении произвольной постоянной *C*.

Геометрически общее решение $y = \varphi(x, C)$ представляет собой однопараметрическое (*C* – параметр) семейство кривых на плоскости *Oxy*. Эти кривые называются *интегральными кривыми* данного дифференциального уравнения, причем частному решению $y = \varphi(x, C_0)$ соответствует одна кривая этого семейства при значении параметра $C = C_0$.

Определение. Условие, что при $x = x_0$ функция $y(x)$ должна равняться заданному числу y_0, называется *начальным условием*:

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{или} \quad y\big|_{x=x_0} = y_0.$$

Определение. Задача, в которой требуется найти частное решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши* или *начальной задачей* для дифференциального уравнения первого порядка.

С геометрической точки зрения решить задачу Коши – значит из множества интегральных кривых выделить ту, которая проходит через заданную точку (x_0, y_0) плоскости *Oxy*.

Ответ на вопрос о том, при каких условиях, налагаемых на функцию $f(x, y)$, задача Коши имеет решение, дает теорема Коши, которая называется *теоремой существования и единственности решения* дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$.

Теорема 4.1 (теорема Коши) (без доказательства). Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой области *D* плоскости *Oxy*, то, какова бы ни была внутренняя точка (x_0, y_0) области D, в некоторой окрестности этой точки существует единственное решение $y = \varphi(x)$ данного уравнения, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Геометрически теорема Коши утверждает, что через каждую внутреннюю точку (x_0, y_0) области D проходит единственная интегральная кривая.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = 2x$.

Данное уравнение удовлетворяет условиям теоремы Коши на всей плоскости Oxy, так как функция $f(x, y) = 2x$ и $f'_y(x, y) = (2x)'_y = 0$ определены и непрерывны на всей плоскости Oxy. Легко проверить (см. предыдущий пример), что функция $y = x^2 + C$, где C – произвольная постоянная, является общим решением данного уравнения на всей плоскости Oxy $(D = R^2)$.

Геометрически (рис. 4.1) это общее решение представляет собой семейство парабол.

Для решения какой-нибудь задачи Коши, т.е. отыскания частного решения, зададим конкретное начальное условие: $y(0) = -1$.

Подставляя эти значения $x_0 = 0, y_0 = -1$ в общее решение $y = x^2 + C$, получаем $-1 = 0^2 + C$, откуда $C = -1$.

Таким образом, найдено частное решение (решение задачи Коши) $y = x^2 - 1$. Геометрически это означает, что из семейства интегральных кривых – парабол $y = x^2 + C$ – выбрана одна $y = x^2 - 1$, проходящая через точку (0;-1) (рис. 4.1).

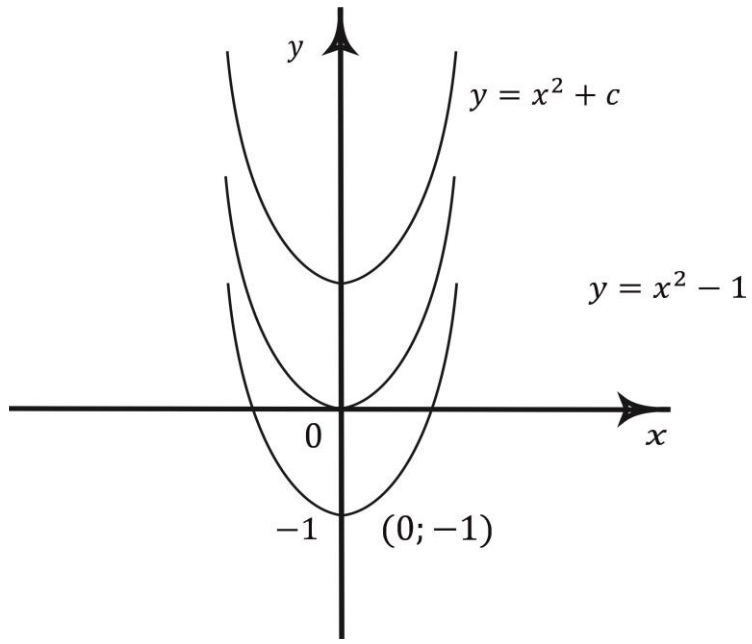


Рис. 4.1. Геометрический смысл общего и частного решений уравнения $y' = 2x$

Определение. Точки плоскости, в которых не выполняются условия теоремы существования и единственности решения, называются *особыми точками* дифференциального уравнения.

Если график некоторого решения (интегральная кривая) сплошь состоит из особых точек, то решение называется *особым*.

Особое решение не может быть получено из общего решения ни при каких значениях произвольной постоянной *C*.

<u>Уравнение с разделяющимися переменными</u>

Определение. *Уравнением с разделяющимися переменными* называется дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0,$$

где $M_1(x), M_2(x), N_1(y), N_2(y)$ – заданные функции своих переменных.

Метод решения. Разделив обе части уравнения на $M_2(x)N_1(y)$ и почленно взяв квадратуры (проинтегрировав), получим общий интеграл уравнения:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy;$$

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy + C = 0.$$

Замечание. Прямые $x = x_0$ и $y = y_0$ будут интегральными кривыми уравнения с разделяющимися переменными, если x_0 и y_0 являются соответственно корнями уравнений $M_2(x) = 0$ и $N_1(y) = 0$.

Пример. Решить уравнение

$$(x+1)(y+2)dx + xdy = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $x(y+2)$ и получим общий интеграл уравнения:

$$\frac{x+1}{x}dx = -\frac{1}{y+2}dy;$$

$$\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx + \int\frac{dy}{y+2} + C = 0;$$

$$x + \ln|x| + \ln|y+2| + C = 0.$$

Так как прямые $x = 0$ и $y = -2$ обращают выражение $x(y+2)$ в нуль, то они также будут решениями.

<u>Однородное уравнение</u>

Определение. *Однородным уравнением первого порядка* называется дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Метод решения. С помощью подстановки $u = \frac{y}{x}$ однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными по отношению к новой неизвестной функции $u = u(x)$:

$$u = \frac{y}{x};\; y = xu;\; \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx};$$

$$u + x\frac{du}{dx} = f(u); x\frac{du}{dx} = f(u) - u; \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Беря квадратуры от обеих частей уравнения, получим общий интеграл:

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C; \quad \int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + C.$$

Определив из последнего уравнения функцию $u(x)$, находят общее решение исходного однородного уравнения $y(x) = xu(x)$.

Пример. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Используя подстановку $u = \frac{y}{x}$, находим общий интеграл:

$$u = \frac{y}{x};\; y = xu;\; \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx};$$

$$u + x\frac{du}{dx} = e^u + u;\; x\frac{du}{dx} = e^u;\; e^{-u}du = \frac{dx}{x};$$

$$\int e^{-u}du = \int \frac{dx}{x} + C;\; -e^{-u} = \ln|x| + C;\; e^{-u} + \ln|x| + C = 0;$$

$$e^{-\frac{y}{x}} + \ln|x| + C = 0.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Морозова, А.В. Высшая математика: учебное пособие в 4 ч. Ч. 3. Интегральное исчисление / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2011. – 138 с. Библиогр.: 7 назв. ***Задание 9.2.*** (стр.127-129).

Практическое занятие №14. Дифференциальные уравнения первого порядка. (2ч.)

Линейное уравнение

Определение. *Линейным уравнением первого порядка* называется дифференциальное уравнение первого порядка, линейное относительно неизвестной функции y и ее производной y':

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где $p(x)$ *и* $q(x)$ – заданные функции.

Метод решения. С помощью подстановки $y = uv$, где $u(x)$ и $v(x)$– две неизвестные функции, уравнение преобразуется к виду

$$u[v' + p(x)v] + u'v = q(x)$$

и сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно каждой из неизвестных функций u и v:

$$1)\ v' + p(x)v = 0;\ 2)\ u'v = q(x).$$

Из первого уравнения определяем $v(x)$ и, подставляя его во второе уравнение, определяем $u(x)$, после чего находим общее решение $y(x) = u(x)v(x)$ исходного линейного уравнения. При этом при решении первого уравнения полагаем аддитивную постоянную C равной нулю.

Пример. Решить уравнение

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2.$$

Используя подстановку $y = uv$, находим общее решение:

$$y = uv;\ y' = u'v + uv';$$

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = x^2;\ u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) + u'v = x^2;$$

$$1)\ v' - \frac{1}{x}v = 0;\ v' = \frac{1}{x}v;\ \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x};\ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x};\ \int\frac{dv}{v} = \int\frac{dx}{x};\ \ln|v| = \ln|x|;\ (C = 0);\ \ v(x) = x;$$

$$2)\ u'v = x^2;\ u'x = x^2;\ \frac{du}{dx} = x;\ du = xdx;\ \int du = \int xdx + C;\ \ u(x) = \frac{x^2}{2} + C;$$

$$y(x) = u(x)v(x);\ y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)x;\ y(x) = \frac{x^3}{2} + Cx.$$

Уравнение Бернулли

Определение. *Уравнением Бернулли* называется дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,\ \ (n \neq 0, n \neq 1),$$

где $p(x)$ *и* $q(x)$ – заданные функции.

Метод решения. С помощью подстановки $y = uv$, где $u(x)$ и $v(x)$ – две неизвестные функции, уравнение преобразуется к виду

$$u[v' + p(x)v] + u'v = q(x)u^n v^n$$

и сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно каждой из неизвестных функций u и v:

$$1)\ v' + p(x)v = 0\,;\ 2)\ u' = q(x)u^n v^{n-1}\,.$$

Из первого уравнения определяем $v(x)$ и, подставляя его во второе уравнение, определяем $u(x)$, после чего находим общее решение $y(x) = u(x)v(x)$ исходного уравнения Бернулли. При этом при решении первого уравнения полагаем аддитивную постоянную C равной нулю.

Пример. Решить уравнение

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2\frac{1}{y}\,.$$

Используя подстановку $y = uv$, находим общее решение:

$$y = uv;\ y' = u'v + uv';$$

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = x^2\frac{1}{uv};\ u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) + u'v = \frac{x^2}{uv};$$

$$1)\ v' - \frac{1}{x}v = 0;\ v' = \frac{1}{x}v;\ \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x};\ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x};\ \int\frac{dv}{v} = \int\frac{dx}{x};\ \ln|v| = \ln|x|;\ (C = 0);\ \ v(x) = x;$$

$$2)\ u'v = \frac{x^2}{uv};\ u'x = \frac{x^2}{uv};\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{u};\ udu = dx;\ \int udu = \int dx + C;\ \ u(x) = \sqrt{2x + C};$$

$$y(x) = u(x)v(x);\ y(x) = x\sqrt{2x + C}\,.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Морозова, А.В. Высшая математика: учебное пособие в 4 ч. Ч. 3. Интегральное исчисление / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2011. – 138 с. Библиогр.: 7 назв. ***Задание 9.2.*** (стр.130-132).

Практическое занятие №15. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. (2ч.)

Линейное однородное дифференциальное уравнение высшего порядка с постоянными коэффициентами

Определение. *Линейным однородным дифференциальным уравнением высшего (n-го) порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – заданные действительные числа.

Метод решения. Согласно теореме 4.3 общим решением $y_0(x)$ на отрезке $[a,b]$ линейного однородного дифференциального уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами является линейная комбинация

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

– линейно независимых на том же отрезке частных решений этого уравнения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$.

Для их нахождения составляется и решается *характеристическое уравнение*

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0,$$

получаемое заменой в исходном дифференциальном уравнении производных $y^{(m)}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$ искомой функции степенями k^m, причем сама функция $y = y^{(0)}$ заменяется единицей. Характеристическое уравнение – это алгебраическое уравнение степени n.

Каждому из n корней характеристического уравнения соответствует одно из n линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения, причем:

– каждому действительному простому корню k соответствует частное решение вида

e^{kx};

– каждому действительному корню k кратности α соответствуют α частных решений вида

$e^{kx}, xe^{kx}, x^2 e^{kx}, \ldots, x^{\alpha-1} e^{kx}$;

– каждой паре комплексных сопряженных простых корней $k_1 = \gamma + i\delta$ и $k_2 = \gamma - i\delta$ соответствует два частных решения вида

$e^{\gamma x} \cos \delta x, e^{\gamma x} \sin \delta x$;

– каждой паре комплексных сопряженных корней $k_1 = \gamma + i\delta$ и $k_2 = \gamma - i\delta$ кратности α соответствуют 2α частных решений вида

$e^{\gamma x} \cos \delta x,\ xe^{\gamma x} \cos \delta x,\ x^2 e^{\gamma x} \cos \delta x, \ldots, x^{\alpha-1} e^{\gamma x} \cos \delta x,$

$e^{\gamma x} \sin \delta x,\ xe^{\gamma x} \sin \delta x,\ x^2 e^{\gamma x} \sin \delta x, \ldots, x^{\alpha-1} e^{\gamma x} \sin \delta x$.

Составляя линейную комбинацию из найденных частных решений, получаем общее решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами.

Примеры:

1) найти общее решение однородного дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Характеристическое уравнение и его решения:

$k^2 - 3k + 2 = 0;$ $k_1 = 1, k_2 = 2$ – два действительных простых корня.

Частные решения однородного дифференциального уравнения:

$$y_1(x)=e^{k_1x}=e^x;\ y_2(x)=e^{k_2x}=e^{2x}.$$

Общее решение исходного однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией полученных частных решений:

$$y_0(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=C_1e^x+C_2e^{2x};$$

2) найти общее решение однородного дифференциального уравнения

$$y''-4y'+4y=0.$$

Характеристическое уравнение и его решения:

$k^2-4k+4=0;\ \ k_1=k_2=k=2$ – двукратный действительный корень.

Частные решения однородного дифференциального уравнения:

$$y_1(x)=e^{kx}=e^{2x};\ y_2(x)=xe^{kx}=xe^{2x}.$$

Общее решение исходного однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией полученных частных решений:

$$y_0(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}=(C_1+C_2x)e^{2x};$$

3) найти общее решение однородного дифференциального уравнения

$$y''-2y'+5y=0.$$

Характеристическое уравнение и его решения:

$k^2-2k+5=0;\ \ k_1=1+2i,\ k_2=1-2i$ – пара комплексно сопряженных простых корней $(\gamma=1;\delta=2)$.

Частные решения однородного дифференциального уравнения:

$$y_1(x)=e^{\gamma x}\cos\delta x=e^x\cos 2x;\ y_2(x)=e^{\gamma x}\sin\delta x=e^x\sin 2x.$$

Общее решение исходного однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией полученных частных решений:

$$y_0(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=C_1e^x\cos 2x+C_2e^x\sin 2x=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^x;$$

4) найти общее решение однородного дифференциального уравнения

$$y^{(4)}+2y^{(2)}+y=0.$$

Характеристическое уравнение и его решения:

$k^4+2k^2+1=0;(k^2+1)^2=0;\ k_1=k_2=i;k_3=k_4=-i$ – двукратные комплексно сопряженные корни $(\gamma=0;\delta=1)$.

Частные решения однородного дифференциального уравнения:

$$y_1(x)=e^{\gamma x}\cos\delta x=\cos x;\ y_2(x)=xe^{\gamma x}\cos\delta x=x\cos x;$$

$$y_3(x)=e^{\gamma x}\sin\delta x=\sin x;\ y_4(x)=xe^{\gamma x}\sin\delta x=x\sin x.$$

Общее решение исходного однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией полученных частных решений:

$$y_0(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+C_3y_3(x)+C_4y_4(x)=$$

$$=C_1\cos x+C_2x\cos x+C_3\sin x+C_4x\sin x=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x).$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Морозова, А.В. Высшая математика: учебное пособие в 4 ч. Ч. 3. Интегральное исчисление / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2011. – 138 с. Библиогр.: 7 назв. ***Задание 9.2.*** (стр.136).

Практическое занятие №16. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. (2ч.)

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение высшего порядка с постоянными коэффициентами

Определение. *Линейным неоднородным дифференциальным уравнением высшего (n-го) порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – заданные действительные числа, а $f(x)$ – заданная функция.

Метод решения. Согласно теореме 4.4 общим решением $y(x)$ на отрезке $[a, b]$ линейного неоднородного дифференциального уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами и непрерывной правой частью $f(x)$ является сумма общего решения

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0$$

и какого-нибудь частного решения $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения:

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x).$$

Общее решение однородного уравнения находить уже умеем, поэтому остается рассмотреть вопрос о нахождении частного решения $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения.

Если правая часть неоднородного уравнения, т.е. функция $f(x)$ – многочлен либо показательная функция, либо тригонометрические функции $\cos\delta x$ или $\sin\delta x$, либо линейная комбинация перечисленных функций, то частное решение $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения может быть найдено методом неопределенных коэффициентов.

Если же правая часть неоднородного уравнения есть произвольная непрерывная функция, то частное решение $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения может быть найдено методом вариации произвольных постоянных.

Рассмотрим оба перечисленных метода нахождения частного решения $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения.

Метод неопределенных коэффициентов

Пусть правая часть неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$f(x) = e^{\gamma x}[P_l(x)\cos\delta x + Q_m(x)\sin\delta x],$$

где γ и δ – действительные постоянные, $P_l(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены от x соответственно l-й и m-й степени.

Тогда частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$\tilde{y}(x) = x^{\alpha}e^{\gamma x}[U_s(x)\cos\delta x + V_s(x)\sin\delta x].$$

Здесь α равно показателю кратности корня $k = \gamma \pm i\delta$ в характеристическом уравнении

$$k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0.$$

Если характеристическое уравнение такого корня не имеет, то следует положить $\alpha = 0$.

$U_s(x)$ и $V_s(x)$ – *полные* (т.е. содержащие все степени x от 0 до s) многочлены от x степени s с неопределенными коэффициентами, причем s равно наибольшему из чисел l и m:

$$U_s(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_{s-1}x + A_s,$$

$$V_s(x) = B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ldots + B_{s-1}x + B_s.$$

Если в выражение функции $f(x)$ входит хотя бы одна из функций $\cos\delta x$ или $\sin\delta x$, то в решение $\tilde{y}(x)$ надо всегда вводить *обе* эти функции.

Неопределенные коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_{s-1}, A_s, B_0, B_1, \ldots, B_s$ находятся из системы линейных алгебраических уравнений, получаемых отождествлением коэффициентов подобных членов в правой и левой частях исходного линейного неоднородного дифференциального уравнения после подстановки в него $\tilde{y}(x)$ вместо y, $\tilde{y}'(x)$ вместо y', $\tilde{y}''(x)$ вместо y'' и т.д.

Если правая часть исходного дифференциального уравнения есть сумма нескольких функций рассматриваемой структуры:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x),$$

и $\tilde{y}_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ – соответствующие решения уравнений

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f_i(x),$$

то сумма

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) + \ldots + \tilde{y}_m(x),$$

как легко установить, является частным решением исходного уравнения (*принцип наложения решений*).

Пример. Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' - 4y' + 3y = 2e^x - 65\cos 2x.$$

Решение данного неоднородного уравнения производится в три этапа:

1) сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' - 4y' + 3y = 0 .$$

Для этого составляем и решаем характеристическое уравнение:

$k^2 - 4k + 3 = 0;\;\; k_1 = 1, k_2 = 3 -$ два действительных простых корня.

Частные решения однородного дифференциального уравнения:

$$y_1(x) = e^{k_1 x} = e^x;\;\; y_2(x) = e^{k_2 x} = e^{3x}.$$

Общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией полученных частных решений:

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x};$$

2) далее ищем частное решение исходного неоднородного уравнения в виде

$$\tilde{y}(x) = Axe^x + B\sin 2x + C\cos 2x,$$

так как характеристическое уравнение имеет корень $k_1 = \gamma = 1 \;\; (\delta = 0)$, а также согласно принципу наложения решений для правых частей $f_1(x) = 2e^{2x};\; f_2(x) = -65\cos 2x$.

Для определения коэффициентов A, B, C находим производные $\tilde{y}'(x)$ и $\tilde{y}''(x)$:

$$\tilde{y}'(x) = Axe^x + Ae^x + 2B\cos 2x - 2C\sin 2x;$$

$$\tilde{y}''(x) = Axe^x + 2Ae^x - 4B\sin 2x - 4C\cos 2x$$

и подставляем их в исходное неоднородное уравнение:

$$(Axe^x + 2Ae^x - 4B\sin 2x - 4C\cos 2x) - 4(Axe^x + Ae^x + 2B\cos 2x - 2C\sin 2x) +$$

$$+ 3(Axe^x + B\sin 2x + C\cos 2x) = 2e^x - 65\cos 2x.$$

Раскроем скобки и приведем подобные в левой части равенства:

$$(-2A)e^x + (-B + 8C)\sin 2x + (-8B - C)\cos 2x = 2e^x + 0\cdot\sin 2x - 65\cos 2x .$$

Приравнивая коэффициенты у подобных членов из обеих частей равенства, получим систему уравнений для определения коэффициентов A, B, C и найдем их значения:

$$\begin{cases} -2A = 2, \\ -B + 8C = 0, \\ -8B - C = -65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 8, \\ C = 1. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$\tilde{y}(x) = -xe^x + 8\sin 2x + \cos 2x;$$

3) общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения найдем как сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - xe^x + 8\sin 2x + \cos 2x .$$

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$$

можно найти методом вариации произвольных постоянных, если известно общее решение

$$y_0(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)$$

соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0\,.$$

Именно будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$\tilde{y}(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+\ldots+C_n(x)y_n(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i(x)\,,$$

где $C_1(x),C_2(x),\ldots,C_n(x)$ – неизвестные функции, для определения которых нужно составить систему из n линейных неоднородных алгебраических уравнений для определения производных от n неизвестных функций $C_1'(x),C_2'(x),\ldots,C_n'(x)$:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i(x)=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i'(x)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \sum\limits_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i'^{(n-2)}(x)=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)=f(x).\end{cases}$$

Примем без доказательства, что определитель системы отличен от нуля. Тогда система имеет единственное решение $C_1'(x),C_2'(x),\ldots,C_n'(x)$. Определив все $C_i'(x)=\varphi_i(x)$, после интегрирования получаем

$$C_i(x)=\int\varphi_i(x)dx,\quad i=1,2,\ldots,n.,$$

Следовательно, частное решение исходного линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$\tilde{y}(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+\ldots+C_n(x)y_n(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i(x)\,,$$

где функции $C_1(x),C_2(x),\ldots,C_n(x)$ определяются полученными равенствами, а $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ – известные линейно независимые частные решения соответствующего однородного уравнения.

Пример. Найти частное решение неоднородного дифференциального уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}:$$

1) сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + y = 0.$$

Для этого составляем и решаем характеристическое уравнение:

$k^2 + 1 = 0$; $k_1 = i, k_2 = -i$ – пара комплексно сопряженных простых корней $(\gamma = 0; \delta = 1)$.

Частные решения соответствующего однородного дифференциального уравнения:

$$y_1(x) = e^{\gamma x}\cos\delta x = \cos x;\ y_2(x) = e^{\gamma x}\sin\delta x = \sin x.$$

Общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией полученных частных решений:

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1\cos x + C_2\sin x;$$

2) далее ищем частное решение исходного неоднородного дифференциального уравнения в виде

$$\tilde{y}(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

Составляем и решаем систему неоднородных алгебраических уравнений для определения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}, \end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}, \\ C_2'(x) = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x}dx, \\ C_2(x) = \displaystyle\int 1\cdot dx, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \ln|\cos x|, \\ C_2(x) = x. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение исходного неоднородного дифференциального уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\tilde{y}(x) = \ln|\cos x|\cdot\cos x + x\sin x.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Морозова, А.В. Высшая математика: учебное пособие в 4 ч. Ч. 3. Интегральное исчисление / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2011. – 138 с. Библиогр.: 7 назв. ***Задание 9.2.*** (стр.136-137).

Для проведения практических занятий и выдачи индивидуальных заданий во втором семестре используются следующие учебные пособия:

1. Морозова А.В. Высшая математика: учеб. пособие: в 4 ч. Ч. 2 Дифференциальное исчисление функции одной переменной / А.В. Морозова, В.И. Полтинников; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2010. – 132 с. Библиогр.: 7 назв.
2. Морозова, А.В. Высшая математика : учебное пособие в 4 ч. Ч. 3. Интегральное исчисление / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2011. – 139 с. : ил. – Библиогр.: 7 назв.

Самостоятельное изучение учебного материала. (69ч)

1. Морозова А.В. Высшая математика: учеб. пособие: в 4 ч. Ч. 2 Дифференциальное исчисление функции одной переменной / А.В. Морозова, В.И. Полтинников; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2010. – 132 с. Библиогр.: 7 назв.
2. Морозова, А.В. Высшая математика : учебное пособие в 4 ч. Ч. 3. Интегральное исчисление / А.В. Морозова, В.И. Полтинников ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2011. – 139 с. : ил. – Библиогр.: 7 назв.
3. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст] : полный курс / Д.Т. Письменный. - 13-е изд. - М. : Айрис-пресс, 2015. - 603 с. : ил., прил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6043-0
4. Владимирский, Б. М. Математика. Общий курс [Текст] : учебник / Б. М. Владимирский, А. Б. Горстко, Я. М. Ерусалимский. - 4-е изд., стер. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2008. - 957 с. : ил., табл. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Предм. указ. - ISBN 978-5-8114-0445-2

СЕМЕСТР 3

Практическое занятие №1. Основные формулы теории вероятностей. (2ч.)

Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает способы подсчета числа элементов в конечных множествах. Формулы комбинаторики используют при непосредственном вычислении вероятностей.

Понятие факториала

Определение. *Факториалом*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

называется функция произвольного целого неотрицательного числа n. При этом полагают 0!=1.

Примеры.

$1! = 1;\ 2! = 1 \cdot 2 = 2;\ 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720;$

$$\frac{5!}{4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{4! \cdot 5}{4!} = 5;\quad \frac{5!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3!} = 4 \cdot 5 = 20.$$

Для приближенного вычисления $n!$ в случае очень больших чисел n пользуются *формулой Стирлинга*

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}\ .$$

Перестановки

Определение. Множества элементов, состоящие из одних и тех же различных элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются *перестановками* этих элементов.

Число всевозможных перестановок из n элементов обозначают через P_n и определяется формулой

$$P_n = n!\ .$$

Пример.

Сколькими способами можно рассадить 3 человека на скамейке?

Решение.

Здесь речь идет о множествах из трех различных элементов, отличающихся друг от друга только порядком элементов:

$$\{1\ 2\ 3\}\quad \{1\ 3\ 2\}\quad \{2\ 1\ 3\}\quad \{2\ 3\ 1\}\quad \{3\ 1\ 2\}\quad \{3\ 2\ 1\}.$$

Поэтому количество способов можно подсчитать по формуле перестановок

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6\,.$$

Размещения

Определение. *Размещениями* называют множества, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Число всех возможных размещений из n элементов по m элементов обозначается через A_n^m и определяется формулой

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)...(n-m+1).$$

Пример.

Сколькими способами можно выбрать два человека на две *различные* должности из трех кандидатов?

Решение.

Здесь речь идет о выборе множеств из двух различных элементов, которые отличаются порядком элементов:

$$\{1\ 2\} \quad \{2\ 1\} \quad \{1\ 3\} \quad \{3\ 1\} \quad \{2\ 3\} \quad \{3\ 2\}$$

из множества, состоящего из трех отличающихся друг от друга элементов:

$$\{1\ 2\ 3\}$$

Поэтому количество способов можно подсчитать по формуле размещений

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

В частном случае $m = n$ число возможных размещений из n элементов по n элементов равно числу всевозможных перестановок из n элементов:

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = P_n.$$

<u>Сочетания</u>

Определение. *Сочетаниями* из n различных элементов по m называются множества, содержащие m элементов из числа n заданных, и которые отличаются хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m элементов обозначается через C_n^m или $\binom{n}{m}$ и определяется формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример.

Сколькими способами можно выбрать два человека на две *одинаковые* должности из трех кандидатов?

Решение.

Здесь речь идет о выборе множеств из двух различных элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом:

$$\{1\ 2\} \quad \{1\ 3\} \quad \{2\ 3\}$$

из множества, состоящего из трех отличающихся друг от друга элементов:

$$\{1\ 2\ 3\}.$$

Поэтому количество способов можно подсчитать по формуле сочетаний

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!1!} = 3.$$

Для числа сочетаний справедливы равенства:

$$C_n^m = C_n^{n-m}; \quad C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1};$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Последнее равенство иногда формулируется в виде следующей ***теоремы о конечных множествах***: число всех подмножеств множества, состоящего из n элементов, равно 2^n.

Отметим, что числа перестановок, размещений и сочетаний связаны равенством

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ №1

Задача 1. Сколькими способами можно расставить в одну шеренгу 6 человек?

Задача 2. Сколько существует способов составления списка 10 деловых звонков случайным образом?

Задача 3. Сколькими способами семья из четырёх человек может быть рассажена на одном диване?

Задача 4. Сколько различных списков (отличающихся порядком фамилий) можно составить из 7 различных фамилий?

Задача 5. Сколькими способами можно рассадить 8 человек: а) в один ряд? б) за круглым столом?

Задача 6. Сколькими способами можно выбрать три лица на три различные должности из десяти кандидатов?

Задача 7. Сколькими способами можно выбрать три лица на три одинаковые должности из десяти кандидатов?

Задача 8. Из восьми депутатов надо выбрать председателя счётной комиссии и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 9. В библиотеке на книжной полке стоят 30 одинаковых методичек. Сколькими способами можно снять с полки шесть методичек?

Задача 10. На курсе изучаются 5 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на пятницу, если в этот день должны быть три различных пары?

Задача 11. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 7 человек, можно составить из 15 преподавателей?

Задача 12. Сколько возможно различных вариантов пьедестала почета (первое, второе, третье места), если в соревнованиях принимают участие 10 человек?

Задача 13. В отборочных соревнованиях принимают участие 10 человек, из которых в финал выходят трое. Сколько может быть различных троек финалистов?

Задача 14. Сколько существует различных автомобильных номеров, которые состоят из четырёх цифр, если первая из них не равна нулю?

Задача 15. Сколькими способами можно составить пароль из шести цифр, если ни одна цифра не повторяется?

Задача 16. Логин должен начинаться с английской буквы S и состоять из четырёх букв (в английском алфавите 26 букв). Сколько можно образовать таких логинов, если: а) все буквы в нём должны быть различными? б) буквы могут повторяться?

Задача 17. Сколько различных трехзначных чисел можно составить, используя по одному разу цифры 1,2,3,4,5,6,7,8?

Задача 18. Сколько различных букетов, состоящих из трех цветов, можно составить, если имеется 10 цветов разных сортов?

Задача 19. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?

Задача 20. Во многих странах водительское удостоверение имеет шифр, состоящий из трех букв и трех цифр. Чему равно общее число возможных номеров водительских удостоверений, считая, что число букв русского алфавита, используемых для составления шифра –26, а буквы занимают первые три позиции шифра? Если шифр состоит только из шести цифр, то чему в этом случае равно общее число всех возможных номеров удостоверений, если: а) цифры в шифре не повторяются; б) если повторяются?

Задача 21. Каким числом способов можно разделить $m + n + s$ предметов на три группы, чтобы в одной группе было m предметов, в другой – n предметов, в третьей – s предметов?

Задача 22. Сколькими способами можно выбрать 6 пирожных в кондитерской, где есть 4 разных сорта пирожных?

Задача 23. В продажу поступили открытки 10 разных видов. Сколькими способами можно образовать набор из 12 открыток? Из 8 открыток?

Задача 24. Четыре автора должны написать книгу из 17 глав, причем первый и третий должны написать по 5 глав, второй – 4, а четвертый – 3 главы книги. Сколькими способами можно распределить главы между авторами?

Задача 25. Ученый собирается исследовать эффект влияния на скорость химического процесса три переменных: давления, температуры и типов катализаторов. Если экспериментатор намерен использовать три набора температуры, три набора давления и два типа катализаторов, то сколькими способами ученый может управлять реакцией, если пожелает использовать все возможные комбинации давления, температуры и типов катализаторов?

Задача 26. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить сержанта и 3 солдата для патрулирования?

Задача 27. Имеется 6 путевок в различные санатории и 7 путевок в различные дома отдыха. Сколькими способами можно выдать некоторому учреждению 3 путевки в санаторий и 4 путевки в дома отдыха?

Задача 28. Ресторан системы быстрого питания предлагает меню, состоящее из 10 рыбных и мясных блюд, 2 овощных гарниров, 4 напитков 3 десертов. Сколько различных вариантов обеда может составить посетитель ресторана, если его обед будет состоять из одного мясного или рыбного блюда, из одного гарнира, одного напитка и одного десерта?

Задача 29. В магазине имеется 6 сортов шоколадных конфет и 4 сорта карамели. Сколько можно сделать различных покупок, содержащих один сорт шоколадных конфет и один сорт карамели?

Задача 30. В отряде 5 разведчиков, 4 связиста и 2 санитара. Сколькими способами можно выбрать одного солдата так, чтобы он был разведчиком или санитаром? Сколькими способами можно составить разведгруппу из трех человек, чтобы в нее вошли разведчик, связист и санитар?

Задача 31. У одного человека имеется 7 книг по математике, а у другого – 9. Сколькими способами они могут осуществить обмен книги на книгу?

Задача 32. Сколько существует различных положений, в которых могут оказываться четыре переключателя, если каждый из них может быть включен или выключен?

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Испытания и события

Определение. *Испытанием (опытом, экспериментом)* называется осуществление определенного комплекса условий.

Определение. Возможный результат (исход) испытания называется *событием*.

Примеры.

Испытания	События
Подбрасывание монеты	Выпадение герба или цифры (орла или решки)
Бросание игрального кубика	Выпадение от одного до шести очков
Контроль качества деталей	Деталь годная или бракованная (стандартная или нестандартная)
Проведение футбольного матча	Результат для каждой команды: победа, проигрыш, ничья
Выстрел в мишень	Попадание или промах

Классификация событий

События подразделяются на достоверные, невозможные и случайные.

Определение. *Достоверным* называется событие, которое обязательно произойдет в результате испытания.

Достоверное событие будем обозначать символом Ω.

Пример. В урне находятся только белые шары. Испытание – извлечение из урны одного шара. Событие «из урны извлечен белый шар» является достоверным (в урне нет шаров другого цвета).

Определение. *Невозможным* называется событие, которое не может произойти в результате испытания.

Невозможное событие будем обозначать символом $\varnothing$.

Пример. В урне находятся только белые шары. Испытание – извлечение из урны одного шара. Событие «из урны извлечен черный шар» является невозможным (черных шаров в урне нет).

Определение. *Случайным* называется событие, которое может произойти, а может и не произойти в результате испытания.

Случайное событие будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, …

Пример. В урне находятся четыре белых и шесть черных одинаковых по размерам и весу шаров. Испытание – извлечение из урны одного шара. Событие A – «из урны извлечен белый шар» является случайным (оно может произойти, а может и не произойти, поскольку в урне имеются не только белые, но и черные шары). Событие B – «из урны извлечен черный шар» также является случайным (оно может произойти, а может и не произойти, поскольку в урне имеются не только черные, но и белые шары).

Говоря о случайном событии, имеют в виду невозможность предсказать результат *конкретного* испытания в массовых явлениях. Массовость означает, что испытание может повторяться достаточно много раз без изменения данного комплекса условий.

Случайные события *подразделяются* на совместные и несовместные, равновозможные, единственно возможные, противоположные, зависимые и независимые и т.п.

Определение. Случайные события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пример 1. В урне находятся четыре белых и шесть черных шаров. Испытание – извлечение из урны одного шара. Событие A – «из урны извлечен белый шар» и событие B – «из урны извлечен черный шар» являются несовместными, так как извлечение из урны белого шара исключает извлечение белого шара и наоборот.

Пример 2. Испытание – подбрасывание симметричной монеты. Событие A – «выпал орел» и событие B – «выпала решка» являются несовместными, так как выпадение орла исключает выпадение решки и наоборот.

Определение. Случайные события называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появления других событий в одном и том же испытании.

Пример. Испытание – подбрасывание трех симметричных монет. Событие A – «выпал орел на первой монете», событие B – «выпал орел на второй монете» и событие C – «выпал орел на третьей монете» являются совместными, так как выпадение орла на одной из монет не исключает появления орла на других монетах.

Определение. Случайные события называются *независимыми*, если появление одного из них не влияет на появление других событий в одном и том же испытании.

Пример 1. Два стрелка стреляют в одну мишень. Событие A – «первый стрелок попал в мишень» и событие B – «второй стрелок попал в мишень» – независимые события.

Пример 2. Монета подбрасывается два раза. Событие A – «первый раз выпал орел» и событие B – «второй раз выпал орел» – независимые события.

Определение. Случайные события называются *зависимыми*, если появление одного из них влияет на появление других событий в одном и том же испытании.

Пример. Покупатель в продовольственном магазине имеет на покупки определенную сумму денег.

Событие A – «покупатель купил на все имеющиеся деньги колбасной продукции» и событие B – «покупатель купил на все имеющиеся деньги молочной продукции» – зависимые события.

Нельзя смешивать понятия независимости и несовместности событий.

Если A и B – независимые события, то они обязательно совместны.

Если A и B – несовместные события, то они – зависимые события.

Определение. Случайные события называются *равновозможными*, если в результате испытания ни одно из них не имеет объективно большую возможность появления, чем другие.

Пример 1. Испытание – подбрасывание симметричной монеты. Событие A – «выпал орел» и событие B – «выпала решка» являются равновозможными, так как монета симметрична.

Пример 2. Испытание – бросание игрального кубика. События – «появление на верхней грани единицы», «появление на верхней грани двойки», «появление на верхней грани тройки», «появление на верхней грани четверки», «появление на верхней грани пятерки», «появление на верхней грани шестерки» – равновозможные, так как игральный кубик изготовлен из однородного материала и имеет форму правильного шестигранника.

Определение. Два случайных события называются *противоположными*, если в результате испытания появление одного из них равносильно непоявлению другого.

Обозначаются такие события A и $\overline{A}$.

Пример 1. Испытание – подбрасывание симметричной монеты. Событие A – «выпал орел» и событие $\overline{A}$– «выпала решка» являются противоположными.

Пример 2. Испытание – выстрел в мишень. Событие A – «попадание» и событие $\overline{A}$– «промах » являются противоположными.

Определение. Случайные события называются *единственно возможными*, если в результате испытания хотя бы одно из них обязательно произойдет.

Пример 1. Испытание – подбрасывание симметричной монеты. Событие A – «выпал орел» и событие B – «выпала решка» являются единственно возможными.

Пример 2. Испытание – бросание игрального кубика. События A_1 – «появление на верхней грани единицы», A_2 – «появление на верхней грани двойки», A_3 – «появление на верхней грани тройки», A_4 – «появление на верхней грани четверки», A_5 – «появление на верхней грани пятерки», A_6 – «появление на верхней грани шестерки» – являются единственно возможными.

Определение. Множество единственно возможных и несовместных событий называется *полной группой*.

Пример 1. Испытание – подбрасывание симметричной монеты. Событие A – «выпал орел» и событие B – «выпала решка» образуют полную группу.

Пример 2. Испытание – бросание игрального кубика. События – «появление на верхней грани единицы», «появление на верхней грани двойки», «появление на верхней грани тройки», «появление на верхней грани четверки», «появление на верхней грани пятерки», «появление на верхней грани шестерки» – образуют полную группу.

Очевидно, что *противоположные события образуют полную группу*.

Определение. Любая совокупность событий, состоящая из несовместных, равновозможных, единственно возможных (образующих полную группу) событий, называется *пространством* или *множеством элементарных событий*. Сами события при этом называются *элементарными*.

Пространство элементарных событий будем обозначать через $\boldsymbol{X}$.

Пример 1. При однократном бросании монеты имеется пространство элементарных событий: событие A – «выпал орел» и событие B – «выпала решка». Размерность этого пространства равна двум – числу элементарных событий (исходов).

Пример 2. При трехкратном бросании монеты имеется пространство элементарных событий:

$$C_1(AAA), C_2(AAB), C_3(ABB), C_4(BBB), C_5(ABA), C_6(BAA), C_7(BBA), C_8(BAB).$$

Размерность этого пространства равна восьми.

Пример 3. В партии из 10 деталей имеются бракованные. Элементарные события: нет ни одной бракованной детали (есть 0 бракованных деталей), есть 1 бракованная деталь, есть 2 бракованные детали, … , есть 10 бракованных деталей (все детали бракованные).

Размерность этого пространства на основании теоремы о конечных множествах равна

$$C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + \ldots + C_{10}^{10} = 2^{10} = 1024.$$

Алгебра событий

Определение. Если событие *A* *влечет* за собой событие *B*, то это обозначают $A \subset B$.

Пример. Чтобы получать повышенную стипендию (событие *B*), надо сдать сессию на «хорошо» и «отлично» (событие *A*).

Определение. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то события *A* и *B* называют *равносильными* или *эквивалентными* и записывают $A = B$.

Определение. *Суммой*, или *объединением, двух событий A* и *B* называется событие *C*, состоящее в появлении *или* события *A*, *или* события *B*, *или* обоих этих событий в данном испытании, то есть появлении *хотя бы* одного из них.

Записывается это так: $C = A + B$ или $C = A \cup B$.

Пример. Монета подбрасывается два раза. Событие *A* – «первый раз выпал орел», событие *B* – «второй раз выпал орел». Событие $C = A + B$ – «хотя бы один раз выпал орел», то есть орел выпал или один раз, или два раза.

Определение. *Суммой*, или *объединением, нескольких событий* называется событие *C*, состоящее в появлении *хотя бы* одного из них.

Сумму *n* событий $A_1, A,...A_n$ обозначают так: $C = A_1 + A_2 + ... + A_n$ или $C = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$.

Пример. Монета подбрасывается три раза. Событие A_1 – «первый раз выпал орел», событие A_2 – «второй раз выпал орел», событие A_3 – «третий раз выпал орел». Событие $C = A_1 + A_2 + A_3$ – «хотя бы один раз выпал орел», то есть орел выпал или один раз, или два раза, или три раза.

Определение. *Разностью двух событий A* и *B* называется событие *C*, которое означает, что наступает событие *A* и не происходит событие *B*.

Записывается это так: $C = A - B$ или $C = A \setminus B$.

Пример. Испытание – бросание игрального кубика.

Событие *A* – «выпало четное число очков», событие *B* – «выпала шестерка». Событие $C = A - B$ – «выпала двойка или выпала четверка».

Определение. *Произведением*, или *пересечением*, двух событий *A* и *B* называется событие *C*, состоящее в появлении *и* события *A*, *и* события *B* в данном испытании, то есть появлении *обоих* этих событий.

Записывается это так: $C = AB$ или $C = A \cap B$.

Пример. Монета подбрасывается два раза. Событие *A* – «первый раз выпал орел», событие *B* – «второй раз выпал орел». Событие $C = AB$ – «оба раза выпал орел».

Определение. *Произведением*, или *объединением*, *нескольких событий* называется событие *C*, состоящее в появлении *всех* этих событий.

Произведение *n* событий $A_1, A,...A_n$ обозначают так: $C = A_1 A_2 ... A_n$ или $C = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$.

Замечание. Произведение означает союз «и» . Например, событие *ABC* означает, что наступило *и* событие *A* *и* событие *B* *и* событие *C*.

Пример. Монета подбрасывается три раза. Событие A_1 – «первый раз выпал орел», событие A_2 – «второй раз выпал орел», событие A_3 – «третий раз выпал орел». Событие $C = A_1 A_2 A_3$ – «все три раза выпал орел».

Различные события и действия над ними удобно рассматривать с помощью так называемых *кругов Эйлера* (*диаграмм Венна*).

Для этого изображают полную группу событий в виде прямоугольника, тогда круги внутри него (круги Эйлера) будут изображать некоторые события. В качестве примера на рис.2.1 последовательно изображены сумма $A+B$, произведение AB событий A и B и два противоположных события A и $\overline{A}$.

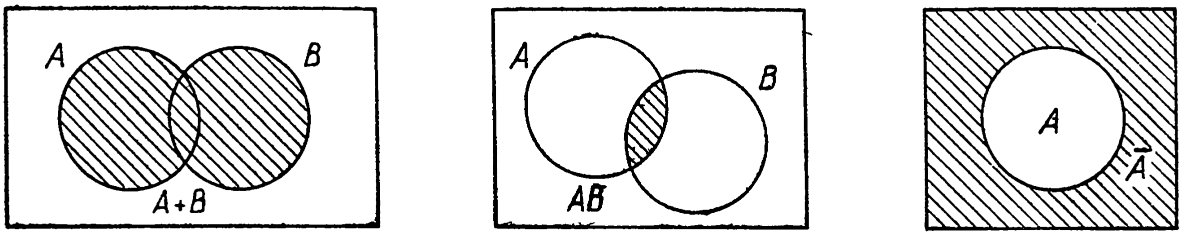


Рис.2.1. Изображение событий $A+B$, AB, A и $\overline{A}$

Различные события и действия над ними удобно рассматривать также с помощью *таблиц операций над событиями*.

А именно, если рассматриваемое событие произошло, то поставим ему в соответствие цифру 1, а если не произошло – поставим 0. Используя данные выше определения, получим следующие таблицы операций над событиями:

A \ B	0	1
0	0	1
1	1	1

$A+B$

A \ B	0	1
0	0	0
1	0	1

AB

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Рис.2.2. Таблицы операций над событиями

Приведем *правила выполнения операций над событиями*.

1. $A+A=A$;
2. $A+B=B+A$;
3. $A+(B+C)=(A+B)+C$;
4. $AB=BA$;
5. $AA=A$;
6. $A(BC)=(AB)C$;

10. $A+\Omega=\Omega$;
11. $A\cdot\Omega=A$;
12. $\overline{\Omega}=\varnothing$;
13. $A\cdot\overline{A}=\varnothing$;
14. $A+\overline{A}=\Omega$;

7. $A(B+C)=AB+AC$;

8. $A+\varnothing=A$;

9. $A\cdot\varnothing=\varnothing$;

15. $\overline{\overline{A}}=A$;

16. $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$;

17. $\overline{A}+\overline{B}=\overline{AB}$.

Эти правила легко проверяются с использованием кругов Эйлера или таблиц операций над событиями.

Пример. Докажем справедливость равенства 17. $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$, используя таблицы операций над событиями:

A	B	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}$
1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	1	**0**	0	1	**0**
0	1	1	**0**	1	0	**0**
0	0	0	**1**	1	1	**1**

Как видно из полученной таблицы, для любых вариантов наступления или не наступления событий A и B равенство 17 выполняется.

Классическое определение вероятности

Определение. Вероятностью события A называется количественная оценка возможности появления события A, характеризующая меру случайности события A.

Вероятность события A обозначают $P(A)$.

Полагают вероятность невозможного события равной нулю, а вероятность достоверного события равной единице:

$$P(\varnothing)=0,\ P(\Omega)=1.$$

Тогда вероятность случайного события A будет заключена между нулем и единицей

$$0<P(A)<1$$

и будет характеризовать меру случайности события A, указывая на степень близости события A к невозможному или достоверному событиям (рис.2.3).

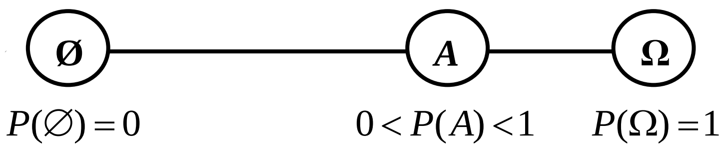


Рис.2.3. Вероятности событий

Если под A понимать *любое* событие (невозможное, достоверное или случайное), то вероятность

$$0\le P(A)\le 1.$$

Вероятность случайного события можно определить теоретически, исходя из определенных предположений об условиях испытания (опыта). В этом случае говорят, что вероятность определена *a priori* (априори – до опыта), и называют ее *классической вероятностью*.

Определение. *Классической вероятностью* события A называется отношение числа благоприятствующих наступлению этого события элементарных событий (исходов) m, к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных событий (исходов) n, образующих полную группу:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (0 \le m \le n).$$

Данную формулу называют *формулой классической вероятности*.

Пример 1. В урне 10 одинаковых по размерам и весу шаров, из которых 2 красных и 8 зеленых. Из урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется зеленым?

Решение. Искомое событие «извлеченный шар оказался зеленым» обозначим буквой A. Данное испытание имеет 10 равновозможных несовместных элементарных событий (исходов), образующих полную группу, из которых 8 благоприятствуют событию A. Следовательно, $m = 8$, $n = 10$ и по формуле классической вероятности получаем

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

Пример 2. Подбрасывается два игральных кубика, отмечается число очков на верхней грани каждого кубика. Найти вероятность того, что на обоих кубиках выпало одинаковое число очков.

Решение. Искомое событие «на обоих кубиках выпало одинаковое число очков» обозначим буквой A. Данное испытание имеет $6^2 = 36$ равновозможных несовместных элементарных событий (исходов), образующих полную группу, из которых событию A благоприятствуют 6 элементарных событий (исходов): (1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5), (6;6). Следовательно, $m = 6$, $n = 36$ и по формуле классической вероятности получаем

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Пример 3. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. Искомое событие «среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных» обозначим буквой A. Общее число равновозможных несовместных элементарных событий (исходов) испытания, образующих полную группу, равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т.е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов:

$$n = C_{10}^{6}.$$

Определим число исходов, благоприятствующих событию A. Четыре стандартные детали из семи стандартных можно взять C_7^4 способами, при этом остальные 6-4=2 детали должны быть нестандартными; взять же две нестандартные детали из 10-7=3 нестандартных деталей можно C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятных исходов по принципу логического умножения (правилу произведения) равно:

$$m = C_7^4 \cdot C_3^2.$$

Следовательно, по формуле классической вероятности получаем

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{\frac{7!}{4!\cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2!\cdot 1!}}{\frac{10!}{6!\cdot 4!}} = \frac{7!\cdot 3!\cdot 6!\cdot 4!}{4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 10!} = \frac{7!\cdot 6!}{2!\cdot 10!} = \frac{5}{10} = 0{,}5.$$

Если же вероятность случайного события находится по результатам испытания (опыта), то тогда говорят, что вероятность найдена *a posteriori* (апостериори – из опыта) и называют ее *статистической вероятностью*.

Для определения статистической вероятности предварительно вводят понятие относительной частоты события.

Определение. *Относительной частотой (частостью) события A* называется отношение числа испытаний *m*, при которых событие *A* появилось, к общему числу проведенных испытаний *n*:

$$W(A) = \frac{m}{n}, \quad (0 \le m \le n).$$

Пример. Из 500 взятых наудачу деталей 4 оказались бракованными. Найти относительную частоту появления бракованной детали.

Решение. В данном случае $m = 4, n = 500$, следовательно

$$W(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{500} = 0{,}008.$$

Определение. *Статистической вероятностью события A* называется относительная частота события *A*, вычисленная по результатам большого числа испытаний:

$$P^*(A) = \lim_{n\to\infty} W(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}.$$

Пример. Из 500 взятых наудачу деталей 4 оказались бракованными. Найти вероятность появления бракованной детали.

Решение. В данном случае $m = 4, n = 500$, следовательно

$$P^*(A) = W(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{500} = 0{,}008,$$

так как $n = 500$ – достаточно велико (можно считать, что $n \to \infty$).

Установлено, что *классическая вероятность приближенно равна статистической вероятности*:

$$P(A) \approx P^*(A).$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ №2

Задача 1. Являются ли несовместными следующие события:
а) испытание – подбрасывание симметричной монеты;
события: A – «выпадение орла», B – «выпадение решки»;
б) испытание – два выстрела по мишени;
события: A – «хотя бы одно попадание», B – «хотя бы один промах».

Задача 2. Являются ли равновозможными следующие события:
а) испытание – подбрасывание симметричной монеты;
события: A – «выпадение орла», B – «выпадение решки»;
б) испытание – подбрасывание погнутой монеты;
события: A – «выпадение орла», B – «выпадение решки»;
в) испытание – выстрел по мишени;
события: A – «попадание», B – «промах».

Задача 3. Образуют ли полную группу событий следующие события:
а) испытание – подбрасывание симметричной монеты;
события: A – «выпадение орла», B – «выпадение решки»;
б) испытание – подбрасывание двух симметричных монет;
события: A – «выпадение двух орлов», B – «выпадение двух решек».

Задача 4. Испытание – подбрасывание трех игральных кубиков. Какие события образуют полную группу?

Задача 5. Испытание состоит в извлечении детали из ящика, в котором находятся изделия трех сортов. Обозначения событий: A – «извлечена деталь первого сорта», B – «извлечена деталь второго сорта», C – «извлечена деталь третьего сорта». Что представляют собой следующие события: $A+B$; $\overline{A+C}$; AC; $AB+C$?

Задача 6. Испытание состоит в том, что стрелок производит 3 выстрела по мишени. Обозначения событий: A_1 – «попадание в мишень при первом выстреле»; A_2 – «попадание в мишень при втором выстреле»; A_3 – «попадание в мишень при третьем выстреле». Выразить через A_1, A_2, A_3 следующие события: A – «хотя бы одно попадание», B – «три попадания», C – «три промаха», D – «хотя бы один промах», E – «не меньше двух попаданий», F – «не более одного попадания», G – «попадание после первого выстрела».

Задача 7. Через произвольные события A,B,C, наступление которых возможно в данном испытании, найти выражения для следующих событий:
а) произошло только событие A;
б) произошли A и B, но C не произошло;
в) произошли все три события;
г) произошло, по крайней мере, одно из этих событий;
д) произошли, по крайней мере, два из этих событий;
е) произошло одно и только одно событие;
ж) произошли два и только два события;
з) ни одно событие не произошло;
и) произошло не более двух событий.

Задача 8. Пусть A,B,C – произвольные события. Что означают следующие события:

$$\bar{A}BC,\ \bar{A}\bar{B}\bar{C},\ \bar{A}+\bar{B}+\bar{C},\ A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C,\ \bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C?$$

Задача 9. Блок в электрической схеме содержит два параллельно соединённых элемента; событие A_1 есть исправность первого элемента, A_2 – исправность второго. Выразить через A_1 и A_2 следующие события: A – блок пропускает ток; B – блок не пропускает тока.

Задача 10. Доказать, что $(A+C)(B+C)=AB+C$.

Задача 11. Доказать, что $\overline{\bar{A}\bar{B}}=A+B$.

Задача 12. Доказать, что $\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$

Задача 13. Упростить выражение $(A+B)(A+\bar{B})$.

Задача 14. Упростить выражение $(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B})$.

Задача 15. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.

Задача 16. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого, наудачу извлеченного жетона, не "содержит цифры 5.

Задача 17. Подбрасываются два игральных кубика. Найти вероятность события A, состоящего в том, что суммарное число выпавших очков не будет превосходить четырёх.

Задача 18. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному из расположенных «в одну линию» кубиках можно будет прочесть слово «спорт».

Задача 19. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны, Найти вероятность того, что на четырех, вынутых по одной и расположенных «в одну линию» карточках, можно будет прочесть слово «трос».

Задача 20. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

Задача 21. Из тщательно перемешанного полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу извлеченную кость можно приставить к первой, если первая кость: а) оказалась дублем, б) не есть дубль.

Задача 22. В замке на общей оси пять дисков, каждый из которых разделен на шесть секторов с различными написанными на них буквами. Замок открывается, только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

Задача 23. Восемь различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

Задача 24. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем пять книг стоят по 4 рубля каждая, три книги – по одному рублю и две книги – по 3 рубля. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 рублей.

Задача 25. Из 15 билетов лотереи выигрышными являются четыре. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу шести билетов будет два выигрышных?

Задача 26. Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров, случайным образом извлекаются 5 шаров. Найти вероятность того, что вынуты 2 белых и 3 черных шара.

Задача 27. Из 60 вопросов, включенных в экзамен, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что из предложенных ему трех вопросов он знает два?

Задача 28. Группа, состоящая из пяти юношей и семи девушек, распределяет по жребию 4 билета в театр. Какова вероятность того, что в числе получивших билеты окажется три юноши и одна девушка?

Задача 29. Из коробки, в которой лежат 6 красных и 5 синих карандашей, случайным образом извлечены 3 карандаша. Найти вероятность того, что все они красные.

Задача 30. Из четырёх отрезков длиной 1, 3, 5, 7 наугад выбирают три. Какова вероятность события A, состоящего в том, что из них можно построить треугольник?

Задача 31. В урне шесть белых и четыре чёрных шара. Наудачу извлекли два шара. Найти вероятность следующих событий:

а) оба шара белых;

б) только один шар белый;

в) хотя бы один шар белый.

Задача 32. Среди 1000 новорожденных оказалось 520 мальчиков. Чему равна частота рождения мальчиков?

Задача 33. В результате 40 выстрелов по мишени получено 36 попаданий. Какова частота промахов?

Задача 34. Среди 300 деталей, изготовленных на автоматическом станке, оказалось 15, не отвечающих стандарту. Найти частоту появления стандартных деталей.

Задача 35. Частота нормального всхода семян 0,96. Из высеянных семян взошло 960. Сколько семян было высеяно?

Задача 36. На отрезке натурального ряда от 1 до 20 найти частоту простых чисел.

Задача 37. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85 Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.

Задача 38. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 6 и 12 см соответственно. Какова вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное указанными окружностями?

Задача 39. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, брошенная в этот круг, попадет в данный треугольник.

Задача 40. В квадрат с вершинами $O(0;0)$, $K(0;1)$, $L(1;1)$, $M(1;0)$ наудачу брошена точка $Q(x,y)$. Какова вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y > 2x$?

Задача 41. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Найти вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода – один час, а второго – два часа (ответ округлить до третьего знака после запятой).

Задача 42. В шар вписана правильная треугольная пирамида. Точка наудачу зафиксирована в шаре. Найти вероятность попадания точки в пирамиду.

Задача 43. Стержень длиной l произвольным образом сломан на три части. Какова вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник?

Практическое занятие №2. Основные формулы теории вероятностей. (2ч.)

Теоремы умножения и сложения вероятностей

1. Теорема умножения вероятностей двух событий

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A)P(B/A), \;\; P(AB) = P(B)P(A/B).$$

Определение. Вероятность события B при условии, что произошло событие A, называется *условной вероятностью события B* и обозначается так: $P(A/B)$, или $P_A(B)$.

Событие B не зависит от события A, если

$$P(B/A) = P(B),$$

т.е. вероятность события B не зависит от того, произошло ли событие A.

В этом случае и событие A не зависит от события B, т.е. свойство независимости событий является взаимным.

Отметим, что если события A и B независимы, то независимы $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Пример. В урне 6 голубых и 4 красных шара. Из урны поочередно извлекают шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом извлечении появится голубой шар, а при втором – красный шар.

Решение. Определим следующие события: событие A – «при первом извлечении появился голубой шар», событие B – «при втором извлечении появился красный шар». События A и B – зависимые. Поэтому применима теорема умножения вероятностей для зависимых событий.

Вероятность появления голубого шара при первом извлечении

$$P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Вероятность появления красного шара во втором извлечении, вычисленная в предположении, что в первый раз появился голубой шар – это условная вероятность

$$P(B/A) = \frac{4}{9}.$$

Находим искомую вероятность

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{15}.$$

2. Теорема умножения вероятностей двух независимых событий

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Пример. Найти вероятность совместного появления решки при одном подбрасывании двух монет.

Решение. Определим следующие события: событие A – «на первой монете выпала решка», событие B – «на второй монете выпала решка», событие AB – «совместное выпадение решки на первой и второй монетах». События A и B – независимые. Поэтому применима теорема умножения вероятностей для независимых событий.

Вероятность выпадения решки на первой монете

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Вероятность выпадения решки на второй монете

$$P(B) = \frac{1}{2}.$$

Находим искомую вероятность

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

3. Теорема умножения вероятностей n событий

Вероятность произведения n *событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, вычисленные в предположении, что все предыдущие события наступили*:

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) P(A_2 / A_1) P(A_3 / A_1 A_2) \; ... \; P(A_n / A_1 A_2 ... A_{n-1}).$$

Определение. События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *независимыми в совокупности или независимыми*, если они попарно независимы, а также независимы каждое из них и произведение k остальных (k =2,3,…,n-1).

Замечание 1. Из попарной независимости событий не следует их независимость в совокупности.

Замечание 2. Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимы, то противоположные им события $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$ также независимы.

Пример. Студент пришел на экзамен, зная только 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту три вопроса. Найти вероятность того, что студент ответит на все три вопроса.

Решение. Определим следующие события: событие A – «студент знает все три вопроса», событие A_1 – «студент знает первый вопрос», событие A_2 – «студент знает второй вопрос», событие A_3 – «студент знает третий вопрос». События A_1, A_2, A_3 – зависимые. Поэтому применима теорема умножения вероятностей зависимых событий. В соответствии с этой теоремой находим искомую вероятность:

$$P(A) = P(A_1) P(A_2 / A_1) P(A_3 / A_1 A_2) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{53}{115} = 0,496.$$

4. Теорема умножения вероятностей n независимых событий

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимы, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) P(A_2) \; ... \; P(A_n).$$

Замечание. Данное равенство выражает *необходимое и достаточное условие независимости событий $A_1, A_2, ..., A_n$*.

Пример. В каждом из трех ящиков находится по 30 деталей. В первом ящике 27, во втором 28, в третьем 25 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Какова вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными?

Решение. Определим следующие события: событие A_1 – «из первого ящика вынута стандартная деталь», событие A_2 – «из второго ящика вынута стандартная деталь», событие A_3 – «из третьего ящика вынута стандартная деталь», событие $A_1A_2A_3$ – «все три вынутые детали оказались стандартными». События A_1, A_2, A_3 – независимые. Поэтому применима теорема умножения вероятностей независимых событий. В соответствии с этой теоремой находим искомую вероятность:

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{27}{30}\cdot\frac{28}{30}\cdot\frac{25}{30} = \frac{9}{10}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{5}{6} = 0,7\,.$$

5. Теорема о вероятности появления хотя бы одного события

Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$, *независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей событий, противоположных данным*:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})...P(\overline{A_n})\,.$$

Пример. Три стрелка попадают в мишень соответственно с вероятностями 0,75; 0,85; 0,8. Найти вероятность того, что при одном выстреле хотя бы один из стрелков попадет в мишень.

Решение. Определим следующие события: событие A_1 – «попадание в мишень первого стрелка», событие A_2 – «попадание в мишень второго стрелка», событие A_3 – «попадание в мишень третьего стрелка», событие B – «попадание в мишень хотя бы одним стрелком». Очевидно, $B= A_1+ A_2+ A_3$, причем события A_1, A_2 , A_3 независимы в совокупности. Поэтому применима теорема о вероятности появления хотя бы одного события. В соответствии с этой теоремой находим искомую вероятность по формуле

$$P(B) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})\,.$$

Так как

$$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,75 = 0,25\,;$$

$$P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,85 = 0,15\,;$$

$$P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_3) = 1 - 0,8 = 0,2\,,$$

то

$$P(B) = 1 - 0,25\cdot 0,15\cdot 0,2 = 1 - 0,0075 = 0,9925\,.$$

6. Теорема сложения вероятностей двух событий

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)\,.$$

Пример. Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена равна 0,75, а для второго – 0,9. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один спортсмен?

Решение. Определим события: событие A – «попадание в мишень первого спортсмена», событие B – «попадание в мишень второго спортсмена», событие C – «попадание в мишень хотя бы одного из спортсменов». Очевидно, $C=A+B$, причем события A и B совместны. Поэтому применима теорема сложения вероятностей совместных событий. В соответствии с этой теоремой находим искомую вероятность по формуле:

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Поскольку A и B – независимые события, то на основании теоремы умножения вероятностей двух независимых событий

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

С учетом заданных вероятностей $P(A)=0,75;$ $P(B)=0,9$ в итоге получаем

$$P(C)=(0,75+0,9)-0,75\cdot 0,9=1,65-0,675=0,975.$$

7. Теорема сложения вероятностей двух несовместных событий

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Замечание. Очевидно, что данная теорема является частным случаем теоремы сложения вероятностей двух произвольных событий, когда A и B – несовместные события; в этом случае AB – невозможное событие и $P(AB)=0$.

Пример. Спортсмен стреляет по мишени, разделенной на 3 сектора. Вероятность попадания в первый сектор равна 0,5, во второй – 0,2. Какова вероятность попадания либо в первый, либо во второй сектор?

Решение. Событие A – «попадание в первый сектор» и событие B – «попадание во второй сектор» несовместны (попадание в один сектор исключает попадание в другой), поэтому применима теорема сложения вероятностей несовместных событий. В соответствии с этой теоремой находим искомую вероятность:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0,5+0,2=0,7.$$

8. Теорема сложения вероятностей n несовместных событий

Вероятность суммы n *несовместных событий* $A_1, A_2, ..., A_n$ *равна сумме вероятностей этих событий*:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$$

Пример. Подбрасывается игральный кубик. Чему равна вероятность того, что выпадет четное число очков?

Решение. Определим события: событие A – «выпало четное число очков», событие A_2 – «выпало 2 очка», событие A_4 – «выпало 4 очка», событие A_6 – «выпало 6 очков». Очевидно, что событие A есть сумма несовместных событий A_2, A_4, A_6, поэтому применима теорема сложения вероятностей n несовместных событий. В соответствии с этой теоремой находим искомую вероятность:

$$P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Замечание. Тот же результат получается и непосредственно по формуле классической вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

9. Теорема сложения вероятностей событий, образующих полную группу

Сумма вероятностей n событий $A_1, A_2, ..., A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

Пример. На складе имеется продукция трех сортов. Вероятность получить продукцию первого сорта равна 0,45. Вероятность получить продукцию второго сорта равна 0,35. Чему равна вероятность получения продукции третьего сорта?

Решение. Обозначим события: A_1 – получена продукция первого сорта; A_2 – получена продукция второго сорта; A_3 – получена продукция третьего сорта. По условию задачи события A_1, A_2, A_3 образуют полную группу, и $P(A_1) = 0,45;\ P(A_2) = 0,35$. Следовательно, искомая вероятность

$$P(A_3) = 1 - P(A_1) - P(A_2) = 1 - 0,45 - 0,35 = 0,2.$$

10. Теорема сложения вероятностей противоположных событий

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Обычно обозначают $P(A) = p,\ P(\overline{A}) = q$, тогда $p + q = 1$.

Замечание. В ряде задач проще искать не вероятность заданного события, а вероятность события, противоположного ему, а затем найти требуемую вероятность по формуле $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Пример. Из урны, содержащей 2 белых и 6 черных шаров, случайным образом извлекаются 5 шаров. Найти вероятность того, что вынуты шары разных цветов.

Решение. Событие $\overline{A}$, противоположное искомому событию A, заключается в том, что из урны вынуто 5 шаров одного цвета, а так как белых шаров в ней всего два, то этот цвет может быть только черным. Множество возможных исходов опыта найдем по формуле для числа сочетаний:

$$n = C_8^5 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56,$$

а множество исходов, благоприятных событию $\overline{A}$ – это число возможных наборов по 5 шаров только из шести черных:

$$m_{\overline{A}} = C_6^5 = \frac{6!}{5!1!} = 6.$$

Тогда

$$p(\bar{A})=\frac{m_{\bar{A}}}{n}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28},\text{ а } p(A)=1-p(\bar{A})=1-\frac{3}{28}=\frac{25}{28}.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ №2

Задача 1. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10 000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша, безразлично денежного или вещевого, для владельца одного лотерейного билета?

Задача 2. Предприятие дает в среднем 25% продукции высшего сорта и 65% продукции первого сорта. Какова вероятность того, что случайно взятое изделие окажется первого или высшего сорта?

Задача 3. Из полного набора костей домино наудачу извлекаются три кости. Найти вероятность того, что все они – дубли.

Задача 4. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; вероятность выбить 9 очков равна 0,3; вероятность выбить 8 или меньше очков равна 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.

Задача 5. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 2 деталей есть хоти бы одна стандартная.

Задача 6. В ящике 10 деталей, среди которых 2 нестандартных. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных 6 деталях окажется не более одной нестандартной детали.

Задача 7. События *A*, *B*, *C*, *D* образуют полную группу. Вероятности событий таковы: $P(A)=0,4;\ P(B)=0,1;\ P(C)=0,3$. Чему равна вероятность события *D*?

Задача 8. По статистическим данным ремонтной мастерской в среднем на 20 остановок токарного станка приходится: 10 – для смены резца; 3 – из-за неисправности привода; 2 – из-за несвоевременной подачи заготовок. Остальные остановки происходят по другим причинам. Найти вероятность остановки станка по другим причинам.

Задача 9. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает в мишень, равна p = 0,9. Стрелок произвел 3 выстрела. Найти вероятность того, что все 3 выстрела дали попадание.

Задача 10. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: «появился герб», «появилось 6 очков».

Задача 11. В двух ящиках находятся детали: в первом – 10 (из них 3 стандартных), во втором – 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Задача 12. В студии телевидения 3 телевизионных камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна p= 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера.

Задача 13. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

Задача 14. Предприятие изготовляет 95% изделий стандартных, причем из них 86% – первого сорта. Найти вероятность того что взятое наудачу изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется первого сорта.

Задача 15. Из цифр 1,2,3,4,5 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся четырех – вторая цифра. Предполагается, что все 20 возможных исходов равновероятны. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: а) в первый раз; б) во второй раз; в) в оба раза.

Задача 16. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз?

Задача 17. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равна 0,6. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет разрыва.

Задача 18. Вероятность того, что событие A появится хотя бы один раз при двух независимых испытаниях, равна 0,75. Найти вероятность появления события в одном испытании (предполагается, что вероятность появления события в обоих испытаниях одна и та же).

Задача 19. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, а вторым стрелком – 0,6. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком.

Задача 20. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что: а) из трех проверенных изделий только одно окажется нестандартным; б) нестандартным окажется только четвертое по порядку проверенное изделие.

Задача 21. Каждое из четырех несовместных событий может произойти соответственно с вероятностями 0,014; 0,011; 0,009; 0,006. Найти вероятность того, что в результате испытания произойдет хотя бы одно из этих событий?

Задача 22. Определить вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 9, либо тому и другому одновременно?

Задача 23. На десяти карточках напечатаны цифры от 0 до 9. Определить вероятность того, что три наудачу взятые и поставленные в ряд карточки составят число 357.

Задача 24. В первой урне находится 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, во второй соответственно 10, 8 и 6. Из каждой урны наудачу извлекается по одному шару. Найти вероятность того, что они одного цвета.

Задача 25. В автопробеге участвуют 3 автомобиля. Первый может сойти с маршрута с вероятностью 0,15; второй – с вероятностью 0,05; а третий – с вероятностью 0,1. Определите вероятность того, что к финишу прибудут: а) два автомобиля; б) по крайней мере, два автомобиля; в) только один автомобиль.

Задача 26. В урне 10 белых, 8 черных и 12 красных шаров. Наудачу вынимаются 2 шара. Какова вероятность того, что вынутые шары разного цвета, если известно, что не вынут красный шар?

Задача 27. За круглый стол случайным образом садятся 12 человек, среди которых два приятеля – Вася и Игорь. Какова вероятность того, что Вася и Игорь окажутся рядом?

Задача 28. На 6-местную скамейку случайным образом садятся 6 человек, среди которых два приятеля – Вася и Игорь. Какова вероятность того, что Вася и Игорь окажутся рядом?

Задача 29. Из колоды в 36 карт наугад одна за другой извлекаются две карты. Найти вероятность того, сто ими оказались: а) два короля; б) две карты бубновой масти; в) король и туз.

Задача 30. Вероятность дожить человеку до 20 лет равна p, дожить до 60 лет – q. Какова вероятность дожить до 60 лет человеку 20-летнего возраста?

Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить с одним и только с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу (такие события называются *гипотезами*). Тогда вероятность события A вычисляется по *формуле полной вероятности*:

$$P(A) = P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) + ... + P(H_n)P(A / H_n).$$

Вероятности гипотез $P(H_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ в формуле полной вероятности предполагаются известными до опыта (*a priori*).

Пример. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,1% брака, второй – 0,2%, третий – 0,3% брака. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 1000 деталей, со второго – 2000 и с третьего – 3000 деталей.

Решение. Определим события: событие A – «на сборку поступила бракованная деталь»; гипотеза H_1 – «деталь изготовлена на первом автомате», гипотеза H_2 – «деталь изготовлена на втором автомате», гипотеза H_3 – «деталь изготовлена на третьем автомате».

Из условия задачи по формуле классической вероятности находим

$$P(H_1) = \frac{1000}{6000} = \frac{1}{6};\ P(H_2) = \frac{2000}{6000} = \frac{1}{3};\ P(H_3) = \frac{3000}{6000} = \frac{1}{2}.$$

Легко убедиться, что гипотезы H_1, H_2, H_3 образуют полную группу, так как сумма вероятностей гипотез равна единице, что соответствует теореме сложения вероятностей событий, образующих полную группу.

Далее находим условные вероятности попадания на сборку бракованной детали соответственно с первого, второго и третьего автоматов:

$$P(A / H_1) = \frac{0,1}{100} = 0,001;\ P(A / H_2) = \frac{0,2}{100} = 0,002;\ P(A / H_3) = \frac{0,3}{100} = 0,003.$$

Тогда по формуле полной вероятности определяем вероятность искомого события:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 0{,}001+\frac{1}{3}\cdot 0{,}002+\frac{1}{2}\cdot 0{,}003=\frac{14}{6000}\approx 0{,}023.$$

Формулы Байеса

Следствием теоремы умножения вероятностей и формулы полной вероятности являются *формулы Байеса*:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+...+P(H_n)P(A/H_n)},$$

где $i=1,2,...,n$.

Формулы Байеса показывают, как изменяются вероятности гипотез в том случае, если событие A наступило. Вероятности гипотез $P(H_i/A)$ в этом случае являются апостериорными, т.е. полученными после опыта (*a posteriori*).

Пример. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,1% брака, второй – 0,2%, третий – 0,3% брака. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 1000 деталей, со второго – 2000 и с третьего – 3000 деталей. Какова вероятность того, что эта деталь изготовлена на третьем автомате?

Решение. 1) Сначала найдем вероятность попадания на сборку бракованной детали (см. предыдущий пример). Для этого определим события: событие A – «на сборку поступила бракованная деталь»; гипотеза H_1 – «деталь изготовлена на первом автомате», гипотеза H_2 – «деталь изготовлена на втором автомате», гипотеза H_3 – «деталь изготовлена на третьем автомате».

Из условия задачи по формуле классической вероятности находим

$$P(H_1)=\frac{1000}{6000}=\frac{1}{6};\ P(H_2)=\frac{2000}{6000}=\frac{1}{3};\ P(H_3)=\frac{3000}{6000}=\frac{1}{2}.$$

Легко убедиться, что гипотезы H_1, H_2, H_3 образуют полную группу, так как сумма вероятностей гипотез равна единице, что соответствует теореме сложения вероятностей событий, образующих полную группу.

Вероятности гипотез $P(H_1),\ P(H_2),\ P(H_3)$ вычислены до опыта (*a priori*).

Далее находим условные вероятности попадания на сборку бракованной детали соответственно с первого, второго и третьего автоматов:

$$P(A/H_1)=\frac{0{,}1}{100}=0{,}001;\ P(A/H_2)=\frac{0{,}2}{100}=0{,}002;\ P(A/H_3)=\frac{0{,}3}{100}=0{,}003.$$

Тогда по формуле полной вероятности определяем вероятность искомого события:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 0{,}001+\frac{1}{3}\cdot 0{,}002+\frac{1}{2}\cdot 0{,}003=\frac{14}{6000}\approx 0{,}023.$$

2) Теперь найдем вероятность того, что бракованная деталь изготовлена на третьем автомате. По формуле Байеса получаем

$$P(H_3 / A) = \frac{P(H_3)P(A / H_3)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,03}{0,023} \approx 0,652.$$

Вероятность гипотезы $P(H_3 / A)$ в этом случае определяется при условии, что событие A уже наступило, т.е. вычислена после опыта (*a posteriori*).

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ №3

Задача 1. Партия электрических лампочек на 25% изготовлена первым заводом, на 35% – вторым заводом, на 45% – третьим заводом. Вероятности выпуска бракованных лампочек на каждом заводе соответственно равны 0,03; 0,02; 0,01. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампочка окажется бракованной?

Задача 2. На фабрике изготовляются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 45% изделий, на второй – 35%, на третьей – остальная часть продукции. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами годности изделий: 98%; 96%; 94%. Определить вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным.

Задача 3. В четырех ящиках находятся одинаковые по размерам и весу шары. В первом ящике – 6 голубых и 4 красных шара; во втором ящике – 3 голубых и 7 красных шаров; в третьем ящике – 10 голубых и 10 красных шаров; в четвертом ящике – 2 голубых и 3 красных шара. Наудачу выбирается ящик и из него извлекается шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар оказался красным?

Задача 4. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях из первой группы выделено четыре студента, из второй – шесть, из третьей – пять студентов. Вероятности попадания для студента каждой группы в сборную университета соответственно равны 0,5; 0,4 и 0,3. Какова вероятность того, что наудачу выбранный участник соревнований попал в сборную?

Задача 5. В цехе – 10 станков марки А, 6 станков – марки В и 4 станка – марки С. Вероятность выпуска качественной продукции для каждого станка составляет 0,9; 0,8 и 0,7 соответственно. Какой процент качественной продукции выпускает цех в целом?

Задача 6. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

Задача 7. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе, как 3 : 2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

Задача 8. Из 20 студентов, пришедших на экзамен, 8 студентов подготовлены отлично, 6 студентов – хорошо, 4 студента – посредственно и 2 студента – плохо. В экзаменационных билетах имеется 40 вопросов. Студент, подготовленный отлично, знает все вопросы, подготовленный хорошо – 35 вопросов, подготовленный посредственно – 25 вопросов и подготовленный плохо – 10 вопросов. Некоторый студент ответил на все 3 вопроса билета. Найдите вероятность того, что он подготовлен: а) хорошо; б) плохо.

Задача 9. Имеются две одинаковые урны. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй – 6 белых и 4 черных. Наудачу выбирается урна и из нее наугад вынимается один шар. Выбранный шар оказался белым. Какова вероятность того, что этот шар вынут из первой урны?

Задача 10. В одной студенческой группе обучаются 24 студента, во второй – 36 студентов и в третьей – 40 студентов. По математическому анализу получили отличные отметки 6 студентов первой группы, 6 студентов второй группы и 4 студента третьей группы. Наугад выбранный студент оказался получившим по математическому анализу отметку «отлично». Какова вероятность того, что он учится в первой группе?

Задача 11. Исследованиями психологов установлено, что мужчины и женщины по-разному реагируют на некоторые жизненные обстоятельства. Результаты исследований показали, что 70% женщин позитивно реагируют на изучаемый круг ситуаций, в то время как 40% мужчин реагируют на них негативно. 15 женщин и 5 мужчин заполнили анкету, в которой отразили свое отношение к предлагаемым ситуациям. Случайно извлеченная анкета содержит негативную реакцию. Чему равна вероятность того, что её заполнял мужчина?

Задача 12. В каждой из двух урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны во вторую наудачу переложен один шар.

1. Найти вероятность того, что *шар, извлеченный из второй урны после перекладывания, окажется черным*?

2. Предположим, что шар, извлеченный из второй урны после перекладывания, оказался черным. Какова тогда вероятность того, что из *первой урны во вторую был переложен белый шар*?

Задача 13. Из числа авиалиний некоторого аэропорта 60% – местные, 30% – по СНГ и 10% – в дальнее зарубежье. Среди пассажиров местных авиалиний 50% путешествуют по делам, связанным с бизнесом, на линиях СНГ таких пассажиров 60%, на международных – 90%. Из прибывших в аэропорт пассажиров случайно выбирается один. Чему равна вероятность того, что он:

а) бизнесмен;

б) прибыл из стран СНГ по делам бизнеса;

в) прилетел местным рейсом по делам бизнеса;

г) прибывший международным рейсом бизнесмен.

Задача 14. Партия деталей изготовлена тремя рабочими, причем первый изготовил 35% всех деталей, второй – 40% всех деталей, третий – всю остальную продукцию. Брак в их продукции составляет: у первого рабочего – 2%, у второго – 3%, у третьего – 4%. Найти вероятность того, что случайно выбранная для контроля деталь оказалась бракованной и изготовлена:

а)первым рабочим;

б) вторым рабочим;

в) третьим рабочим.

Практическое занятие №3. Дискретные и непрерывные случайные величины. (2ч.)

<u>Определение дискретной и непрерывной случайной величины</u>

Наряду с понятием случайного события в теории вероятности используется и более удобное понятие *случайной величины*.

С введением понятия «случайная величина» расширяется понятие «случайное событие» – теперь под случайным событием понимается событие, состоящее в том, что случайная величина в результате испытания приняла значение, принадлежащее некоторому конечному или бесконечному числовому множеству.

Определение. *Случайной величиной* называется величина, принимающая в результате опыта одно из своих возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно.

Случайные величины обозначают заглавными буквами латинского алфавита ($X,Y,Z,\ldots$), а их возможные значения – соответствующими малыми буквами ($x_i, y_i, z_i,\ldots$).

Случайные величины можно разделить на два вида – *дискретные и непрерывные.*

Определение. Случайная величина называется *дискретной*, если она принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями, образующими счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

Это множество может быть как конечным, так и бесконечным.

Примеры:

1) число очков, выпавших при броске игральной кости;

2) число появлений герба при 10 бросках монеты;

3) число выстрелов до первого попадания в цель.

Множества возможных значений для перечисленных случайных величин имеют разный вид: для первых двух величин они конечны – {1,2,3,4,5,6} и {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} (соответственно 6 и 11 значений), для третьей величины множество значений бесконечно и представляет собой множество натуральных чисел N.

Определение. Случайная величина называется *непрерывной*, если множество ее возможных значений целиком заполняет некоторый конечный или бесконечный промежуток.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Примеры:

1) температура, давление и влажность воздуха;

2) расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия;

3) продолжительность работы электрической лампы.

Множества возможных значений для перечисленных случайных величин – это промежутки действительных чисел, являющихся промежутками возможных диапазонов изменений соответствующих физических величин.

Закон распределения дискретной случайной величины

Определение. *Законом распределения дискретной случайной величины* называется соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Закон распределения можно задать аналитически (в виде формулы $p = p(X)$), таблично и графически.

Таблица, в которой перечислены возможные значения дискретной случайной величины и соответствующие им вероятности, называется *рядом распределения:*

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Таблица распределения вероятностей чаще всего применяется тогда, когда число возможных значений случайной величины конечно.

Так как в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, то события $X = x_1, X = x_2, \ldots, X = x_n$ образуют полную группу. Следовательно, сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Данное соотношение часто называют *условием нормировки*.

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически. Для этого в декартовой прямоугольной системе координат изображают точки $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots, (x_n, p_n)$, а затем соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником (полигоном) распределения* (рис.5.1).

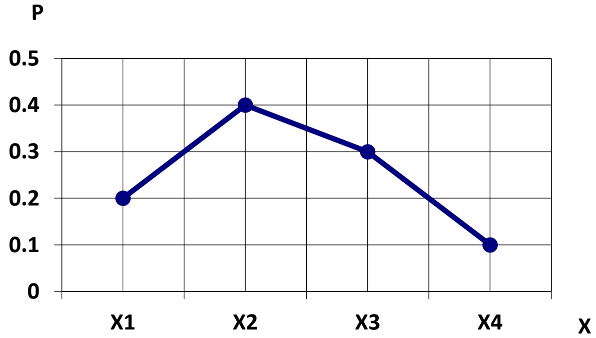


Рис.5.1. Многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины X

При построении многоугольника распределения надо помнить, что соединение полученных точек носит условный характер. В промежутках между значениями случайной величины вероятность не принимает никакого значения. Точки соединены только для наглядности.

Дискретная случайная величина может быть задана также *функцией распределения*

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x}^{n} p_i .$$

Здесь для каждого значения x суммируются вероятности тех значений x_i , которые лежат левее точки x. График функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид (рис.5.2).

В «развернутой» форме

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le x_1; \\ p_1 & \text{при } x_1 < x \le x_2; \\ p_1 + p_2 & \text{при } x_2 < x \le x_3; \\ p_1 + p_2 + p_3 & \text{при } x_3 < x \le x_4; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} & \text{при } x_{n-1} < x \le x_n; \\ 1 & \text{при } x > x_n. \end{cases}$$

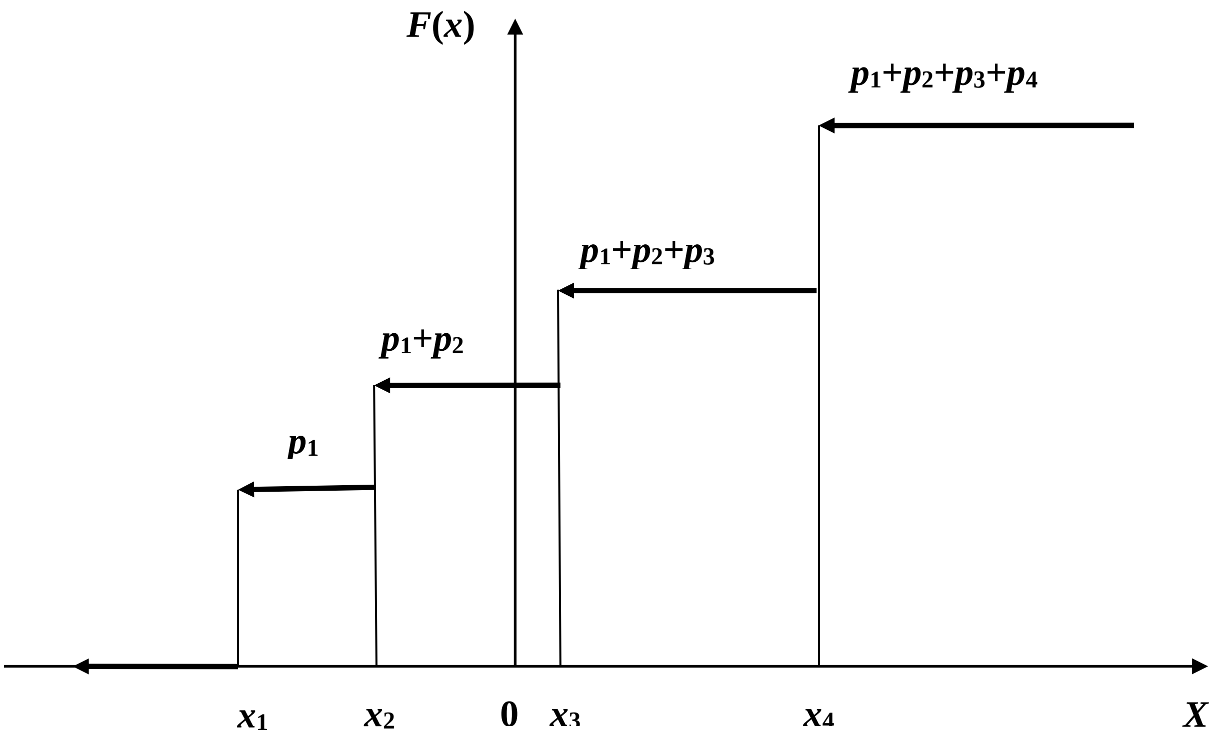


Рис.5.2. Функция распределения дискретной случайной величины X

Как видно, $F(x)$ представляет собой кусочно-постоянную неубывающую функцию, значения которой расположены в промежутке [0; 1], непрерывную в каждой точке слева.

Пример. В лотерее из ста билетов выигрышными являются один билет в 50 рублей, три билета в 25 рублей и шесть билетов по10 рублей. Для случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета найти закон распределения и функцию распределения.

Решение. Множество возможных значений случайной величины X={0;10;25;50}. Найдем соответствующие вероятности этих значений по формуле классической вероятности:

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{100-1-3-6}{100} = 0,90;$$

$$p_2 = P(X = 10) = \frac{6}{100} = 0,06;$$

$$p_3 = P(X = 25) = \frac{3}{100} = 0,03;$$

$$p_4 = P(X = 50) = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Проверим условие нормировки:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,90 + 0,06 + 0,03 + 0,01 = 1.$$

Итак, закон (ряд) распределения имеет вид:

X	0	10	25	50
p	0,90	0,06	0,03	0,01

Найдем функцию распределения $F(x)$ в «развернутой» форме:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ 0,90 & \text{при } 0 < x \le 10; \\ 0,90 + 0,06 & \text{при } 10 < x \le 25; \\ 0,90 + 0,06 + 0,03 & \text{при } 25 < x \le 50; \\ 0,90 + 0,06 + 0,03 + 0,01 & \text{при } x > 50. \end{cases}$$

Окончательно получим

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ 0,90 & \text{при } 0 < x \le 10; \\ 0,96 & \text{при } 10 < x \le 25; \\ 0,99 & \text{при } 25 < x \le 50; \\ 1 & \text{при } x > 50. \end{cases}$$

Числовые характеристики дискретной случайной величины

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако когда невозможно найти закон распределения, или этого не требуется, можно ограничиться нахождением значений, называемых числовыми характеристиками случайной величины.

Основными числовыми характеристиками случайной величины являются *математическое ожидание*, характеризующее среднее значение случайной величины, *дисперсия и среднее квадратическое отклонение*, характеризующие степень рассеяния случайной величины относительно её математического ожидания.

Ограничимся рассмотрением дискретной случайной величины с конечным набором возможных значений.

Определение. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n .$$

Замечание 1. Математическое ожидание называют иногда *взвешенным средним*, так как оно приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины при большом числе опытов.

Замечание 2. Из определения математического ожидания следует, что его значение не меньше наименьшего возможного значения случайной величины и не больше наибольшего.

Замечание 3. Математическое ожидание дискретной случайной величины есть *неслучайная* (постоянная) величина.

Пример. В лотерее из ста билетов выигрышными являются один билет в 50 рублей, три билета в 25 рублей и шесть билетов по10 рублей. Для случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета найти математическое ожидание.

Решение. В предыдущем примере был найден закон распределения данной случайной величины X:

X	0	10	25	50
p	0,90	0,06	0,03	0,01

Искомое математическое ожидание равно

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = 0 \cdot 0,90 + 10 \cdot 0,06 + 25 \cdot 0,03 + 50 \cdot 0,01 = 1,85 .$$

Свойства математического ожидания

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C) = C .$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = CM(X).$$

Свойство 3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Замечание. Это свойство также справедливо для произвольного числа взаимно независимых случайных величин.

Свойство 4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

Замечание. Это свойство также справедливо для произвольного числа случайных величин.

Свойство 5. Математическое ожидание отклонения равно нулю:

$$M((X - M(X)) = 0.$$

Это объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, а другие отрицательны, и в результате их взаимного погашения среднее значение отклонения равно нулю.

Поэтому для характеристики рассеяния случайной величины относительно среднего значения вычисляют среднее значение квадрата отклонения.

Определение. *Дисперсией* (*рассеянием*) дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Замечание. Дисперсия дискретной случайной величины есть *неслучайная* (постоянная) неотрицательная величина.

Дисперсия характеризует степень рассеяния значений случайной величины относительно её математического ожидания. Если все значения случайной величины тесно сконцентрированы около её математического ожидания и большие отклонения от математического ожидания маловероятны, то такая случайная величина имеет малую дисперсию. Если значения случайной величины рассеяны и велика вероятность больших отклонений от математического ожидания, то такая случайная величина имеет большую дисперсию.

Пример. В лотерее из ста билетов выигрышными являются один билет в 50 рублей, три билета в 25 рублей и шесть билетов по10 рублей. Для случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета найти дисперсию.

Решение. В предыдущих примерах были найдены закон распределения данной случайной величины X

X	0	10	25	50
p	0,90	0,06	0,03	0,01

и ее математическое ожидание $M(X) = 1{,}85$.

Искомая дисперсия равна

$$D(X)=(0-1{,}85)^2\cdot 0{,}90+(10-1{,}85)^2\cdot 0{,}06+(25-1{,}85)^2\cdot 0{,}03+(50-1{,}85)^2\cdot 0{,}01=$$

$$=3{,}08025+3{,}98535+16{,}077675+23{,}184225=46{,}3275.$$

Однако *на практике для вычисления дисперсии используется гораздо более удобная для расчетов формула*

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2,$$

которая без особого труда выводится из соотношения, определяющего дисперсию.

В этом случае

$$M(X^2)=0^2\cdot 0{,}90+10^2\cdot 0{,}06+25^2\cdot 0{,}03+50^2\cdot 0{,}01=6+18{,}75+25=49{,}75;$$

$$(M(X))^2=1{,}85^2=3{,}4225;\quad D(X)=49{,}75-3{,}4225=46{,}3275.$$

Свойства дисперсии

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C)=0.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX)=C^2D(X).$$

Свойство 3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Замечание. Это свойство также справедливо для произвольного числа случайных величин.

Следствие. Дисперсия суммы постоянной величины и случайной равна дисперсии случайной величины:

$$D(C+X)=D(X).$$

Действительно, величины *X* и *C*+*X* отличаются лишь началом отсчета и, значит, рассеяны вокруг своих математических ожиданий одинаково.

Свойство 4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

В тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют не дисперсию, а среднее квадратическое отклонение.

Определение. *Средним квадратическим отклонением* случайной величины *X* называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Пример. В лотерее из ста билетов выигрышными являются один билет в 50 рублей, три билета в 25 рублей и шесть билетов по10 рублей. Для случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета найти среднее квадратичное.

Решение. В предыдущих примерах были найдены закон распределения данной случайной величины X и ее дисперсия $D(X) = 46,3275$.

Тогда среднее квадратичное равно $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{46,3275} \approx 6,8064$.

Биномиальное распределение

Рассмотрим *серию из n испытаний*, в каждом из которых событие A может появиться с одной и той же вероятностью p, причем результат каждого испытания не зависит от результатов остальных. Подобная постановка задачи называется *схемой повторения испытаний или схемой Бернулли*. Найдем вероятность того, что в такой серии событие A произойдет ровно m раз (неважно, в какой последовательности). Интересующее нас событие представляет собой сумму равновероятных несовместных событий, заключающихся в том, что A произошло в некоторых m испытаниях и не произошло в остальных $n - m$ испытаниях. Число таких событий равно числу сочетаний из n по m, то есть C_n^m, а вероятность каждого из них: $p^m q^{n-m}$, где $q = 1 - p$ – вероятность того, что в данном опыте A не произошло. Применяя теорему сложения для несовместных событий, получим *формулу Бернулли*:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m = 0,1,2,\ldots,n).$$

Примем число появления события A в каждой из серий за некоторую дискретную случайную величину X.

Чтобы найти закон распределения этой случайной величины, необходимо определить значения случайной величины и их вероятности.

Значения можно найти достаточно просто. Очевидно, что в каждой серии в результате n испытаний событие A может не появиться вовсе, появиться один раз, два раза, три раза и т.д. до n раз. Таким образом, возможные значения X таковы:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2, \ldots,\ x_{n+1} = n.$$

Для нахождения вероятностей этих значений достаточно воспользоваться формулой Бернулли, которая и будет являться аналитическим выражением искомого закона распределения случайной величины X:

$$P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m = 0,1,2,\ldots,n)$$

Определение. Распределение вероятностей дискретной случайной величины, определяемое формулой Бернулли, называется *биномиальным законом распределения*.

Такой закон распределения называют *биномиальным*, поскольку правую часть равенства можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^0 p^n + C_n^1 p^{n-1} q^1 + \ldots + C_n^m p^m q^{n-m} + \ldots + C_n^{n-1} p^1 q^{n-1} + C_n^n q^n .$$

Таким образом, первый член разложения p^n определяет вероятность наступления рассматриваемого события n раз в n независимых испытаниях;

второй член $np^{n-1}q$ определяет вероятность наступления события n–1 раз; …; последний член q^n определяет вероятность того, что рассматриваемое событие не появится ни разу.

Ряд распределения случайной величины, подчиненной биномиальному закону, можно представить в виде таблицы:

m	n	n–1	…	m	…	0
$P_n(m)$	p^n	$np^{n-1}q$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$		q^n

Функция распределения в этом случае определяется формулой

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ C_n^m p^m q^{n-m} & \text{при } 0 < x \le n, \\ 1 & \text{при } x > n. \end{cases}$$

Вероятности $P_n(m)$ при данном n сначала увеличиваются при увеличении m от 0 до некоторого значения m_0, а затем уменьшаются при изменении m от m_0 до n. Поэтому m_0 называется *наивероятнейшим числом* наступления события A в n испытаниях и определяется по формуле

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

В этом неравенстве m_0 может быть только целым числом (если np – целое число, то $m_0 = np$).

Для подсчета вероятностей того, что рассматриваемое событие наступит:

а) менее m раз;

б) более m раз;

в) не менее m раз;

г) не более m раз;

д) число раз, заключенное между m_1 и m_2 $(0 \le m_1 \le m \le m_2 \le n)$;

используют формулы:

а) $P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m-1)$;

б) $P_n(m+1) + P_n(m+2) + ... + P_n(n)$;

в) $P_n(m) + P_n(m+1) + ... + P_n(n)$;

г) $P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m)$;

д) $P_n(m_1) + P_n(m_1+1) + P_n(m_1+2) + ... + P_n(m_2)$.

Для дискретной случайной величины X, распределенной по биномиальному закону,

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq.$$

Пример. Составить ряд распределения случайной величины X – числа попаданий при пяти выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8. Найти наивероятнейшее число попаданий. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Решение. Используя формулу Бернулли при $n = 5$, $p=0,8$ и $q=1–0,8=0,2$, получаем ряд распределения:

$$p(X=0) = 1\cdot(0,2)^5 = 0,00032;\ \ p(X=1) = 5\cdot 0,8\cdot(0,2)^4 = 0,0064;$$

$$p(X=2) = 10\cdot(0,8)^2\cdot(0,2)^3 = 0,0512;\ \ p(X=3) = 10\cdot(0,8)^3\cdot(0,2)^2 = 0,2048;$$

$$p(X=4) = 5\cdot(0,8)^4\cdot 0,2 = 0,4096;\ \ p(X=5) = 1\cdot(0,8)^5 = 0,32768.$$

Таким образом, ряд распределения имеет вид:

m	0	1	2	3	4	5
$P_n(m)$	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32728

Наивероятнейшее число попаданий m_0 должно удовлетворять неравенству

$$5\cdot 0,8-0,2\le m_0\le 5\cdot 0,8+0,8,$$

т.е. $3,8\le m_0\le 4,8$. Отсюда следует, что $m_0 = 4$.

Вычислим математическое ожидание и дисперсию:

$$M(X)=np=5\cdot 0,8=4;\ \ D(X)=npq=5\cdot 0,8\cdot 0,2=0,8.$$

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона является *предельным случаем распределения вероятностей в схеме Бернулли* при очень малых значениях вероятности p и большом числе испытаний n, но при этом произведение $\lambda=np$ остается конечной постоянной величиной:

$$p\to 0;\ n\to\infty;\ np\to\lambda.$$

При указанных допущениях *распределение Пуассона* имеет вид:

$$P_n(m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}.$$

Величина $\lambda=np$ определяет закон Пуассона и называется *параметром распределения*.

Ряд распределения случайной величины, подчиненной закону Пуассона, можно представить в виде таблицы:

m	0	1	2	…	m	…	n
$P_n(m)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	…	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$		$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$

Распределение Пуассона носит также название *закона редких событий*, поскольку оно всегда появляется там, где производится большое число испытаний, в каждом из которых с малой вероятностью происходит “редкое” событие. По закону Пуассона распределены, например, число вызовов, поступивших на телефонную станцию; число сбоев на автоматической линии; число бракованных изделий в большой партии товара; число метеоритов, упавших в определенном районе и т. д.

На практике распределением Пуассона пользуются, когда $p \le 0{,}1$ и $npq \le 10$.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают и равны параметру λ, который определяет этот закон:

$$M(X) = D(X) = \lambda.$$

Это свойство часто применяют на практике для решения вопроса, правдоподобна ли гипотеза о том, что случайная величина распределена по закону Пуассона. Для этого определяют из опыта математическое ожидание и дисперсию. Если их значения близки, то это пуассоновское распределение.

Распределение Пуассона находит широкое применение в статистическом контроле качества продукции. Один из методов контроля состоит в том, что в небольших контрольных партиях, случайно отобранных из готовой продукции, выясняется число X дефектных изделий в каждой партии. Это число есть случайная переменная с распределением Пуассона. Параметр Пуассона – среднее число дефектных изделий, обнаруженных в партиях.

Замечание. Для закона Пуассона имеются специальные таблицы, пользуясь которыми, можно найти $P_n(m)$, зная m и λ.

Пример. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p = 0,002. Какова вероятность того, что при 1000 испытаниях событие A появится 5 раз?

Решение. По условию n = 1000; p = 0,002; m = 5. Так как p = 0,002<0,1 и $npq = 1000 \cdot 0{,}002 \cdot 0{,}998 = 1{,}996 \le 10$, то можно воспользоваться распределением Пуассона при $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$. Получим

$$P_{1000}(5) = \frac{2^5}{5!} e^{-2} = \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{e^2} = 0{,}2667 \cdot 0{,}1354 = 0{,}0361.$$

Определение. *Потоком событий* называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

Примеры: поступление вызовов на станцию скорой помощи, прибытие самолетов в аэропорт, клиентов в пункт сервиса, покупателей в магазин и т.д.

Определение. *Простейшим* (*пуассоновским*) – называется поток событий, обладающий следующими свойствами:

- *ординарность*: вероятность появления двух и более событий ничтожно мала по сравнению с вероятностью появления только одного события;
- *отсутствие последствий*: вероятность появления m событий на любом промежутке времени не зависит от того, появлялись ли события раньше;
- *стационарность:* в одинаковые промежутки времени вероятность происхождения события одинакова.

Определение. *Интенсивностью потока* λ называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Можно доказать, что если постоянная интенсивность потока λ известна, то *вероятность появления* m *событий простейшего потока за время длительностью* t *определяется формулой Пуассона*

$$P_t(m)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}.$$

Пример. Среднее число вызовов, поступающих на АТС за 1 мин., равно двум. Найти вероятность того, что за 4 мин. поступит:

а) четыре вызова;

б) менее четырех вызовов;

в) не менее четырех вызовов.

Поток вызовов предполагается простейшим.

Решение. По условию интенсивность потока $\lambda = 2$. Используя формулу Пуассона для простейшего потока, найдем вероятности возможных значений случайной величины X – числа вызовов на АТС за время $t = 4$ мин.

Из таблицы для распределения Пуассона при $\lambda t = 8$ находим:

$$P(X=0)=0{,}0003;\ \ P(X=1)=0{,}0027;\ \ P(X=2)=0{,}0107;$$

$$P(X=3)=0{,}0286;\ \ P(X=4)=0{,}0572.$$

Теперь определим искомые вероятности:

а) $P(X=4)=0{,}0573$;

б) $P(X<4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$
$=0{,}0003+0{,}0027+0{,}0107+0{,}0286=0{,}0423;$

в) $P(X\ge 4)=1-P(X<4)=1-0{,}0423=0{,}9577$.

Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с одной и той же вероятностью p, или не появиться с вероятностью $q=1-p$, причем результат каждого испытания не зависит от результатов остальных. Испытания заканчиваются, как только появится событие A. Таким образом, если событие A появилось в k-м испытании, то в предшествующих $k-1$ испытаниях оно не появлялось.

Найдем вероятность первого появления события A в k-м испытании. Пусть X – число испытаний, которое необходимо провести до первого появления события A. Тогда X – дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1=1,\ x_2=2,\dots,x_k=k$.

Если событие A появилось в первом испытании, то $P(X=1)=p$.

Если событие A появилось во втором испытании, то по теореме умножения вероятностей независимых событий $P(X=2)=qp$.

Если событие A появилось в третьем испытании, то по теореме умножения вероятностей независимых событий $P(X=3)=q^2p$.

………………………………………………………………………………..

Если событие A появилось в k-м испытании, то по теореме умножения вероятностей независимых событий $P(X=k)=q^{k-1}p$.

В итоге получили *ряд распределения*:

X	1	2	3	…	k
$P(k)$	p	qp	q^2p	…	$q^{k-1}p$

которое называется *геометрическим распределением* и описывается *формулой*

$$P(X=k)=q^{k-1}p.$$

Свое название геометрическое распределение получило в связи с тем фактом, что члены его ряда распределения

$$p,\ qp,\ q^2p,\ \dots,\ q^{k-1}p,\ \dots$$

образуют убывающую геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q ($0<q<1$).

Математическое ожидание и дисперсия геометрического распределения

$$M(X)=\frac{1}{p},\ D(X)=\frac{q}{p^2}.$$

Пример. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p=0,8$. Найти вероятность того, что попадание произойдет при четвертом выстреле.

Решение. Искомая вероятность находится по формуле:

$$P(X=k)=q^{k-1}p.$$

По условию, $p=0,8$, $q=0,2$, $k=4$. Получаем

$$P(X=4)=0,2^3\cdot 0,8=0,0064$$

Гипергеометрическое распределение

Пусть в партии из N изделий имеется M стандартных ($M<N$). Из партии случайно отбирают n изделий (каждое изделие извлекается с одинаковой вероятностью), причем отобранное изделие перед отбором следующего не возвращается в партию. Обозначим через X случайную величину – число m стандартных изделий среди n отобранных. Очевидно, X принимает значения: 0,1, 2,…, min (M, n).

Найдем вероятность $P(X=m)$ того, что среди n отобранных деталей ровно m стандартных, для чего используем формулу классической вероятности.

Общее число всех равновозможных несовместных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь n изделий из N изделий – числу сочетаний C_N^n.

Число исходов, благоприятствующих событию $X=m$, найдем следующим образом: m стандартных изделий можно извлечь из M стандартных изделий C_M^m способами, при этом остальные $n-m$ изделий должны быть нестандартными; взять же $n-m$ нестандартных изделий из $N-M$ нестандартных изделий можно C_{N-M}^{n-m} способами. Следовательно, по принципу логического умножения число благоприятствующих исходов равно $C_M^mC_{N-M}^{n-m}$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию $X = m$, к числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов:

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Полученная формула описывает *гипергеометрический закон распределения.*

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины m, распределенной по гипергеометрическому закону, определяются формулами:

$$M(m) = n\frac{M}{N}, \quad D(m) = n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right).$$

Пример. В ящике из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. Применяя формулу для гипергеометрического распределения при $N = 10$, $M = 7$, $n = 6$, $m = 4$, находим искомую вероятность:

$$P(4) = \frac{C_7^4 C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{7!}{4!\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!}:\frac{10!}{6!\cdot 4!} = 0,5$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задача 1. Какие из перечисленных ниже случайных величин являются дискретными:

1) число попаданий в мишень при десяти независимых выстрелах;
2) отклонение размера обрабатываемой детали от стандарта;
3) число нестандартных изделий, оказавшихся в партии из 100 изделий;
4) число очков, выпавших на верхней грани при одном подбрасывании игрального кубика?

Задача 2. Перечислите все возможные значения случайной величины X, являющейся числом отличных оценок на экзамене в группе, состоящей из 25 студентов.

Задача 3. Какие возможные значения может принимать случайная величина X, означающая число образцов сплавов, используемых при испытании до первого разрушения или до полного израсходования всех образцов, если их имеется 6 штук?

Задача 4. Задают ли законы распределения дискретной случайной величины следующие таблицы?

а)

X	2	3	4	5
p	0,1	0,4	0,3	0,2

б)

X	6	7	8	9
p	0,1	0,2	0,3	0,5

Задача 5. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
p	0,1	0,2	0,4	p_4	0,1

Чему равна вероятность $p_4 = P(X = 0{,}8)$?
Построить многоугольник распределения. Найти функцию распределения этой случайной величины. Построить график функции распределения.

Задача 6. Закон распределения дискретной случайной величины задан следующей таблицей:

X	0	1	2	3
p	0,2	0,4	0,3	0,1

Построить многоугольник распределения. Найти функцию распределения этой случайной величины. Построить график функции распределения.

Задача 7. Подбрасываются две симметричные монеты, подсчитывается число гербов на обеих верхних сторонах монет. Рассматривается дискретная случайная величина X – число выпадений гербов на обеих монетах. Записать закон распределения случайной величины X. Построить многоугольник распределения.

Задача 8. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается число очков, выпавших на обеих верхних гранях. Найти закон распределения дискретной случайной величины X – суммы выпавших очков на двух игральных кубиках. Построить многоугольник распределения.

Задача 9. В лотереи из ста билетов выигрышными являются один билет в 50 рублей, три билета в 25 рублей и пять билетов по10 рублей. Для случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета найти:

а) закон распределения;

б) функцию распределения;

в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Задача 10. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X – числа очков, выпадающих при подбрасывании игрального кубика.

Задача 11. Подбрасывают два кубика. Составить ряд распределения дискретной случайной величины X – суммы очков на обоих кубиках. По полученному ряду распределения построить многоугольник распределения, построить функцию распределения, вычислить числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Задача 12. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения:

X	-4	-2	0	2	4
p	0,1	0,2	0,15	0,25	0,3

Записать законы распределения случайных величин $3X, X^2$. Найти математические ожидания, дисперсии и средние квадратические отклонения случайных величин $X, 3X, X^2$.

Задача 13. Найти математическое ожидание случайной величины $Y = 2X + 5$, если известно, что $M(X) = 4$.

Задача 14. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,9. Какова вероятность того, что из 5 выстрелов: а) ровно 3 будут удачными; б) не менее трех будут удачными; в) более трех будут удачными.

Задача 15. В городе 10 коммерческих банков. У каждого риск банкротства в течение года составляет 10%.

а) Составьте ряд распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года; постройте полигон распределения.

б) Найдите числовые характеристики этого распределения.

в) Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график.

г) Чему равна вероятность того, что в течение года обанкротятся не больше одного банка?

Задача 16. Оптовая база снабжает 90 магазинов. Вероятность заявки на данный день от каждого магазина p = 0,4. Найти наивероятнейшее число заявок на данный день.

Задача 17. При введении вакцины против полиомиелита иммунитет создается в 99,99% случаев. Какова вероятность того, что из 1000 вакцинированных детей заболеет: а) 2 ребенка; б) менее 3 детей?

Задача 18. На предприятии 1000 единиц оборудования определенного вида. Вероятность отказа единицы оборудования в течение часа составляет 0,001.

а) Составьте ряд распределения числа отказов оборудования в течение часа.

б) Найдите числовые характеристики этого распределения.

в) Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график.

г) Чему равна вероятность того, что в течение часа откажут как минимум 2 единицы оборудования?

Задача 19. В течение семестра преподаватели проводят консультации по вопросам, которые остались неясными для студентов. Преподаватель, проводящий консультации по статистике, заметил, что в среднем восемь студентов посещают его за час консультационного времени, хотя точное число студентов, посещающих консультацию в определенный день, в назначенный час, – случайная величина.

а) Составьте ряд распределения числа студентов, посещающих консультации преподавателя по статистике в течение часа.

б) Найдите числовые характеристики этого распределения.

в) Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график.

г) Чему равна вероятность того, что трое студентов придут на консультацию в течение определенного получаса?

Задача 20. В течение часов-пик в общественном транспорте города происходит в среднем два дорожных происшествия в час. Утреннее время пик длится полтора часа, а вечернее – два часа.

а) Составьте ряды распределения числа дорожных происшествий в утренние и вечерние часы пик и постройте их полигоны распределений.

б) Найдите числовые характеристики этих распределений;

в) Запишите функции распределений вероятностей и постройте их графики.

г) Чему равна вероятность того, что в определенный день в течение и утреннего, и вечернего времени не произойдет ни одного дорожного происшествия?

Задача 21. Производится бросание игральной кости до первого выпадения шести очков. Требуется составить ряд распределения числа бросаний, найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Найти вероятность того, что первое выпадение шестерки произойдет при втором бросании игральной кости.

Задача 22. Вероятность поражения цели равна 0,6. Производится стрельба по мишени до первого попадания (число патронов не ограничено). Требуется составить ряд распределения числа сделанных выстрелов, найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Определить вероятность того, что для поражения цели потребуется не более трёх патронов.

Задача 23. Из 10 лотерейных билетов выигрышными являются 3. Составить закон распределения числа выигрышных билетов среди купленных наудачу 4 билетов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Задача 24. В национальной лотерее «6 из 45» денежные призы получают участники, угадавшие от трёх до шести чисел из случайно отобранных 6 из 45 (размер выигрыша увеличивается с увеличением числа угаданных чисел). Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – числа угаданных чисел среди случайно отобранных шести. Какова вероятность получения денежного приза?

Задача 25. В магазине имеется 15 автомобилей определенной марки. Среди них – 7 автомобилей черного цвета, 6 – серого и 2 – белого. Представители фирмы обратились в магазин с предложением о продаже им трех автомобилей этой марки, безразлично какого цвета.

а) Составьте ряд распределения числа проданных автомобилей черного цвета при условии, что автомобили отбирались случайно и постройте его полигон распределения.

б) Найдите числовые характеристики этого распределения.

в) Напишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график.

г) Какова вероятность того, что среди проданных фирме автомобилей окажется, по крайней мере, 2 автомобиля черного цвета?

Практическое занятие №4. Дискретные и непрерывные случайные величины. (2ч.)

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Определение непрерывной случайной величины

Напомним определение непрерывной случайной величины.

Определение. Случайная величина называется *непрерывной*, если множество ее возможных значений целиком заполняет некоторый конечный или бесконечный промежуток.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Примеры:

1) температура, давление и влажность воздуха;

2) расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия;

3) продолжительность работы электрической лампы.

Множества возможных значений для перечисленных случайных величин – это промежутки действительных чисел, являющихся промежутками возможных диапазонов изменений соответствующих физических величин.

Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение. Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называется функция, определяющая вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Геометрически это равенство означает следующее: $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина X примет значение, которое изображается точкой на числовой прямой, расположенной слева от точки x.

Вероятность того, что случайная величина X примет значения из полуинтервала $[\alpha, \beta)$, равна разности значений ее функции распределения $F(x)$ на концах этого полуинтервала:

$$P(\alpha \le x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Функцию распределения F(x) называют также *интегральной функцией*, или *интегральным законом* распределения случайной величины X.

Из определения функции распределения и свойств вероятности следуют

Свойства функции распределения

Свойство 1. Все значения функции распределения принадлежат отрезку [0;1]:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Свойство 2. Функция распределения является неубывающей функцией:

$$F(x_2) \ge F(x_1) \text{ для } x_2 > x_1.$$

Свойство 3. Функция распределения в точке x_0 непрерывна слева:

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0).$$

Свойство 4. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a,b), то для ее функции распределения $F(x)$:

$$F(x)=0 \text{ при } x \le a,$$

$$F(x)=1 \text{ при } x \ge b.$$

Свойство 5. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат бесконечному интервалу $(-\infty;+\infty)$, то для ее функции распределения $F(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0, \quad \lim_{x\to+\infty} F(x)=1.$$

На основании свойств функции распределения $F(x)$ можно судить об особенностях ее графика (рис.6.1).

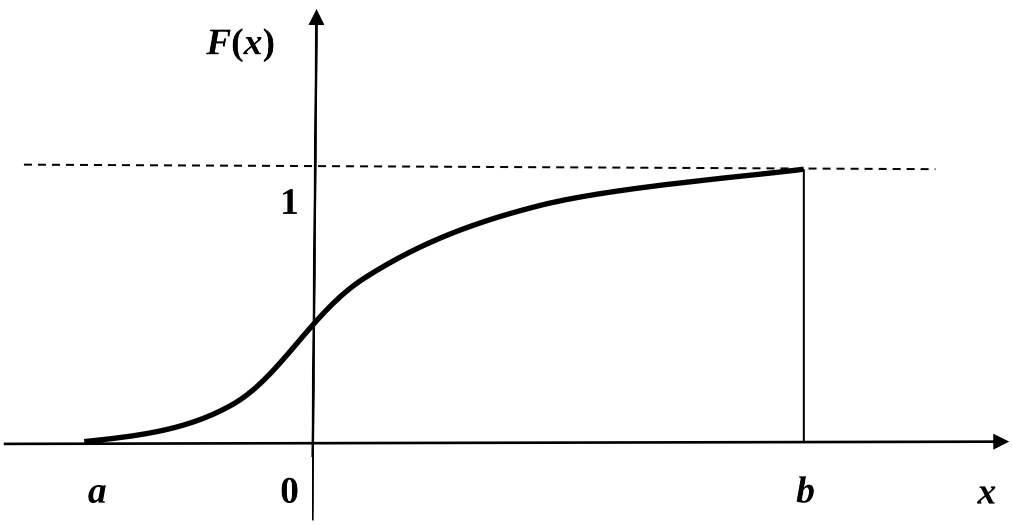


Рис.6.1. График функции распределения $F(x)$

Таким образом, функция распределения $F(x)$ везде непрерывна и имеет непрерывную производную.

Если X – непрерывная случайная величина, то вероятность того, что она примет одно, заданное определенное значение, рана нулю:

$$P(X=\alpha)=0,$$

поэтому выполняются равенства:

$$P(\alpha \le X \le \beta)=P(\alpha < X \le \beta)=P(\alpha \le X < \beta)=P(\alpha < X < \beta),$$

$$P(\alpha < X < \beta)=F(\beta)-F(\alpha),$$

$$P(\alpha \le X \le \beta)=F(\beta)-F(\alpha).$$

Плотность распределения непрерывной случайной величины

Определение. *Плотностью распределения вероятностей* случайной величины X называется функция вида:

$$f(x)=F'(x),$$

где $F(x)$ – функция распределения случайной величины X.

Плотность распределения называют также *плотностью вероятности* или *дифференциальной функцией распределения*.

График функции $f(x)$ называется *кривой распределения вероятностей*.

Смысл функции плотности распределения состоит в том, что она показывает как часто появляется случайная величина X в некоторой окрестности точки x при повторении опытов.

Очевидно, функция распределения $F(x)$ является первообразной для плотности распределения $f(x)$.

Из определения функции распределения и свойств вероятности следуют

Свойства плотности распределения

1) Плотность распределения $f(x)$ – неотрицательная функция:

$$f(x) \geq 0.$$

2) Функция распределения $F(x)$ находится по известной плотности распределения $f(x)$ по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

3) Вероятность попадания случайной величины X в интервал (α, β) определяется формулой

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

Из геометрического смысла определенного интеграла следует, что вероятность попадания непрерывной случайной величины X в заданный интервал (α, β) равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $f(x)$.

4) Условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Если все возможные значения случайной величины X принадлежат отрезку $[a,b]$, то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1,$$

так как $f(x) = 0$ вне этого отрезка.

Пример. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \dfrac{x}{2} & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения и вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение из интервала (1;2).

Решение. Согласно свойствам 2 и 3 плотности распределения получаем:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Искомая вероятность

$$P(1 < x < 2) = F(2) - F(1) = \int_1^2 \frac{x}{2} dx = \left. \frac{x^2}{4} \right|_1^2 = \frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Определение. *Математическим ожиданием* непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a,b]$, называется определенный интеграл:

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx,$$

где $f(x)$ – плотность распределения непрерывной случайной величины X.

Если возможные значения непрерывной случайной величины X принадлежат всей оси Ox, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Предполагается, что несобственный интеграл в правой части равенства сходится абсолютно.

Определение. *Дисперсией* непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения.

Если возможные значения непрерывной случайной величины X принадлежат отрезку $[a,b]$, то дисперсия

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x) dx.$$

Если возможные значения непрерывной случайной величины X принадлежат всей оси Ox, то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx.$$

Предполагается, что несобственный интеграл в правой части равенства сходится абсолютно.

Определение. *Средним квадратическим отклонением* непрерывной случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Для числовых характеристик непрерывных случайных величин справедливы те же свойства, что и для дискретных случайных величин.

Пример. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана функцией

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \frac{x}{2} & \text{при } 0<x\le 2,\\ 0 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. Согласно определению математического ожидания получаем:

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{6}\Big|_0^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

Согласно определению дисперсии получаем:

$$D(X)=\int_a^b[x-M(X)]^2 f(x)dx=\int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{16}{9}x\right)dx==\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{8}{9}x^3+\frac{8}{9}x^2\right)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\left(4-\frac{64}{9}+\frac{32}{9}\right)=\frac{2}{9}.$$

Согласно определению среднего квадратического отклонения получаем:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Равномерное распределение

Определение. Распределение вероятностей непрерывной случайной величины X называется *равномерным* на отрезке $[a,b]$, если плотность распределения $f(x)$ этой величины постоянна на данном отрезке и равна нулю вне этого отрезка:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<a,\\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a\le x\le b,\\ 0 & \text{при } x>b.\end{cases}$$

График плотности $f(x)$ равномерного распределения представлен на рис.6.2.

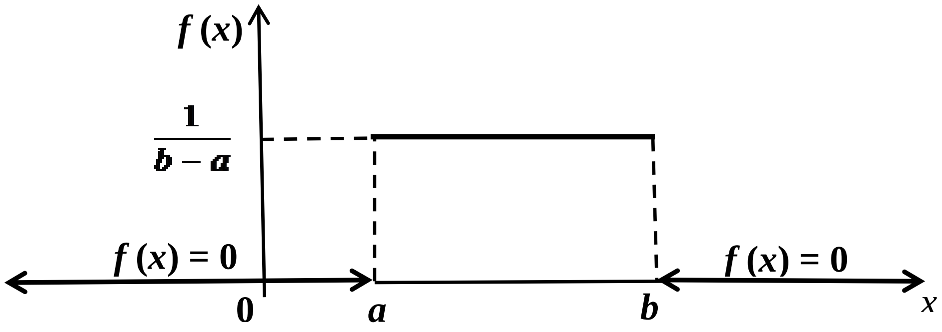


Рис.6.2.График плотности $f(x)$ равномерного распределения

Функция распределения $F(x)$ равномерно распределённой случайной величины равна

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a \le x \le b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

График функции распределения $F(x)$ равномерного распределения представлен на рис.6.3.

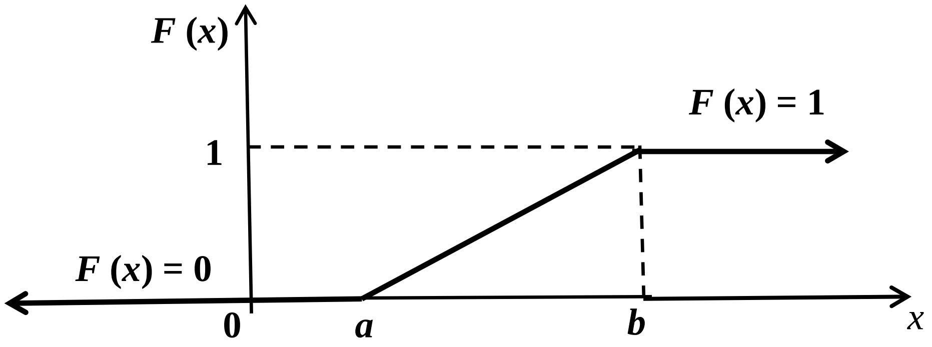


Рис.6.3.График функции распределения $F(x)$ равномерного распределения

Для равномерного распределения все значения из промежутка $[a,b]$ возможны *в одинаковой степени*, причем ни одно из значений не имеет преимуществ перед другими.

Равномерно распределенная случайная величина имеет практическое применение в имитационном моделировании, выступая основой генерирования любых случайных величин, потоков и случайных процессов.

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$, определяются формулами:

$$M(X) = \frac{b+a}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример. Автобусы некоторого маршрута идут с интервалом 5 минут. Найти вероятность того, что пришедшему на остановку пассажиру придется ожидать автобуса не более 2 минут. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – времени ожидания автобуса.

Решение. Время ожидания автобуса является непрерывной случайной величиной X, равномерно распределенной в промежутке [0, 5]. Плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{5-0} = \frac{1}{5}.$$

Вероятность того, что пришедшему на остановку пассажиру придется ожидать автобуса не более 2 минут, равна

$$P(0 \le x \le 2) = F(2) - F(0) = \int_0^2 \frac{1}{5}dx = \frac{x}{5}\Big|_0^2 = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Вычислим математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X:

$$M(X) = \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2};\ D(X) = \frac{(5-0)^2}{12} = \frac{25}{12};\ \sigma(X) = \sqrt{\frac{25}{12}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

Показательное распределение

Определение. Распределение вероятностей непрерывной случайной величины X называется *показательным* (*экспоненциальным*), если плотность распределения $f(x)$ этой величины определяется функцией:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \ge 0. \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

График плотности $f(x)$ показательного распределения представлен на рис.6.4.

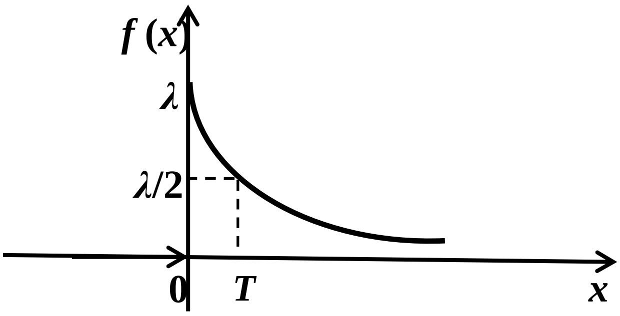


Рис.6.4.График плотности $f(x)$ показательного распределения

Функция распределения $F(x)$ показательно распределённой случайной величины равна

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при } x\geq 0.\end{cases} \quad (\lambda>0)$$

График функции распределения $F(x)$ показательного распределения представлен на рис.6.5.

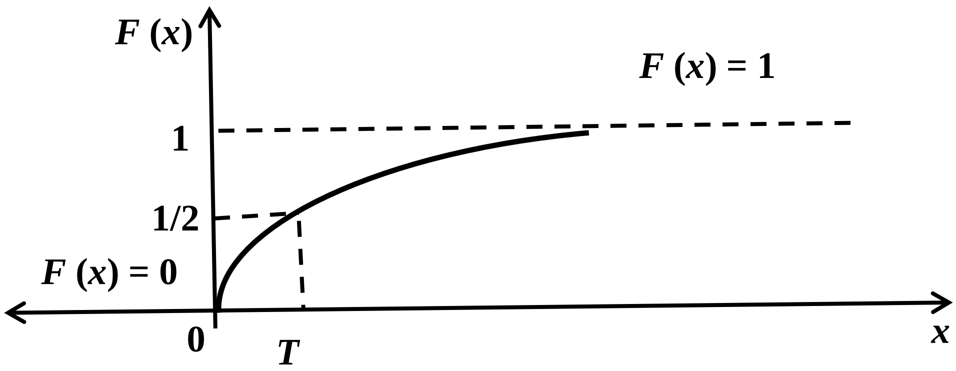


Рис.6.5.График функции распределения $F(x)$ показательного распределения

Можно найти вероятность попадания показательно распределенной случайной величины в интервал $(a,\ b)$:

$$P(a<x<b)=F(b)-F(a)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Значения функции e^{-x} можно найти из таблиц.

Показательный закон определяется только одним параметром λ. В этом преимущество этого закона, так как обычно параметры распределения заранее не известны и их приходится оценивать приближенно. Понятно, что оценить один параметр проще, чем несколько.

Показательно распределенная случайная величина может принимать только положительные значения.

Показательный закон характерен для распределения случайных величин, изменение которых обусловлено влиянием доминирующего фактора.

Показательному распределению подчинено, например, время распада атомов различных элементов:

$$N(t)=N_0(1-e^{-\lambda t}),$$

где $N(t)$ – число распавшихся атомов в момент времени t, N_0 - число атомов в начальный момент времени $t = 0$.

Показательному распределению подчинены также поток вызовов на телефонной станции, продолжительность телефонного разговора, поток заявок в системе массового обслуживания и др.

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной показательно распределенной случайной величины *X* определяются формулами:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\ \ D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

<u>Нормальное распределение</u>

Случайная величина подчиняется нормальному распределению, когда она подвержена влиянию огромного числа случайных помех.

Нормальный закон наблюдается, когда на измеряемую случайную величину действуют разнообразные факторы, не связанные между собой и равнозначно действующие на случайную величину.

Нормальное распределение или распределение Гаусса является наиболее универсальным, удобным и широко применяемым

Нормальное распределение играет исключительно важную роль в теории вероятностей и занимает среди других законов распределения особое положение. Это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения.

Главная особенность, выделяющая нормальный закон среди других законов, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях.

Нормальное распределение имеет очень широкое распространение в прикладных задачах. Это связано с тем, что в реальной жизни многие исследуемые случайные величины являются следствием различных случайных событий. В частности, при достаточно общих предположениях имеет место *центральная предельная теорема Ляпунова*: Если случайная величина *X* представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то *X* имеет распределение, близкое к нормальному.

На практике для большинства случайных величин выполняются условия теоремы Ляпунова, поэтому многие случайные величины распределены нормально или почти нормально. Например: ошибки прямых измерений; ошибки стрельбы, наведения; отклонение напряжения в сети от номинала; суммарная выплата страхового общества за большой период; дальность полета снаряда; частота события при большом числе опытов; рост мужчин (женщин) одного возраста и национальности.

Так, рост людей хорошо описывается нормальным распределением в связи с тем, что на рост влияют разнообразные независимые случайные факторы: климат, экология окружающей среды, экономические условия, болезни и т.д.

Определение. Распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X* называется *нормальным или распределением Гаусса*, если плотность распределения $f(x)$ этой величины определяется функцией:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}};\quad -\infty<x<+\infty;\ \sigma>0\ .$$

Таким образом, нормальное распределение определяется двумя параметрами: a и σ. Постоянные a и σ $(\sigma>0)$ называются *параметрами нормального распределения*.

График плотности нормального распределения называют *нормальной кривой* (*кривой Гаусса*).

Нормальная кривая обладает следующими *свойствами*:

1) Функция определена на всей числовой оси.

2) $f(x)>0$ при любом x, следовательно, весь график расположен выше оси Оx.

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, то есть ось О$x$ служит горизонтальной асимптотой графика.

4) Функция $f(x)$ в точке $x=a$ имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

5) График функции $f(x)$ симметричен относительно прямой $x=a$, так как $f(x-a)=f(a-x)$.

6) Точки $\left(a-\sigma,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ и $\left(a+\sigma,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ являются точками перегиба графика функции $f(x)$.

Изменение параметра σ ведет к изменению формы кривой: чем меньше σ, тем кривая круче; при увеличении σ кривая становится более пологой (рис.6.6).

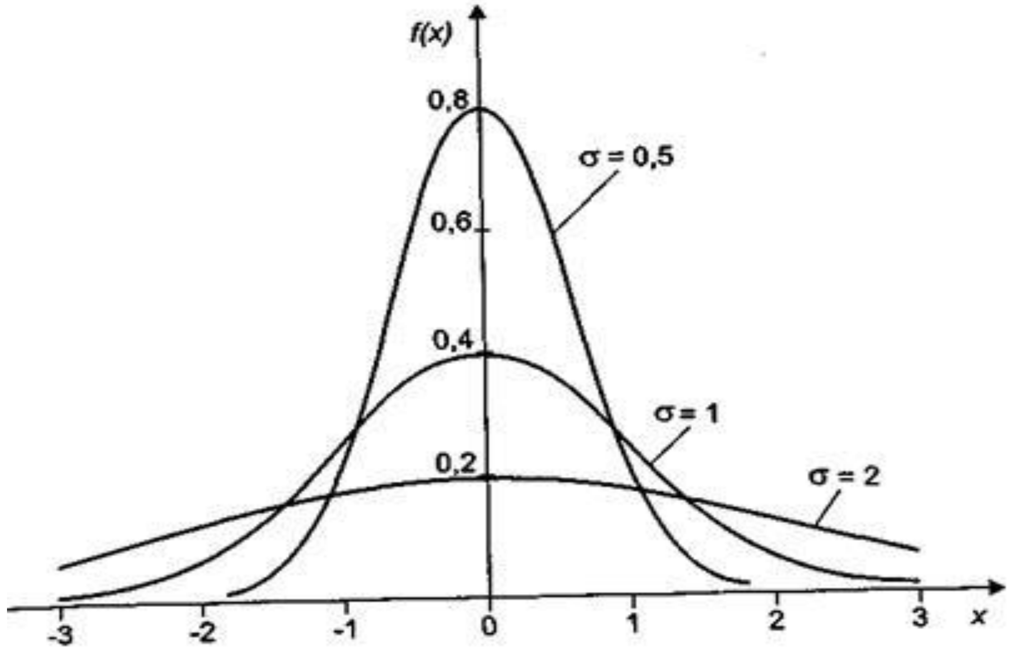


Рис.6.6.График плотности $f(x)$ нормального распределения при $a=0$

Если $a > 0$, то график плотности $f(x)$ сместится в положительном направлении, если $a < 0$ – в отрицательном. При $a = 0$ и $\sigma = 1$ кривая называется *нормированной*.

Определение. *Стандартным нормальным распределением* $N(0;1)$ называется нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$.

Плотность распределения стандартного нормального распределения обозначают обычно

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad -\infty < x < +\infty .$$

Значения этой функции затабулированы.

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной показательно распределенной случайной величины X определяются формулами:

$$M(X) = a, \;\; D(X) = \sigma^2 .$$

Следовательно, параметры нормального распределения a и σ равны соответственно математическому ожиданию и среднему квадратическому отклонению исследуемой случайной величины.

Функция распределения $F(x)$ нормально распределённой случайной величины равна

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx .$$

График функции распределения $F(x)$ нормального распределения представлен на рис.6.7 ($m = a$).

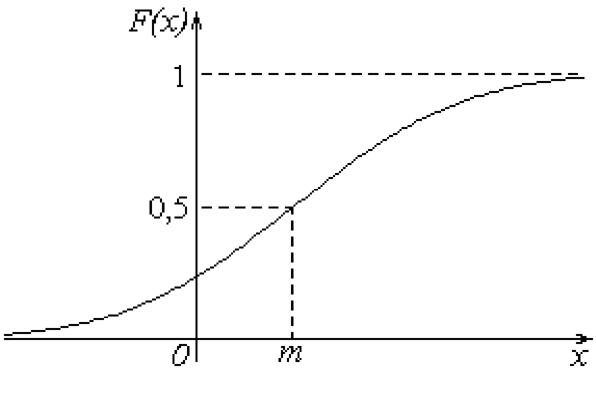


Рис.6.7.График функции распределения $F(x)$ нормального распределения

Вероятность попадания значений случайной величины X, распределённой по нормальному закону, в промежуток (α, β) определяется формулой:

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

которая в литературе часто называется *интегральной теоремой Лапласа*.

Здесь $\Phi(x)$ – *функция Лапласа*:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

а функция нормального распределения

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Функция Лапласа обладает следующими *свойствами*:

1. $\Phi(x)$ определена при всех значениях x.
2. $\Phi(0)=0$.
3. $\Phi(-\infty)=-\frac{1}{2}$.
4. $\Phi(+\infty)=\frac{1}{2}$.
5. $\Phi(x)$ монотонно возрастает при всех $x\in(-\infty,+\infty)$.
6. $\Phi(x)$ – функция нечетная: $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

Значения этой функции при различных значениях x посчитаны и приводятся в специальных таблицах.

Пример. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a = 10$, $\sigma = 2$. Найти вероятность того, что она примет значение из интервала (8;16).

Решение. Используя формулу вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал (интегральную теорему Лапласа) и свойство нечетности функции Лапласа, получаем:

$$P(8<x<16)=\Phi\left(\frac{16-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{8-10}{2}\right)=\Phi(3)-\Phi(-1)=\Phi(3)+\Phi(1)=$$

$$=0,49865+0,34134=0,83999\approx 0,84.$$

Значения $\Phi(3)$ и $\Phi(1)$ найдены с помощью таблицы значений функции Лапласа.

С помощью функции Лапласа определяется и вероятность заданного отклонения нормальной случайной величины от ее математического ожидания.

Если $\alpha=a-\delta,\ \beta=a+\delta$, где δ – произвольное число, то границы интервала (α,β) симметричны относительно математического ожидания a, и

$$P(a-\delta<X<a+\delta)=P(|X-a|<\delta)=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Таким образом

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Пример. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a = 10$, $\sigma = 2$. Найти вероятность того, что она примет значение из интервала (9;11).

Решение. Используя формулу вероятности заданного отклонения нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания для симметричного относительно математического ожидания a = 10 интервала, получаем при $\delta = 1$ и $\sigma = 2$:

$$P(|X-10|<1) = 2\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\Phi(0,5) = 2\cdot 0,1915 = 0,383.$$

Значение Ф(0,5) найдено с помощью таблицы значений функции Лапласа.

Нормально распределенная случайная величина с большой вероятностью принимает значения, близкие к своему математическому ожиданию.

Используя последовательно формулу вероятности заданного отклонения нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания для $\delta = \sigma,\ \delta = 2\sigma,\ \delta = 3\sigma$, получим:

$$P(|X-a|<\sigma) = 2\Phi(1) = 2\cdot 0,3413 = 0,6826,$$

$$P(|X-a|<2\sigma) = 2\Phi(2) = 2\cdot 0,4772 = 0,9544,$$

$$P(|X-a|<3\sigma) = 2\Phi(3) = 2\cdot 0,49865 = 0,9973.$$

Значения Ф(1), Ф(2), Ф(3) найдены с помощью таблицы значений функции Лапласа.

Последнее равенство

$$P(|X-a|<3\sigma) = 0,9973$$

выражает *правило трех сигм*: если случайная величина распределена по нормальному закону, то ее отклонение от математического ожидания практически (с вероятностью 0,9973) не превышает $\pm 3\sigma$.

Таким образом, на интервале $(a-\sigma, a+\sigma)$ расположено 68,3% значений случайной величины; на интервале $(a-2\sigma, a+2\sigma)$ расположено 95,4% значений случайной величины; а на интервале $(a-3\sigma, a+3\sigma)$ расположено 99,7% значений случайной величины (рис.6.8).

На практике можно считать, что *все* возможные значения нормально распределенной случайной величины лежат в интервале $(a-3\sigma, a+3\sigma)$.

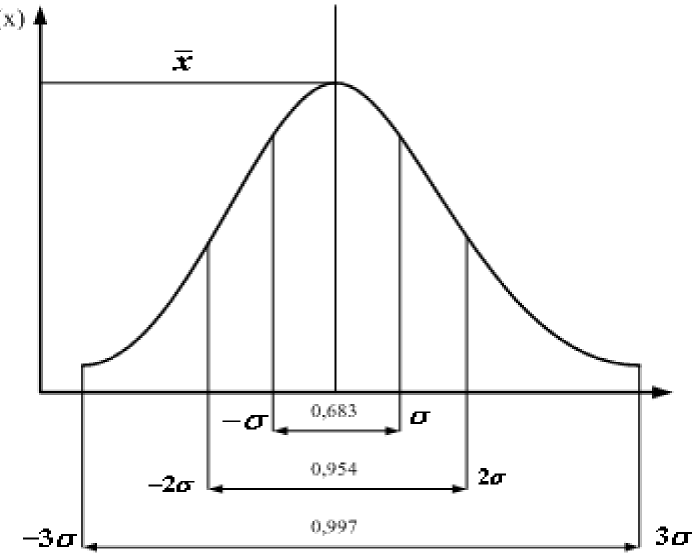


Рис.6.8. Вероятности заданного отклонения δ нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания $a = \bar{x}$ для $\delta = \sigma,\ \delta = 2\sigma,\ \delta = 3\sigma$

Нужно отметить, что *при* $p \neq 0$ и $p \neq 1$ *и достаточно большом числе испытаний* n *биномиальное распределение близко к нормальному распределению, причем их математические ожидания и дисперсии совпадают*:

$$M(X) = np = a, \quad D(X) = npq = \sigma.$$

Тогда вместо формулы для биномиального распределения

$$P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (m = 0, 1, 2, ..., n)$$

можно пользоваться формулой для нормального распределения

$$P_n(X = m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \text{ где } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}},$$

которая в литературе часто называется *локальной теоремой Лапласа*.

Формула нормального распределения

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

для биномиального распределения при больших n примет вид

$$P(|m - np| < \delta) \approx 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{npq}}\right),$$

или, применительно к относительной частоте m/n с числовыми характеристиками

$$M\left(\frac{m}{n}\right) = p \text{ и } \sigma^2\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n},$$

аналогичный вид

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\delta\right)\approx 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right)=2\Phi\left(\delta\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Пример. Фирма собирается приобрести партию из 100 000 единиц некоторого товара. Из прошлого опыта известно, что 1% товаров данного типа имеют дефекты. Найти вероятность того, что в данной партии окажется 1020 дефектных единиц товара.

Решение. Так как число испытаний n=100 000 – достаточно велико, то можно применить локальную теорему Лапласа при $p=0,01$; $q=0,99$; $m=1020$.

Вычислим

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{1020-100000\cdot 0,01}{\sqrt{100000\cdot 0,01\cdot 0,99}}=\frac{1020-1000}{31,4643}=0,64.$$

Найдем $\varphi(x)$ по таблице плотности вероятностей стандартной нормальной случайной величины:

$$\varphi(0,64)=0,3251.$$

Тогда искомая вероятность

$$P_{100000}(1020)\approx\frac{0,3251}{\sqrt{100000\cdot 0,01\cdot 0,99}}=0,0103\ .$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задача 1. Какие из перечисленных ниже случайных величин являются непрерывными:

1) число попаданий в мишень при десяти независимых выстрелах;
2) отклонение размера обрабатываемой детали от стандарта;
3) температура окружающего воздуха;
4) число очков, выпавших на верхней грани при одном подбрасывании игрального кубика;
5) срок службы электрической лампочки?

Задача 2. Интегральная функция распределения вероятностей случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=A+B\cdot arctgx,\quad -\infty<x<+\infty.$$

Найдите параметры A и B.

Задача 3. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ x \text{ при } 0<x\le 1,\\ 1 \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание и дисперсию.

Задача 4. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ \dfrac{x^2}{9} \text{ при } 0<x\le 3,\\ 0 \text{ при } x>3.\end{cases}$$

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала (1;2).

Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Задача 5. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ ax \text{ при } 0\le x\le 1,\\ 0 \text{ при } x\ge 1.\end{cases}$$

Найти: 1) параметр a; 2) функцию распределения $F(x)$; 3) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 4) вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала (0;1/2).

Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Задача 6. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 \quad \text{ при } x\le 0,\\ ax^2 \text{ при } 0<x\le 1,\\ 1 \quad \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Найти: 1) параметр a; 2) плотность распределения $f(x)$; 3) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 4) вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала (0,4;0,6).

Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Задача 7. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно на отрезке [2, 6]. Какова вероятность принятия ею значений, не более чем на 0,5 отклоняющихся от среднего значения?

Задача 8. В здании областной администрации случайное время ожидания лифта равномерно распределено в диапазоне от 0 до 5 минут.

1) Чему равна функция распределения $F(x)$ для этого равномерного распределения?

2) Чему рана вероятность ожидания лифта более чем 3,5 минуты?

3) Чему равна вероятность того, что лифт прибудет в течение первых 45 секунд?

4) Чему рана вероятность того, что ожидание лифта будет заключено в диапазоне от 1 до 3 минут?

5) Чему равно среднее время ожидания лифта?

Задача 9. Мастер, осуществляющий ремонт на дому, может появиться в любое время с 10 до 18 часов. Клиент, прождав до 14 часов, отлучился на 1 час. Какова вероятность, что мастер (приход его обязателен) не застанет его дома?

Задача 10. Автобусы некоторого маршрута идут с интервалом 10 минут. Найти вероятность того, что пришедшему на остановку пассажиру придется ожидать автобуса не более 4 минут. Каково среднее время ожидания автобуса?

Задача 11. Написать плотность и функцию распределения показательного закона непрерывной случайной величины, если параметр распределения $\lambda = 2$.

Найти:

а) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение;

б) вероятность того, что в результате испытания X попадёт в интервал (0; 1).

Задача 12. Написать плотность и функцию распределения показательного закона непрерывной случайной величины, если ее математическое ожидание равно 4.

Найти:

а) дисперсию, среднее квадратическое отклонение;

б) вероятность того, что в результате испытания X попадёт в интервал (0; 2).

Задача 13. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному при $x \geq 0$ плотностью распределения $f(x) = 0,04e^{-0,04x}$; при $x < 0$ функцией $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (1; 2). Чему равны математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение?

Задача 14. Пусть время безотказной работы элемента (в часах) распределено по показательному закону с плотностью распределения $f(t) = 0,2e^{-0,2t}$ при $t \geq 0$. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно в течение 5 часов.

Задача 15. Среднее время безотказной работы прибора равно 80 часам. Полагая, что время безотказной работы распределено по показательному закону, найти вероятность того, что в течение 100 часов прибор не выйдет из строя.

Задача 16. Математическое ожидание и дисперсия нормально распределённой случайной величины X соответственно равны 7 и 3. Написать плотность вероятности X. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключённое в интервале (7, 10).

Задача 17. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 40 г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 20 г.

Задача 18. Математическое ожидание и стандартное отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и

2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12, 14).

Задача 19. Математическое ожидание и стандартное отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15, 25).

Задача 20. Для нормально распределенной случайной величины с a = -44 и $\sigma = 16$ найдите вероятность того, что значение случайной величины будет положительно.

Задача 21. Найдите вероятность того, что стандартная нормально распределенная величина будет иметь значения: а) между 2 и 3; б) большие, чем (- 2); в) меньшие, чем 45.

Задача 22. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали больше 55 мм**.**

Задача 21. Производится измерение диаметра вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со стандартным отклонением $\sigma = 10$мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

Задача 22. Автомат изготовляет шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со стандартным отклонением $\sigma = 0,4$мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

Задача 23. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a = 10. Вероятность попадания X в интервал (10; 20) равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал (0;10)?

Задача 24. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a = 25. Вероятность попадания X в интервал (10; 15) равна 0,2. Чему равна вероятность попадания X в интервал (35;40)?

Задача 25. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a = 10 и стандартным отклонением $\sigma = 5$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет величина X в результате испытания.

Задача 26. Случайная величина X распределена нормально со стандартным отклонением $\sigma = 5$. Найти длину интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет X в результате испытания.

Задача 27. В магазине 10000 книг. Вероятность продажи каждой из них в течение дня равна 0,8. Какое максимальное число книг будет продано в течение дня с вероятностью 0,999, если предположить, что число проданных книг есть случайная величина, распределенная по нормальному закону.

Задача 28. На рынок поступила крупная партия говядины. Предполагается, что вес туш – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с математическим ожиданием $a = 950$ кг и средним квадратическим отклонением $\sigma = 150$ кг. Определите вероятность того, что вес случайно отобранной туши:

а) окажется больше 1250 кг;

б) окажется меньше 850 кг;

в) будет находиться между 800 и 1300 кг;

г) отклонится от математического ожидания меньше, чем на 50 кг;

д) отклонится от математического ожидания больше, чем на 50 кг;

е) Найдите границы, в которых отклонение веса случайно отобранной туши от своего математического ожидания не превысит утроенного среднего квадратического отклонения (проиллюстрируйте правило трех сигм);

ж) С вероятностью 0,899 определите границы, в которых будет находиться вес случайно отобранной туши. Какова при этом условии максимальная величина отклонения веса случайно отобранной туши от своего математического ожидания?

Задача 29. Фирма собирается приобрести партию из 100 000 единиц некоторого товара. Из прошлого опыта известно, что 1% товаров данного типа имеют дефекты. Какова вероятность того, что в данной партии окажется от 950 до 1050 дефектных единиц товара?

Задача 30. Подлежат исследованию 400 проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе для всех проб одинакова и равна 0,8. Найти вероятность того, что доля проб с промышленным содержанием металла отклонится от вероятности промышленного содержания металла в каждой пробе не более чем на 0,05.

Практическое занятие №5. Выборки и их характеристики. (2ч.)

Математическая статистика – раздел математики, занимающейся установлением закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, на основе обработки статистических данных, полученных в результате наблюдений.

Двумя основными задачами математической статистики являются:

- определение способов сбора и группировки статистических данных, полученных в результате наблюдений;

- разработка методов анализа полученных данных в зависимости от целей исследования, к которым относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости от других случайных величин и т.д.;

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о значениях параметров известного распределения.

ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

Генеральная и выборочная совокупности

Пусть имеется множество, состоящее из конечного (но достаточно большого) или бесконечного количества некоторых объектов, причём каждый объект характеризуется единственным значением некоторого количественного или качественного признака X.

Определение. Если значения признака выражаются числами, то признак называется *количественным*.

Если же признак характеризует некоторое свойство или состояние элементов совокупности, то признак называется *качественным*.

Примеры.

Количественные признаки – вес, масса, температура, объем, заработная плата, производительность труда.

Качественные признаки – профессия, квалификация, стандартность детали.

Определение. Все объекты множества, обладающие интересующим исследователя признаком, составляют *генеральную совокупность*.

Иногда проводят сплошное обследование, т. е. обследуют каждый из объектов совокупности относительно признака, которым интересуются. На практике, однако, сплошное обследование применяется сравнительно редко. Например, если совокупность содержит очень большое число объектов, то провести сплошное обследование физически невозможно. Если обследование объекта связано с его уничтожением или требует больших материальных затрат, то проводить сплошное обследование практически не имеет смысла. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Определение. Совокупность случайно отобранных объектов называется выборочной *совокупностью* или *выборкой*.

Определение. Число объектов (элементов) статистической совокупности называется ее *объемом*. *Объем генеральной совокупности* обозначается N, а *объем выборочной совокупности* – n.

Анализ извлечённых выборок позволяет получить представление о распределении признака X как некоторой случайной величины.

С этой точки зрения можно дать такое определение статистики:

Определение. *Статистика* – это наука, позволяющая распространять выводы, сделанные на основе изучения части совокупности (случайной выборки), на всю совокупность (генеральную совокупность).

Сущность выборочного метода состоит в том, чтобы по некоторой выборочной части генеральной совокупности выносить суждение о свойствах генеральной совокупности в целом.

Для того чтобы по исследованию выборки можно было сделать выводы о поведении интересующего нас признака генеральной совокупности, нужно, чтобы выборка правильно представляла пропорции генеральной совокупности, то есть была *репрезентативной* (представительной). Учитывая закон больших чисел, можно утверждать, что это условие выполняется, если каждый объект выбран случайно, независимо от другого, причем для любого объекта вероятность попасть в выборку одинакова.

При составлении выборки можно поступать двояко: после того, как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен, либо не возвращен в генеральную совокупность. В соответствии со сказанным, выборки подразделяют на повторные и бесповторные.

Определение. *Повторная выборка* – каждый отобранный объект перед выбором следующего возвращается в генеральную совокупность.

Определение. *Бесповторная выборка* – отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Если объем генеральной совокупности достаточно велик, а выборка составляет лишь незначительную часть этой совокупности, то различие между повторной и бесповторной выборками стирается; в предельном случае, когда рассматривается бесконечная генеральная совокупность, а выборка имеет конечный объем, это различие исчезает.

На практике обычно пользуются бесповторным случайным отбором.

Способы отбора

Существует несколько способов отбора, обеспечивающих репрезентативность выборки. Рассмотрим некоторые из них.

1. Простой случайный (собственно-случайный) отбор.
Все элементы генеральной совокупности нумеруются и из таблицы случайных чисел берут, например, последовательность любых 30-ти идущих подряд чисел. Элементы с выпавшими номерами и входят в выборку.

2. Типический отбор.
Такой отбор производится в том случае, если генеральную совокупность можно представить в виде объединения подмножеств, объекты которых однородны по какому-то признаку, хотя вся совокупность такой однородности не имеет (партия товара состоит из нескольких групп, произведенных на разных предприятиях). Тогда по каждому подмножеству проводят простой случайный отбор, и в выборку объединяются все полученные объекты.

3. Механический отбор.
Отбирают каждый двадцатый (сотый) экземпляр.

4. Серийный (гнездовой) отбор.

Отбору подлежат целые группы (серии, гнезда), отобранные случайным или механическим способом. По каждой такой группе, серии проводится сплошное наблюдение, а результаты переносятся на всю совокупность.

На практике часто применяется комбинированный отбор, при котором сочетаются указанные выше способы.

Например, иногда разбивают генеральную совокупность на серии одинакового объема, затем простым случайным отбором выбирают несколько серий и, наконец, из каждой серии простым случайным отбором извлекают отдельные объекты.

После того как сделана выборка, т.е. получена выборочная совокупность объектов, все объекты этой совокупности обследуют по отношению к определенной случайной величине (признаку) и в результате этого получают наблюдаемые данные.

Следующая задача математической статистики заключается в обработке результатов наблюдений.

Статистическое распределение выборки

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объемом n, причем значение признака x_1 наблюдалось n_1 раз, значение признака x_2 наблюдалось n_2 раз, … , значение признака x_k наблюдалось n_k раз. Очевидно,

$$n_1 + n_2 + ... + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i = n .$$

Определение. Наблюдаемые значения признака x_i называются *вариантами*, числа наблюдений n_i называются *частотами*, а отношения $w_i = n_i / n$ – *относительными частотами* или *частостями*.

Очевидно, что

$$w_1 + w_2 + ... + w_k = \sum_{i=1}^{k} w_i = 1.$$

Определение. *Статистическим распределением выборки* или *статистическим рядом* называется перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k
w_i	w_1	w_2	…	w_k

Замечание. В теории вероятностей под *распределением* понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, или относительными частотами.

Вариационные ряды

Обычно полученные наблюдаемые данные представляют собой множество расположенных в беспорядке чисел. Просматривая это множество чисел, зачастую бывает трудно выявить какую-либо закономерность их варьирования (изменения). Для изучения возможных закономерностей изменения значений признака опытные данные подвергают обработке.

Определение. Расположение наблюдаемых вариант в порядке возрастания (убывания) называется *ранжированием*.

Определение. Статистический ряд с ранжированным перечнем вариант и соответствующих им частот или относительных частот (частостей) называется *вариационным рядом*. Порядковый номер варианты называется *рангом*. Частота или частость варианты называется *весом* варианты.

Определение. Признак называется *дискретно варьируемым*, если его отдельные значения (варианты) отличаются друг от друга на некоторую конечную величину.

Вариационный ряд дискретно варьируемого признака называется *дискретным вариационным рядом*.

Общий вид дискретного вариационного ряда частот:

Значения признака x_i	x_1	x_2	…	x_k
Частоты n_i	n_1	n_2	…	n_k

Общий вид дискретного вариационного ряда относительных частот :

Значения признака x_i	x_1	x_2	…	x_k
Частости w_i	w_1	w_2	…	w_k

Пример. При проведении 20 серий из 10 бросков игральной кости число выпадений трех очков оказалось равным

1,1,4,0,1,2,1,2,2,0,5,3,3,1,0,2,2,3,4,1.

Дискретный вариационный ряд для абсолютных и относительных частот имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	3	6	5	3	2	1
w_i	0,15	0,30	0,25	0,15	0,10	0,05

Видим, что

$$\sum_{i=1}^{6} n_i = 3+6+5+3+2+1=20; \quad \sum_{i=1}^{6} w_i = \frac{3}{20}+\frac{6}{20}+\frac{5}{20}+\frac{3}{20}+\frac{2}{20}+\frac{1}{20}=\frac{20}{20}=1.$$

Если исследуется некоторый непрерывный признак, то вариационный ряд может состоять из очень большого количества чисел. В этом случае удобнее использовать *группированную выборку*. Для ее получения интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h_i, а затем находят для каждого частичного интервала n_i или w_i – сумму частот или относительных частот вариант, попавших в i-й интервал.

Определение. Признак называется *непрерывно варьируемым*, если его отдельные значения (варианты) отличаются друг от друга на сколь угодно малую величину, т.е. признак может принимать любые значения в некотором интервале.

Вариационный ряд непрерывно варьируемого признака называется *непрерывным вариационным рядом* или *интервальным вариационным рядом*.

Общий вид интервального вариационного ряда частот:

Интервалы	$\alpha_1 \div \alpha_2$	$\alpha_2 \div \alpha_3$	…	$\alpha_k \div \alpha_{k+1}$
Частоты n_i	n_1	n_2	…	n_k

Общий вид интервального вариационного ряда относительных частот:

Интервалы	$\alpha_1 \div \alpha_2$	$\alpha_2 \div \alpha_3$	…	$\alpha_k \div \alpha_{k+1}$
Частости w_i	w_1	w_2	…	w_k

Определение. Разности между верхними и нижними границами интервалов

$$h_1 = \alpha_2 - \alpha_1,\ h_2 = \alpha_3 - \alpha_2, ...,\ h_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k$$

называются *интервальными разностями*, или *величинами интервалов*, или *длинами интервалов*.

Определение. Если длины всех интервалов одинаковы, то такие интервалы называют *равновеликими*, в противном случае – *неравновеликими*.

Определение. Если интервал имеет обе границы, то его называют *закрытым*. Первый и последний интервалы могут быть *открытыми*, т.е. иметь только одну границу – верхнюю для первого и нижнюю для последнего.

Часто открытые интервалы приходится *условно закрывать*. Для этого обычно величину первого интервала принимают равной величине второго, а величину последнего – величине предпоследнего.

Для определения оптимальной величины равновеликих интервалов используют формулу Стэрджеса:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}322 \lg n},$$

где n – объем совокупности, $x_{\max}$ и $x_{\min}$ – наибольшая и наименьшая варианты соответственно, $L = 1 + 3,322 \lg n$ – рекомендуемое число интервалов.

Замечание. Интервальный вариационный ряд строят не только на основе наблюдений за непрерывно меняющимся признаком. Во многих случаях, когда признак варьирует дискретно, однако число наблюдений достаточно велико, удобнее как раз строить интервальный ряд. Иногда, наоборот, интервальный вариационный ряд для простоты исследований условно заменяют дискретным. В этом случае серединное значение i-го интервала принимают за варианту x_i, а соответствующую интервальную частоту n_i – за частоту этого интервала.

Для характеристики вариационного ряда наряду с частотами и частостями используются накопленные частоты и частости.

Определение. *Накопленная частота* показывает, сколько вариантов наблюдалось со значением признака меньшим или равным определенного данного значения x.

Накопленные частоты обозначают $n_i^{накопл}$ и для дискретного вариационного ряда вычисляют по формуле

$$n_i^{накопл} = n_1 + n_2 + \ldots + n_i .$$

Для интервального вариационного ряда $n_i^{накопл}$ – это сумма частот всех интервалов, не превышающих данный.

Определение. *Накопленная частость* – это отношение накопленной частоты к объему совокупности n.

Накопленные частости обозначают $w_i^{накопл}$ и для дискретного вариационного ряда вычисляют по формуле

$$w_i^{накопл} = w_1 + w_2 + \ldots + w_i .$$

Для интервального вариационного ряда $w_i^{накопл}$ – это сумма частостей всех интервалов, не превышающих данный.

Пример. Дана ранжированная выборка:

10,8; 11,1; 11,7; 12,2; 13,1; 13,4; 13,9; 14,3; 14,3; 14,4; 14,8; 16,5; 17,7; 18,2; 19,9; 20,0; 20,3; 20,8; 23,1; 24,2; 25,1; 25,1; 25,7; 28,4; 28,5; 29,3; 29,8; 29,9; 30,2; 30,4.

Составим интервальный вариационный ряд распределения частот и относительных частот (частостей), состоящий из пяти интервалов.

Объем выборки n=30. Выберем в качестве границ всего интервала a=10,5 и b=30,5. Тогда

$$h = \frac{30,5 - 10,5}{5} = 4,$$

и отрезок (a,b) разбивается на части (10,5; 14,5), (14,5; 18,5), (18,5; 22,5), (22,5; 26,5), (26,5; 30,5).

Просматривая результаты наблюдений, определяем, сколько значений признака попало в каждый конкретный интервал. При этом в интервал включаем значения признака, большие или равные нижней границе и меньшие верхней границы.

В итоге получаем интервальный вариационный ряд:

Интервалы	$10{,}5 \div 14{,}5$	$14{,}5 \div 18{,}5$	$18{,}5 \div 22{,}5$	$22{,}5 \div 26{,}5$	$26{,}5 \div 30{,}5$
Частота	10	4	4	5	7
Частость	10/30	4/30	4/30	5/30	7/30

Видим, что

$$\sum_{i=1}^{5} n_i = 10 + 4 + 4 + 5 + 7 = 30; \qquad \sum_{i=1}^{5} w_i = \frac{10}{30} + \frac{4}{30} + \frac{4}{30} + \frac{5}{30} + \frac{7}{30} = 1.$$

Дискретный вариационный ряд графически можно представить в виде *полигона распределения частот* или *полигона распределения частостей*.

Определение. *Полигоном распределения частот* называется ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1, n_1), (x_2, n_2),…, (x_k, n_k), где x_i откладываются на оси абсцисс, а n_i – на оси ординат ($i = 1,2,\ldots,k$).

Определение. *Полигоном распределения частостей* называется ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1, w_1), (x_2, w_2),…, (x_k, w_k), где x_i откладываются на оси абсцисс, а w_i – на оси ординат ($i = 1,2,\ldots,k$).

Интервальный вариационный ряд графически можно представить в виде *гистограммы*.

Определение. *Гистограммой частот* называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h_i, а высотами – отрезки длиной n_i / h_i (*абсолютные плотности интервалов*). Площадь гистограммы равна объему выборки.

Определение. *Гистограммой частостей* называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h_i, а высотами – отрезки длиной w_i / h_i (*относительные плотности интервалов*). Площадь гистограммы равна единице.

Далее рассмотрим *числовые характеристики вариационного ряда*, которые дают представление о характере распределения опытных данных в выборке и позволяют сравнивать вариационные ряды между собой.

Определение. *Модой Mo* называется варианта, наиболее часто встречающаяся в вариационном ряду.

Для *дискретного вариационного ряда* мода *Mo* определяется по наибольшей частоте.

Для *интервального вариационного ряда*, имеющего равные интервалы, модальный (содержащий моду) интервал определяется по наибольшей частоте, при неравных интервалах – по наибольшей плотности интервала n_i / h_i или w_i / h_i.

Мода внутри модального интервала определяется по формуле:

$$Mo = x_{Mo(\min)} + h_{Mo} \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{(n_{Mo} - n_{Mo-1}) + (n_{Mo} - n_{Mo+1})},$$

где

$x_{Mo(\min)}$ – нижняя граница модального интервала;

n_{Mo} – частота модального интервала;

n_{Mo-1} – частота интервала, предшествующего модальному;

n_{Mo+1} – частота интервала, последующего за модальным;

h_{Mo} – величина модального интервала.

Определение. *Медианой Me* называется варианта, относительно которой вариационный ряд делится на две равные по числу вариант части.

Для *дискретного вариационного ряда* с нечетным числом вариант n=2m+1 медиана равна серединной варианте, т.е.

$$Me = x_{m+1},$$

а для ряда с четным числом вариант n=2m медиана равна полусумме двух серединных вариант, т.е.

$$Me = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}.$$

Для *интервального вариационного ряда* вначале находят интервал, содержащий медиану, путем визуального просмотра накопленных частот. Медиана расположена в вариационном ряду так, что в одной части ряда находятся варианты, для которых значение признака не больше медианы $(x_i \le Me)$, а в другой части – варианты больше медианы $(x_i > Me)$. Медианному интервалу соответствует первая из накопленных частот, превышающая половину всего объема совокупности. Внутри медианного интервала расчет значения медианы проводится по формуле:

$$Me = x_{Me(\min)} + h_{Me}\frac{0{,}5\sum n_i - n_{Me-1}^{накопл}}{n_{Me}},$$

где

$x_{Me(\min)}$ – нижняя граница медианного интервала;

h_{Me} – величина медианного интервала;

$n_{Me-1}^{накопл}$ – накопленная частота интервала, предшествующего медианному;

n_{Me} – частота медианного интервала;

$0{,}5\sum n_i$ – половина суммы всех частот.

Определение. *Выборочной средней* $\bar{x}_в$ называется среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности:

$$\bar{x}_в = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_ix_i,$$

где x_i – варианты, n_i - частоты.

Выборочная средняя есть средняя взвешенная значений признака с весами, равными соответствующим частотам.

Мода, медиана и выборочная средняя характеризуют вариационный ряд каждая одним числом, но не отражают вариацию, т.е. изменчивость признака. Для измерения вариации применяют такие числовые характеристики ряда как размах варьирования, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

Определение. *Размахом варьирования* R называется разность между наибольшей и наименьшей вариантой:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Определение. *Выборочной дисперсией* $D_{\text{в}}$ называется среднее арифметическое значение квадратов отклонений значений признаков выборочной совокупности от их среднего значения $\bar{x}_{\text{в}}$:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2,$$

где x_i – варианты, n_i - частоты.

Выборочная дисперсия есть средняя взвешенная квадратов отклонений значений признака с весами, равными соответствующим частотам.

Так же, как в теории случайных величин, можно доказать, что справедлива следующая формула для вычисления выборочной дисперсии:

$$D_{\text{в}} = \overline{(x^2)}_{\text{в}} - \bar{x}_{\text{в}}^2.$$

Определение. *Выборочным средним квадратичным отклонением* $\sigma_{\text{в}}$ называется корень квадратный из выборочной дисперсии:

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}.$$

Определение. *Коэффициентом вариации* V называется процентное отношение среднего квадратического отклонения к средней арифметической:

$$V = \frac{\sigma_{\text{в}}}{\bar{x}_{\text{в}}}\cdot 100\%.$$

Коэффициент вариации является относительной мерой рассеяния и характеризует однородность значений признака.

Для дискретного вариационного ряда приведенные формулы для нахождения выборочной средней, выборочной дисперсии, выборочного среднего квадратического отклонения и коэффициента вариации дают точные значения величин, а для интервального ряда – приближенные, поскольку предполагают, что все значения наблюдаемого признака x_i совпадают с центром интервала или равномерно распределены вокруг него. Однако чем больше объем выборки, тем ближе приближенное значение к среднему.

Определение. *Выборочной долей* $w_{\text{в}}$ признака X выборочной совокупности называется доля объектов, обладающих рассматриваемым признаком в выборочной совокупности.

Обратимся к числовым характеристикам, характеризующим графическое изображение вариационных рядов.

Определение. Вариационный ряд, в котором частоты вариантов, равноотстоящие от средней арифметической (выборочной средней), равны между собой, называется *симметричным*, в противном случае – *асимметричным* или *скошенным*.

Необходимым, но не достаточным *условием симметричности* вариационного ряда является равенство трех характеристик: средней арифметической, моды и медианы:

$$\overline{x}_{в} = Mo = Me.$$

Если более длинная часть графика распределения расположена правее от вершины, то имеет место *правосторонняя скошенность*, а если левее – *левосторонняя скошенность*.

Определение. *Выборочным коэффициентом асимметрии* вариационного ряда называется число $A_{в}$, определяемое формулой:

$$A_{в} = \frac{\mu_{3в}}{\sigma_{в}^{3}}.$$

Выборочный коэффициент асимметрии служит для характеристики асимметрии полигона или гистограммы вариационного ряда.

При $A_{в} = 0$ распределение симметрично $(Mo = x_{в})$.

При $A_{в} > 0$ распределение имеет правостороннюю скошенность $(Mo < x_{в})$.

При $A_{в} < 0$ распределение имеет левостороннюю скошенность $(Mo > x_{в})$.

Определение. *Выборочным коэффициентом эксцесса* или *коэффициентом крутости* вариационного ряда называется число $E_{в}$, определяемое формулой:

$$E_{в} = \frac{\mu_{4в}}{\sigma_{в}^{4}} - 3.$$

Выборочный коэффициент эксцесса характеризуют остроту вершины полигона или гистограммы. Чем больше значение этой величины, тем острее вершина.

Если коэффициент эксцесса $E_{в} > 0$, то имеет место островершинность, а если $E_{в} < 0$, то распределение имеет плоскую вершину.

Величина $E_{в}$ служит также для сравнения на крутость выборочного распределения с нормальным распределением, для которого $E_{в} = 0$. Именно, если выборочному распределению соответствует отрицательный коэффициент эксцесса, то соответствующий полигон (гистограмма) имеет более пологую вершину по сравнению с нормальной кривой. В случае положительного коэффициента эксцесса полигон (гистограмма) более крутой по сравнению с нормальной кривой.

Пример. Студенты некоторого факультета, состоящего из 100 человек, написали выпускную контрольную работу. Каждый студент набрал определенное количество баллов. Приведем эти баллы (в порядке алфавитного списка студентов):

64	59	116	89	76	55	87	65	99	94
76	59	78	34	89	42	91	41	99	49
59	66	57	79	65	94	67	103	38	68
85	51	78	38	87	43	104	49	58	33
53	75	28	67	37	50	98	56	71	83

68	58	82	67	57	72	59	86	51	64
70	53	32	56	100	57	69	87	82	67
37	74	39	84	37	99	47	110	57	96
66	46	72	54	75	47	79	61	115	65
67	70	24	73	40	58	78	75	87	51

В таблице подчеркнуты максимальное и минимальное значения балла.

Будем рассматривать значение балла в качестве исследуемого признака и по приведенным данным построим интервальный вариационный ряд.

Объем выборки n = 100.

Определим наибольшую и наименьшую варианты: $x_{\max} = 116$, $x_{\min} = 24$.

По формуле Стэрджеса оптимальная величина интервала

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}322 \lg n} = \frac{116 - 24}{1 + 3{,}322 \lg 100} = \frac{92}{7{,}644} \approx 12.$$

Построим частичные интервалы:

(24;36),(36;48),(48;60),(60;72),(72;84),(84;96),(96;108),(108;120).

Просматривая результаты наблюдений, определяем, сколько значений признака попало в каждый конкретный интервал. При этом в интервал включаем значения признака, большие или равные нижней границе и меньшие верхней границы. В итоге получаем интервальный вариационный ряд:

Интервалы	$24 \div 36$	$36 \div 48$	$48 \div 60$	$60 \div 72$	$72 \div 84$	$84 \div 96$	$96 \div 108$	$108 \div 120$
Частота	5	13	23	19	17	12	8	3
Частость	0,05	0,13	0,23	0,19	0,17	0,12	0,08	0,03
Накопленная частота	5	18	41	60	77	89	97	100
Накопленная частость	0,05	0,18	0,41	0,61	0,77	0,89	0,97	1

Видим, что

$$\sum_{i=1}^{8} n_i = 5 + 13 + 23 + 19 + 17 + 12 + 8 + 3 = 100;$$

$$\sum_{i=1}^{8} w_i = 0{,}05 + 0{,}13 + 0{,}23 + 0{,}19 + 0{,}17 + 0{,}12 + 0{,}08 + 0{,}03 = 1.$$

Для интервального вариационного ряда, имеющего равные интервалы, *модальный (содержащий моду) интервал* определяется по наибольшей частоте. В данном ряду наибольшая частота n = 23, модальный интервал – (48;60).

Мода внутри модального интервала определяется по формуле:

$$Mo = x_{Mo(\min)} + h_{Mo} \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{(n_{Mo} - n_{Mo-1}) + (n_{Mo} - n_{Mo+1})},$$

где

$x_{Mo(\min)}$ – нижняя граница модального интервала;

n_{Mo} – частота модального интервала;

n_{Mo-1} – частота интервала, предшествующего модальному;

n_{Mo+1} – частота интервала, последующего за модальным;

h_{Mo} – величина модального интервала.

Получаем

$$Mo = 48 + 12 \cdot \frac{23-13}{(23-13)+(23-19)} = 48 + \frac{12 \cdot 10}{14} = 48 + 8,6 = 56,6\,.$$

Для интервального вариационного ряда вначале находим интервал, содержащий медиану. Медианному интервалу соответствует первая из накопленных частот, превышающая половину всего объема совокупности. В данном вариационном ряду первая из накопленных частот, превышающая половину всего объема совокупности n = 100, равна $n_4^{накопл} = 60$. Медианный интервал – (60;72).

Медиана внутри медианного интервала определяется по формуле:

$$Me = x_{Me(\min)} + h_{Me}\frac{0,5\sum n_i - n_{Me-1}^{накопл}}{n_{Me}},$$

где

$x_{Me(\min)}$ – нижняя граница медианного интервала;

h_{Me} – величина медианного интервала;

$n_{Me-1}^{накопл}$ – накопленная частота интервала, предшествующего медианному;

n_{Me} – частота медианного интервала;

$0,5\sum n_i$ – половина суммы всех частот.

Получаем

$$Me = 60 + 12 \cdot \frac{50-41}{60} = 60 + \frac{12 \cdot 9}{60} = 60 + 1,8 = 61,8\,.$$

Найдем *выборочную среднюю* $\bar{x}_{в}$ (среднее арифметическое значение) признака выборочной совокупности по формуле:

$$\bar{x}_{в} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_8x_8}{n},$$

где x_i – середины интервалов, n_i - частоты.

Получаем

$$\bar{x}_{в} = \frac{5 \cdot 30 + 13 \cdot 42 + 23 \cdot 54 + 19 \cdot 66 + 17 \cdot 78 + 12 \cdot 90 + 8 \cdot 102 + 3 \cdot 114}{100} =$$

$$= \frac{150 + 546 + 1242 + 1254 + 1326 + 1080 + 816 + 342}{100} = \frac{6756}{100} = 67,6\,.$$

Определим *размах варьирования R*:

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 116 - 24 = 92\,.$$

Найдем *выборочную дисперсию* $D_{в}$ по формуле:

$$D_{в} = \overline{(x^2)}_{в} - \bar{x}_{в}^2\,.$$

Предварительно вычислим

$$\overline{(x^2)}_в = \frac{5\cdot 30^2 + 13\cdot 42^2 + 23\cdot 54^2 + 19\cdot 66^2 + 17\cdot 78^2 + 12\cdot 90^2 + 8\cdot 102^2 + 3\cdot 114^2}{100} =$$

$$= \frac{500112}{100} = 5001{,}1.$$

$$\overline{x}_в^2 = 67{,}6^2 = 4569{,}8\,.$$

Получаем

$$D_в = 5001{,}1 - 4569{,}8 = 430{,}3.$$

Найдем *выборочное среднее квадратичное отклонение* $\sigma_в$:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{430{,}3} = 20{,}7\,.$$

Вычислим *коэффициент вариации* V:

$$V = \frac{\sigma_в}{\overline{x}_в}\cdot 100\% = \frac{20{,}7}{67{,}6}\cdot 100\% = 30{,}6\%\,.$$

Эмпирическая функция распределения

Пусть известно статистическое распределение выборки количественного признака X.

Введем обозначения:

n_x – число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака, меньшее x;

n – объем выборки;

n_x / n – относительная частота события (частость) $X < x$.

Если x изменяется, то, в принципе, изменяется и относительная частота, т.е. относительная частота n_x / n является функцией от x. Поскольку эта функция находится опытным (эмпирическим) путем, то ее называют *эмпирической*.

Определение. *Эмпирической функцией распределения выборки* называется функция $F^*(x)$, определяющая для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x – число вариант, меньших x, n – объем выборки.

Замечание. В отличие от эмпирической функции распределения $F^*(x)$, найденной по выборке опытным путем, функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности называют *теоретической функцией распределения*. $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а $F^*(x)$ – его относительную частоту. При достаточно больших n, как следует из теоремы Бернулли, $F^*(x)$ стремится по вероятности к $F(x)$.

Из определения эмпирической функции распределения $F^*(x)$ видно, что ее свойства совпадают со свойствами $F(x)$, а именно:

1) $0 \le F^*(x) \le 1$.

2) $F^*(x)$ – неубывающая функция.

3) Если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \leq x_1$; если $x_к$ – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_к$.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задача 1. Из 1000 деталей отобрано для обследования 50 деталей. Определите объем генеральной совокупности и объем выборки.

Задача 2. Дана исходная таблица распределения тридцати абитуриентов по числу баллов, полученных ими на вступительных экзаменах:

12	15	20	17	16	18
18	19	19	14	16	13
12	13	13	15	16	14
14	16	17	12	15	16
15	12	13	13	15	17

Составьте статистическое распределение абитуриентов по числу полученных баллов. Найдите размах варьирования. Постройте полигон частот.

Задача 3. Имеются данные о количестве студентов в 24 группах:

28	27	26	28	27	25	22	24
25	23	24	25	22	21	23	19
20	21	22	19	21	20	22	18

Составьте статистическое распределение выборки. Найдите размах варьирования. Постройте полигон частот.

Задача 4. Известен вариационный ряд, полученный по выборке их генеральной совокупности:

x_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
n_i	10	25	35	15	10	5

Найти: размах варьирования, моду, медиану вариационного ряда.

Задача 5. В течение недели регистрировались пропуски занятий студентами одной группы. В результате регистрации получили статистические данные:

2,1,3,1,2,1,2,4,3,5,3,2,2,2,1,2,3,1,0,0,0,2,3,1,4.

Составьте статистические распределения частот и частостей наблюдаемых значений дискретного признака X (числа пропущенных занятий) и постройте их полигоны.

Найдите эмпирическую функцию и постройте ее график.

Вычислите числовые характеристики выборки: моду, медиану, выборочное среднее, среднее квадратическое отклонение, коэффициенты асимметрии и эксцесса, коэффициент вариации.

Задача 6. Дана выборка, состоящая из чисел: 3,2; 4,1; 8,1; 8,1; 6,7; 4,4; 4,4; 3,2; 5,0; 6,7; 6,7; 7,5; 3,2; 4,4; 6,7; 6,7; 5,0; 5,0; 4,4; 8,1.

Составьте статистическое распределение выборки в виде дискретного вариационного ряда частот и относительных частот. Найдите числовые характеристики ряда: размах варьирования, выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Постройте полигон частот и полигон относительных частот.

Задача 7. Дана выборка значений случайной величины: 2, 3, 3, 4, 2, 5, 5, 5, 6, 3, 6, 3, 4, 4, 4, 6, 5, 7, 3, 5.

Составьте статистическое распределение выборки в виде дискретного вариационного ряда частот и относительных частот. Найдите числовые характеристики ряда: размах варьирования, выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Постройте полигон частот и полигон относительных частот.

Задача 8. Путем опроса получены следующие данные о возрасте (число полных лет) 25 студентов первого курса:

18,	17,	23,	18,	17,
19,	18,	20,	17,	22,
19,	21,	18,	18,	17,
22,	18,	21,	17,	21,
18,	19,	17,	23,	17.

Составьте статистическое распределение выборки студентов по возрасту в виде дискретного вариационного ряда частот и относительных частот. Найдите числовые характеристики ряда: размах варьирования, выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Постройте полигон частот и полигон относительных частот.

Задача 9. Составить дискретный вариационный ряд успеваемости студентов, сдавших экзамен по курсу "Математическая статистика". На курсе 100 человек. Полученные студентами оценки представляют собой следующий набор чисел:

5	3	4	5	4	3	5	4	2	4	5	4	4	3	3	4	2	5	4	5
3	4	3	3	4	5	4	5	3	4	5	4	4	5	2	3	5	4	5	4
3	4	4	4	5	5	4	3	4	5	5	4	5	4	3	5	2	4	4	4
3	5	4	2	5	4	5	3	5	4	5	4	4	5	2	3	5	4	5	4
5	5	3	5	4	3	3	4	5	4	5	4	3	5	3	4	5	4	5	4

Найти числовые характеристики ряда: размах варьирования, выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, коэффициенты асимметрии и эксцесса. Построить полигон частот и полигон относительных частот.

Задача 10. Постройте полигон относительных частот и эмпирическую функцию распределения по данным распределения студентов 1 курса по размерам обуви:

Размер обуви	35	36	37	38	39	40	41	42
Число студентов	3	5	6	13	10	7	4	2

Найдите числовые характеристики ряда: размах варьирования, выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

Задача 11. По данным выборочного обследования получен интервальный вариационный ряд по заработной плате работников одного из цехов промышленного предприятия (в тыс. руб.):

Заработная плата	5-10	10-15	15-20	25-30	35-40	40-45
Число работников	12	21	32	15	11	9

Рассчитайте моду, медиану, среднюю заработную плату, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации заработной платы. Постройте гистограмму частот, график эмпирической функции распределения.

Задача 12. По данным выборочного обследования получено следующее распределение семей по среднедушевому доходу (в тыс. руб.):

Среднедушевой доход семьи (в месяц)	до 5	5-10	10-15	15-20	25-30	30-35	35 и выше
Количество обследованных семей	46	236	250	176	102	78	12

Найдите моду, медиану, среднедушевой доход семьи в выборке, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Постройте гистограмму распределения частот, график эмпирической функции распределения.

Задача 13. По результатам выборочного обследования торговых киосков города получены следующие данные о дневной выручке частного бизнеса:

Выручка от продажи товара (тыс. руб.)	до 50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100 и выше
Число торговых киосков	10	12	22	26	18	7	5

Постройте гистограмму распределения частот. Найдите моду, медиану, среднедневную выручку от продажи товаров, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

Задача 14. Имеются выборочные данные о числе сделок, заключенных брокерскими фирмами города в течение месяца:

Число заключенных сделок	10-30	30-50	50-70	70-90
Число брокерских фирм и контор	20	18	12	5

Постройте гистограмму распределения частот. Найдите среднее число заключенных сделок, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, размах вариации.

Задача 15. Имеются данные о числе тонн грузов, перевозимых еженедельно паромом некоторого морского порта в период навигации: 398, 412, 560, 474, 544, 690, 587, 600, 613, 457, 504, 477, 530, 641, 359, 566, 452, 633, 474, 499, 580, 606, 344, 455, 505, 396, 347, 441, 390, 632, 400, 582.

Составьте интервальный вариационный ряд. Найдите моду, медиану, выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Постройте гистограмму распределения частот, график эмпирической функции распределения.

Задача 16. Число пассажиров компании «Донские авиалинии» одного из рейсов на рейсах между Ростовом и Москвой за 30 дней между апрелем и маем текущего года составило: 128, 121, 134, 118, 123, 109, 120. 116, 125. 128, 121, 129, 130,131, 127, 119, 114, 124, 110, 126, 134, 125, 128, 123, 128, 133, 132,136, 134, 129.

Составьте интервальный вариационный ряд. Чему равно среднее число пассажиров в рейсе? Найдите моду, медиану, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Постройте гистограмму распределения частот, график эмпирической функции распределения.

Практическое занятие №6. Решение типовых задач линейного программирования. (2ч.)

Графическое решение двухмерных задач

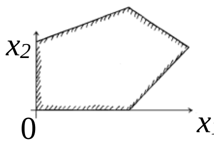
Графический метод основан на геометрической интерпретации экономических задач, которая дает возможность наглядно представить их структуру. Задачу линейного программирования с двумя переменными всегда можно решить графически. Однако уже в трехмерном пространстве такое решение усложняется, а в пространствах, размерность которых больше трех, графическим методом может быть решена задача линейного программирования, система ограничений которой содержит n-неизвестных и m-линейно независимых уравнений, причем $n-m\leq 2$.

Пусть задача линейного программирования задана в двумерном пространстве, т.е. ограничения содержат две переменные. Найти максимальное значение функции $z = c_1x_1 + c_2x_2$ при следующих ограничениях:

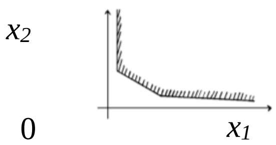
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b \\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Дадим геометрическую интерпретацию элементов этой задачи.

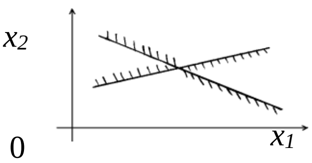
1. Каждое из ограничений (1) Задает на плоскости x_1Ox_2 некоторую полуплоскость. Их пересечение является областью допустимых решений задачи.



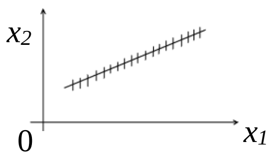
а) ОДР – выпуклый многоугольник



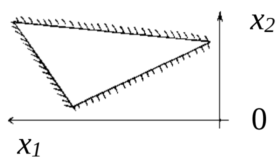
б) ОДР – неограниченная выпуклая многоугольная область



в) ОДР – единственная точка



г) ОДР – прямая линия



д) ОДР – пустое множество

Рис. 1.

На рис. 1 представлены возможные ситуации, когда область допустимых решений задачи линейного программирования – выпуклый многоугольник (а), неограниченная выпуклая многоугольная область (б), единственная точка (в), прямая (г), пустое множество (д).

2. Перейдем к геометрической интерпретации целевой – функции
$Z = c_1x_1 + c_2x_2$. Пусть область допустимых решений задачи – линейного программирования непустое множество (например, многоугольник $A_1\,A_2\,A_3\,A_4\,A_5\,A_6$, изображенный на рис. 2).

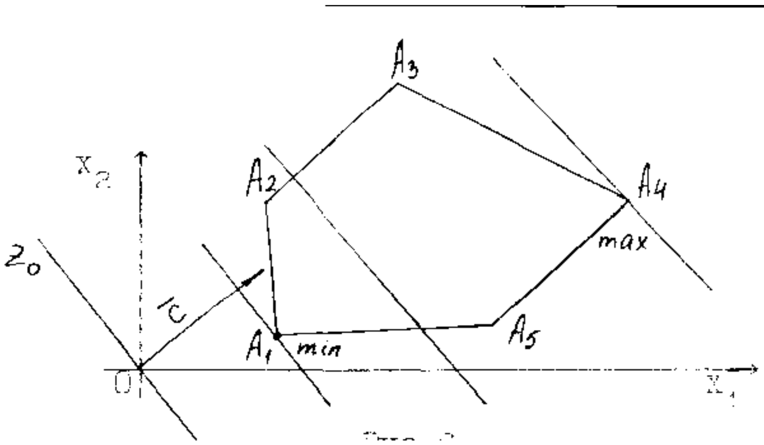


Рис. 2.

Выберем произвольное значение целевой функции $Z = Z_0$. Получим $c_1x_1 + c_2x_2 = Z_0$, – это уравнение прямой линии. В точках прямой NM целевая функция сохраняет одно и то же постоянное значение Z_0. Считая в равенстве $Z = c_1x_1 + c_2x_2Z$ – параметром, получим уравнение семейства параллельных прямых, которые называются линиями уровня целевой функции. Чтобы установить направление возрастания (убывания) целевой функции, найдем градиент этой функции:

$$grad\ Z = \bar{c} = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1};\frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = (c_1 : c_2),\ \text{так как}\ \frac{\partial z}{\partial x_1} = c_1,\ \frac{\partial z}{\partial x_2} = c_2$$

Вектор$\bar{c}$– указывает направление наискорейшего возрастания целевой функции, $a - \bar{c}$ (антиградиент) – направление наискорейшего убывания.

Вектор $\bar{c} = (c_1 : c_2)$ перпендикулярен к прямым $Z = const$.

Алгоритм графического решения задачи линейного программирования:

1. С учетом системы ограничений построить область допустимых решений (ОДР).

2. Построить вектор $\bar{c}(c_1c_2)$- вектор наискорейшего возрастания целевой функции.

3. Построить произвольную линию уровня $Z = Z_0$. Перпендикулярную к вектору с внутри ОДР.

4. При решении задачи на максимум переместить линию уровня $Z = Z_0$ в направлении $\bar{c}$ так, чтобы она касалась области допустимых решений в ее крайнем положении (на рис. 2 – до точки A_4). В случае решения задачи на минимум линию уровня $Z = Z_0$ перемещают в антиградиентном направлении (на рис. 2 – до точки A_1).

5. Определить оптимальный план $x^* = (x_1^*; x_2^*)$ и экстремальное значение целевой функции $Z^* = z(x^*)$.

Как видно из рис. 3, возможны следующие случаи:

1) Оптимальный план единственный; линия уровня и область допустимых решений в разрешающем положении имеют одну общую точку (а).

2) Оптимальных планов бесконечное множество: в разрешающем положении линия уровня проходит через сторону области допустимых решений (б).

3) Целевая функция неограничена: линия уровня не может занять разрешающего положения (в, г).

4) Область допустимых решений состоит из единственной точки, где целевая функция достигает одновременно и максимально, и минимального значений (д).

5) Задача не имеет решений, так как область допустимых решений – пустое множество (е)

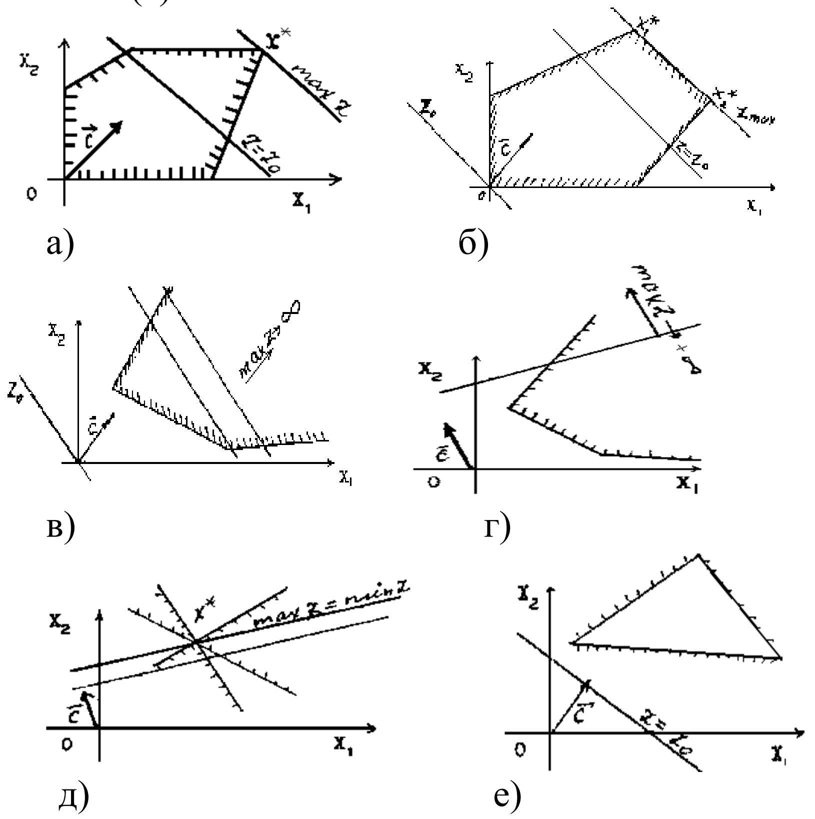


Рис. 3.

Пример 1.

На фабрике планируется выпустить миткаль двух артикулов: *№ 30* и *№ 21* из одинаковой пряжи на одинаковых станках. Планируемый суммарный выпуск *80000 тыс. м*. Известно, что в 1997 г. фабрика может выделить не более *8400 т* основной пряжи и *4500 т* уточной. Требуется составить такую производственную программу, при которой был бы перевыполнен запланированный выпуск ткани и суммарный выпуск ткани оказался бы максимальным (табл. 1).

Таблица 1

Ассортимент суровья	расход пряхи на 1 тыс. м ткани, кг	
	основной	уточной
миткаль № 30	60	45
миткаль № 21	70	30

Решение

Пусть x_1 *(тыс. м)* – выпуск миткаля *№ 30*.

x_2 *(тыс. м)* – выпуск миткаля *№ 21*,

значит $X = (x_1;x_2)$ – план задачи, тогда модель задачи будет следующая:

$max\ Z = x_1 + x_2$ при ограничениях $x_1 + x_2 > 80000$ (выпуск ткани должен быть перевыполнен);

$60x_1 + 70x_2 \leq 8400000$ (фабрика может выделить основной пряжи не более *8400 т*);

$45x_1 + 30x_2 \leq 4500000$ (уточной пряжи может быть выделено не более *4500 т*);

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ (условие не отрицательности переменных). Итак, целевая функция $Z = x_1 + x_2$ ограничения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rangle 800, \\ 60x_1 + 70x_2 \leq 8400000, \\ 45x_1 + 30x_2 \leq 4500000, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1. Построим область допустимых решений:

l_1: $x_1 + x_2 = 80000$ – прямая, проходящая через точки *(80000;0) (0:80000)*;

l_2:$60x_1 + 70x_2 = 8400000$ – прямая, проходящая через точки *(0:120000). (140000:0)*:

l_3: $45x_1 + 30x_2 = 4500000$ – прямая, проходящая через точки *(100000:0). (0:150000).*

2. Построим вектор $\bar{c}$ (1;1).

3. Построим линию уровня $z = z_0$, перпендикулярную $\bar{c}$. Параллельным перемещением прямой $Z = Z_0$ находим точку *A***,** в которой целевая функция достигает максимума.

4. Решая совместно уравнения граничных прямых l_2 и l_3:

$$\begin{cases} 60x_1 + 70x_2 = 8400000, \\ 45x_1 + 30x_2 = 4500000. \end{cases}$$

находим координаты точки *A*:

$x_1^* = 46667$, $x_2^* = 80000$, при этом $Z^* = max\ Z = Z(A) = 126667$.

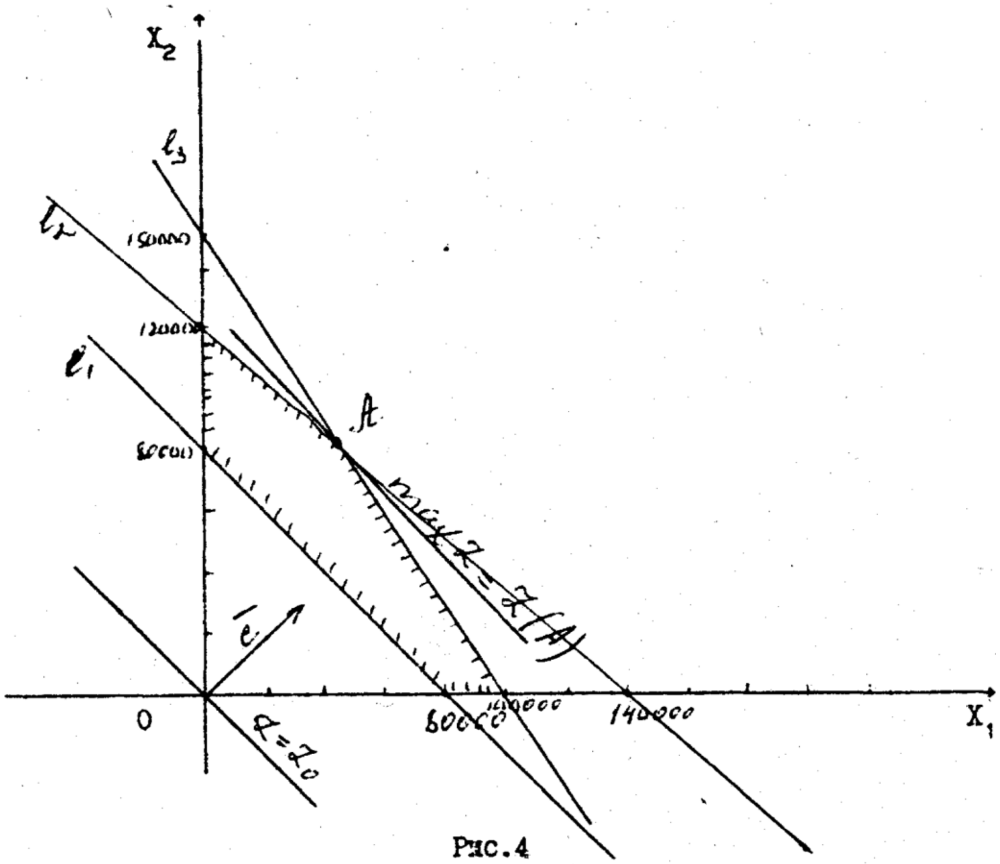


Рис.4

Итак, по оптимальному плану следует выпускать *46667 тыс. м* миткаля < *30* и *80000 тыс. м* миткаля *№ 21*; тогда общий выпуск ткани *126667 тыс. м* на *46667 тыс. м* больше запланированного выпуска ткани.

Пример 2.

Двум погрузчикам разной мощности за *24 часа* нужно погрузить на первой площадке *230 т*, на второй – *68 т*. Первый погрузчик на 1-ой площадке может погрузить *10 т* в час. на 2-ой – *12 т*. Второй погрузчик на каждой площадке может погрузить по *13 т* в час. Стоимость работ, связанных с погрузкой *1 т* первым погрузчиком на первой площадке *8 руб.*, на второй – *7 руб.*, вторым погрузчиком на первой площадке – *12 руб.*, на второй – *13руб.* Нужно найти, какой объем работ должен выполнить каждый погрузчик на каждой площадке, чтобы стоимость всех работ по погрузке была минимальной.

Решение

Пусть x_{ij} – объем работ (тоннах) i-го погрузчика *(i = l,2)* на j-ой площадке, *(j = 1,2).* Условия задачи занесём в табл. 2.

Таблица 2

ft	П₁	П₂	Лимит рабочего времени
1 погрузчик	10т 8р x_{11}	I0т 7р x_{12}	24

2 погрузчик	13т 12р x_{21}	13т 13р x_{22}	24
Задание	230	168	

Построим математическую модель задачи.

Целевая функция $minZ = 8x_{11} + 7x_{12} + 12x_{21} + 13x_{22}$

Ограничения на лимиты рабочего времени:

$\frac{x_{11}}{10} + \frac{x_{12}}{12} \le 24,$ $\frac{x_{21}}{13} + \frac{x_{22}}{13} \le 24$;

на необходимость выполнить задание:

$x_{11} + x_{21} = 230;$

$x_{12} + x_{22} = 168;$

условие неотрицательности: $x_{ij} \ge 0$ $(i, j = 1,2)$.

Итак, система ограничений будет:

$$\begin{cases} 6x_{11} + 5x_{12} \le 1440 \\ x_{21} + x_{22} \le 312 \\ x_{11} + x_{21} = 230 \\ x_{12} + x_{22} = 168 \end{cases}$$

$x_{ij} \ge 0$ здесь $n = 4, m = 4, n - m = 0 < 2$

Решим эту задачу графически. Для этого исключим из модели переменные x_{21} и x_{22}, Из ограничений- равенств имеем:

$x_{21} = 230 - x_{11}$;

$x_{22} = 168 - x_{12}$.

Подставив выражения для x_{21} и x_{22} в ограничения – неравенства и целевую функцию, получим задачу линейного программирования с двумя переменными x_{11} и x_{12}:

$min\ Z = 4944 - 4x_{11} - 6x_{12}$,

$$\begin{cases} 6x_{11} + 5x_{12} \le 1440 \\ x_{11} + x_{12} \ge 86 \\ x_{11} \ge 0, \quad x_{12} \ge 0 \\ x_{12} \le 168, \ x_{11} \le 230 \end{cases}.$$

1. Построим область допустимых решений:

l_1: $6x_{11} + 5x_{12} = 1440$ – прямая, проходящая через точки $(0; 288), (240; 0)$;

l_2: $x_{11} + x_{12} = 86$ – прямая, проходящая через точки $(0;86), (86:0)$;

l_3: $x_{12} = 168$;

l_4: $x_{11} = 230$.

2. Построим градиент целевой функции $\bar{c}(-4;-6)$.

3. Построим линию уровня $Z = Z_0$, перпендикулярную $\bar{c}$.

4. Параллельно перемещая прямую $Z = Z_0$ в антиградиентном направлении, найдем точку A, в которой целевая функция достигает минимума.

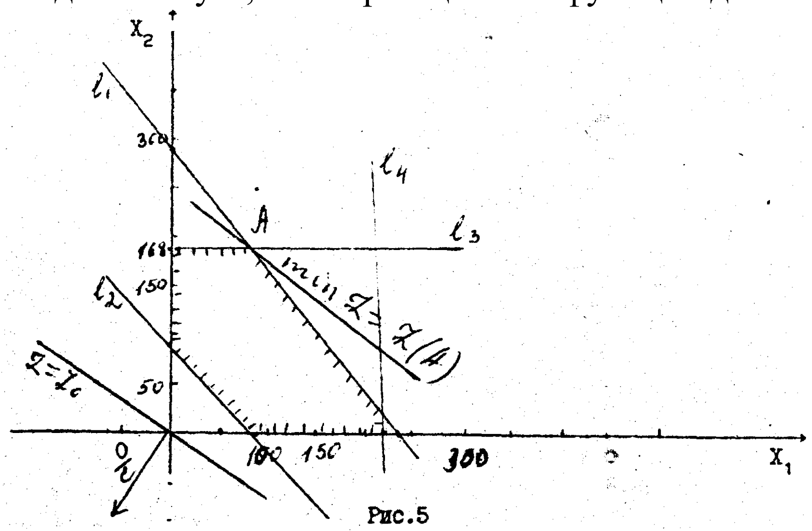


Рис.5

Функция Z достигает наименьшего значения при $x_{11}^* = 100$, $x_{12}^* = 168$; из выражений для x_{21} и x_{22} получим: $x_{21}^* = 130$, $x_{22}^* = 0$; $\min Z = 4944 - 4 \cdot 100 - 6 \cdot 168 = 3536$ *руб.*

Итак, по оптимальному плану первый погрузчик должен погрузить *100 т* на первой площадке и *168 т* – на второй; второму погрузчику надлежит погрузить *130 т* на первой площадке.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задача 1. Решите графическим методом задачу линейного программирования $(x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0)$:

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 35 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq -8 \\ -4x_1 + 6x_2 \leq 24 \end{cases}$ $\max Z = x_1 + 2x_2$

2. $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + 3x_2 \geq \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}x_1 + 3x_2 \geq -\frac{3}{2} \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 30 \\ -3x_1 + 9x_2 \leq 27 \end{cases}$ $\min Z = 3x_1 + x_2$

3. $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ 6x_1 + 10x_2 \leq 60 \\ -2x_1 + x_2 \geq -2 \\ -3x_1 + 5x_2 \leq 15 \end{cases}$ $\max Z = 3x_1 + x_2$

6. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ 5x_1 + 15x_2 \leq 75 \\ -4x_1 + 5x_2 \geq -20 \\ x_1 - 2x_2 \geq -2 \end{cases}$ $\min Z = -3x_1 + 4x_2$

7. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 \geq 6 \\ x_2 \leq 3 \\ -\frac{3}{2}x_1 + \frac{9}{2}x_2 \geq -\frac{27}{4} \\ 11x_1 + 7x_2 \leq 77 \end{cases}$ $\max Z = x_1 + 2x_2$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 32 \\ x_1 \leq 7 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$ $\min Z = 2x_1 - 3x_2$

11. $\begin{cases} x_1 + 12x_2 \geq 5 \\ -3x_1 + 3x_2 \geq -24 \\ 4x_1 + 10x_2 \leq 50 \\ 5x_1 - 12x_2 \geq -35 \end{cases}$ $\max Z = 5x_1 + \frac{1}{2}x_2$

12. $\begin{cases} x_1 \leq 8 \\ 5x_1 + 7x_2 \geq 35 \\ -3x_1 + \frac{9}{2}x_2 \geq -\frac{27}{2} \\ x_1 - 3x_2 \geq -12 \end{cases}$ $\min Z = -6x_1 + 2x_2$

13. $\begin{cases} -8x_1 + 5x_2 \leq 29 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 54 \\ x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ -9x_1 + 3x_2 \geq -30 \end{cases}$ $\max Z = 2x_1 + 3x_2$

4. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ 9x_1 + 6x_2 \le 54 \\ -\frac{7}{2}x_1 + \frac{9}{2}x_2 \ge -\frac{63}{4} \\ 3x_1 - 4x_2 \ge -12 \end{cases}$
$\min Z = -6x_1 + x_2$

5. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 \ge 6 \\ -\frac{1}{3}x_1 + 3x_2 \ge -1 \\ -x_1 + \frac{5}{2}x_2 \le \frac{5}{2} \\ 7x_1 + 11x_2 \le 77 \end{cases}$
$\max Z = 3x_1 + x_2$

9. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ 8x_1 + 12x_2 \le 96 \\ 3x_1 - 4x_2 \le 12 \\ -5x_1 + 2x_2 \le 10 \end{cases}$
$\max Z = 4x_1 + x_2$

10. $\begin{cases} x_1 \le 6 \\ x_1 + 6x_2 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \end{cases}$
$\max Z = x_1 + \frac{3}{2}x_2$

14. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 \ge -14 \\ x_1 + 3x_2 \ge 7 \\ x_1 - x_2 \le 5 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$
$\max Z = 2x_1 + \frac{1}{2}x_2$

15. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 \ge -8 \\ -3x_1 + x_2 \ge -14 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ -\frac{1}{2}x_1 + 3x_2 \le \frac{21}{2} \end{cases}$
$\min Z = -7x_1 + 7x_2$

16. $\begin{cases} x_1 \le 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ 8x_1 + 12x_2 \le 96 \\ 3x_1 - 4x_2 \le 12 \end{cases}$
$\min Z = -3x_1 + \frac{5}{2}x_2$

17. $\begin{cases} -\frac{1}{3}x_1 + 3x_2 \ge -1 \\ -x_1 + \frac{5}{2}x_2 \le \frac{5}{2} \\ 7x_1 + 11x_2 \le 77 \\ x_1 \ge 3 \end{cases}$
$\min Z = -x_1 + 7x_2$

18. $\begin{cases} 2x_1 + 10x_2 \ge 20 \\ x_1 - 3x_2 \ge -12 \\ 3x_1 + \frac{5}{2}x_2 \le \frac{27}{2} \\ x_1 \le 2 \end{cases}$
$\max Z = x_1 + 2x_2$

19. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ -4x_1 + 5x_2 \ge -20 \\ x_1 - 2x_2 \ge -2 \end{cases}$
$\max Z = \frac{1}{2}x_1 + x_2$

20. $\begin{cases} \frac{5}{3}x_1 - x_2 \ge -10 \\ x_1 + \frac{4}{3}x_2 \ge \frac{32}{3} \\ x_1 - \frac{5}{2}x_2 \le 3 \\ 7x_1 + 6x_2 \le 162 \end{cases}$
$\max Z = 2x_1 + 3x_2$

21. $\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 \ge -48 \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 40 \\ 7x_1 - 5x_2 \le 15 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 73 \end{cases}$
$\max Z = 6x_1 + 5x_2$

22. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \ge -24 \\ x_1 + 2x_2 \ge 16 \\ x_1 - 4x_2 \le -8 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 82 \end{cases}$
$\max Z = 7x_1 + 6x_2$

23. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \ge -24 \\ x_1 + 2x_2 \ge 12 \\ 3x_1 - 4x_2 \ge 16 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 104 \end{cases}$
$\min Z = -4x_1 + 5x_2$

24. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \ge -40 \\ 3x_1 + 7x_2 \ge 56 \\ 3x_1 - 3x_2 \le 22 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 136 \end{cases}$
$\min Z = -5x_1 + 7x_2$

25. $\begin{cases} 7x_1 - 8x_2 \ge -12 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 30 \\ 3x_1 - 8x_2 \le 48 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 84 \end{cases}$
$\max Z = 7x_1 + 9x_2$

26. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \ge -20 \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 32 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 24 \\ 4x_1 + 7x_2 \le 116 \end{cases}$
$\max Z = 3x_1 + 5x_2$

27. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \ge -16 \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 48 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 32 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 160 \end{cases}$
$\max Z = 7x_1 + 8x_2$

28. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \ge -30 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 32 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 6 \\ 7x_1 + 6x_2 \le 162 \end{cases}$
$\min Z = -3x_1 + 7x_2$

29. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge -10 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 36 \\ x_1 - 3x_2 \le 14 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 90 \end{cases}$
$\min Z = 2x_1 - 5x_2$

30. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \ge -14 \\ x_1 + x_2 \ge 8 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 32 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 94 \end{cases}$
$\min Z = 8x_1 - 7x_2$

Задача 2. Найти графическим методом оптимальный план задач линейного программирования $(x_j \geq 0)$.

1. $Z_{max} = 5x_1 - x_2 + x_3$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 11 \end{cases}$$

2. $Z_{max} = 6x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$$

3. $Z_{max} = 6x_2 + x_3 - x_4$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 + x_5 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 7x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

4. $Z_{max} = 8x_1 + x_2 - 3x_3$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 3 \\ 3x_1 - x_3 + 6x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

5. $Z_{max} = 7x_1 + x_2 + x_3 - x_4$
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 5 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

6. $Z_{max} = x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5$
$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 6x_5 = 5 \end{cases}$$

7. $Z_{max} = x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 7 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

8. $Z_{max} = x_2 - 6x_3 + x_4 - 3x_5$
$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 9 \\ -x_1 - x_3 + 7x_4 + 8x_5 = 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

9. $Z_{max} - 8x_1 - x_2 - x_3 + x_4$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 9 \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$$

10. $Z_{max} = -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 15 \end{cases}$$

11. $Z_{max} = 2x_2 + x_4 - 3x_5$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_5 = 1 \\ 8x_1 + 4x_2 + 12x_3 + 4x_4 + 12x_5 = 6 \end{cases}$$

12. $Z_{max} = 10x_1 + 5x_2 - 25x_3 - 5x_4$
$$\begin{cases} 8x_1 + 16x_2 + 8x_3 + 8x_4 + 24x_5 = 32 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 15 \end{cases}$$

13. $Z_{max} = 6x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$

14. $Z_{max} = -5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 7 \\ 4x_2 + 8x_4 + x_5 = 12 \end{cases}$$

15. $Z_{max} = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16 \\ x_1 - 3x_2 + x_5 = 3 \end{cases}$$

16. $Z_{max} = 7x_1 + x_3 - x_4 + x_5$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 4 \end{cases}$$

17. $Z_{nax} = 6x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 6 \end{cases}$$

18. $Z_{max} = 3x_3 - 2x_4 - x_5$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 5 \\ 3x_1 + 2x_3 - x_4 + 6x_5 = 7 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

23. $Z_{max} = 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$

24. $Z_{max} = 5x_2 + x_3 - x_4 + x_5$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 10 \end{cases}$$

25. $Z_{max} = x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

26. $Z_{max} = 5x_1 + x_3 - x_4 + x_5$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 12 \end{cases}$$

19. $Z_{max} = x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$

20 $Z_{max} = 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 14 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 1 \end{cases}$$

21 $Z_{max} = 6x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 18 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 12 \end{cases}$$

22. $Z_{max} = 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 6 \end{cases}$$

27. $Z_{max} = 7x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \end{cases}$$

28. $Z_{max} = x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 28 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 = 12 \end{cases}$$

29. $Z_{max} = -2x_2 + x_3 - x_4 + x_5$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 14 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 1 \end{cases}$$

30. $Z_{max} = 8x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 6 \end{cases}$$

Практическое занятие №7. Решение типовых задач линейного программирования. (2ч.)

Транспортная задача

Транспортная задача линейного программирования получила в настоящее время широкое распространение в теоретических обработках и практическом применении на транспорте и в промышленности. Особенно большое значение она имеет в деле рационализации постановок важнейших видов промышленной и сельскохозяйственной продукции, а также оптимального планирования грузопотоков и работы различных видов транспорта.

Кроме того, к задачам транспортного типа сводятся многие другие задачи линейного программирования - задачи о назначениях, сетевые, календарного планирования.

Цель данного практического занятия - освоить математическую постановку транспортной задачи линейного программирования.

Алгоритмы решения транспортной задачи

Формулировка транспортной задачи

Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах $a_1, a_{2,}, ..., a_m$. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах $b_{1,}, b_2, ..., b_n$. Известны c_{IJ}, i=1,2,,…,m, j=1,2,…,n- стоимости перевозки единицы груза от каждого I-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех потребителей полностью удовлетворены и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны.

Исходные данные транспортной задачи обычно записываются в таблице 1.

Таблица 1

a_i/b_j	b_1	b_2	$\dots$	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots.$	$\dots.$
a_m	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}

Исходные данные задачи могут быть представлены также в виде вектора запасов поставщиков A=($a_1, a_{2,}, ..., a_m$), вектора запросов потребителей

B=($b_{1,}, b_2, ..., b_n$)

и матрицы стоимостей

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots. & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

В транспортных задачах под поставщиками и потребителями понимаются различные промышленные и сельскохозяйственные предприятия, заводы, фабрики, слады, магазины и т.д. Однородными считаются грузы, которые могут быть перевезены одним видом транспорта. Под стоимостью перевозок понимаются тарифы, расстояния, время, расход топлива и т.п.

В транспортной задаче предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Такая задача называется *задачей с правильным балансом***,** а ее модель – *закрытой*. Если же это равенство не выполняется, то задача называется *задачей с неправильным балансом,* а ее модель – *открытой*.

<u>Опорное решение транспортной задачи</u>

Опорным решением транспортной задачи называется любое допустимое решение, для которого вектор-условия, соответствующие положительным координатам, линейно независимы.

Ввиду того, что ранг системы векторов-условий транспортной задачи равен m+n-1, опорное решение не может иметь отличных от нуля координат более m+n-1. Число отличных от нуля координат невырожденного опорного решения равно m+n-1,а для вырожденного опорного решения меньше m+n-1

Любое допустимое решение транспортной задачи можно записать в ту же таблицу, что и исходные данные. Клетки таблицы транспортной задачи, в которых находится отличные от нуля или базисные нулевые перевозки, называются *занятыми*, остальные – *незанятыми* или *свободными.* Клетки таблицы нумеруются так, что клетка, содержащая перевозку x_{ij}, т.е. стоящая в i-й строке и j-м столбце, имеет номер (i,j). Каждой клетке с номером (i,j) соответствует переменная x_{ij}, которой соответствует вектор-условие A_{ij}.

Для того чтобы избежать трудоемких вычислений при проверке линейной независимости вектор-условий, соответствующих положительным координатам допустимого решения, вводят понятие цикла. Циклы также используются для перехода от одного опорного решения к другому.

Циклом называется такая последовательность клеток таблицы транспортной задачи (i_1,j_1), (i_1,j_2), (i_2,j_2), … , (i_k,j_1), в которой две и только две соседние клетки расположены в одной клетке или столбце, причем первая и последняя клетки также находятся в одной строке или столбце.

Цикл изображают в таблице транспортной задачи в виде замкнутой ломаной линии. В любой клетке цикла происходит поворот звена ломаной линии на 90^0. Простейшие циклы изображены на рисунке 1, где звездочкой отмечены клетки таблицы, включенные в состав цикла.

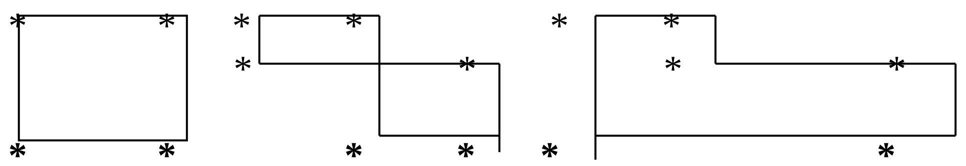


Рис 1.

Методы построения начального опорного решения.

Метод северо-западного угла

Существует ряд методов построения начального опорного решения, наиболее простым из которых является метод северо-западного угла. В данном методе запасы очередного поставщика используются для обеспечения запросов очередных потребителей до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после чего используются запасы следующего по номеру поставщика.

Заполнение таблицы транспортной задачи начинается с левого верхнего угла и состоит из ряда однотипных шагов. На каждом шаге, исходя из запасов очередного поставщика и запросов очередного потребителя, заполняется только одна клетка и соответственно исключается из рассмотрения один поставщик или потребитель. Осуществляется это таким образом:

1. если $a_i < b_j$, то $x_{ij} = a_i$ и исключается поставщик с номером i, $x_{ik} = 0$, k=1, 2, …, n, k$\neq$j, $b_j^{'} = b_j - a_i$;
2. если $a_i > b_j$, то $x_{ij} = b_j$ и исключается потребитель с номером j, $x_{kj} = 0$, k=1, 2, …, m, k$\neq$i, $a_i^{'} = a_i - b_j$;

3. если $a_i = b_j$, то $x_{ij} = a_i = b_j$ и исключается либо i-й поставщик, $x_{ik} = 0$, k=1, 2, …, n, k≠j, $b_j^{'} = 0$, либо j-й потребитель, $x_{kj} = 0$, k=1, 2, …, m, k≠i, $a_i^{'} = 0$.

Нулевые перевозки принято заносить в таблицу только тогда, когда они попадают в клетку (i,j), подлежащую заполнению. Если в очередную клетку таблицы (i,j) требуется поставить перевозку, а i-й поставщик или j-й потребитель имеет нулевые запасы или запросы, то в клетку ставится перевозка, равная нулю (базисный нуль), и после этого, как обычно, исключается из рассмотрения соответствующий поставщик или потребитель. Таким образом, в таблицу заносят только базисные нули, остальные клетки с нулевыми перевозками остаются пустыми.

Во избежание ошибок после построения начального опорного решения необходимо проверить, что число занятых клеток равно m+n-1 и векторы-условия, соответствующие этим клеткам, линейно независимы.

Решение транспортной задачи, построенное методом северо-западного угла, является опорным.

<u>*Метод минимальной стоимости*</u>

Метод минимальной стоимости прост, он позволяет построить опорное решение, достаточно близкое к оптимальному, так как использует матрицу стоимостей транспортной задачи C=(c_{ij}), i=1,2,,…,m, j=1,2,…,n. Как и метод северо-западного угла, он состоит из ряда однотипных шагов, на каждом из которых заполняется только одна клетка таблицы, соответствующая минимальной стоимости min {c_{ij}}, и исключается из рассмотрения только одна строка (поставщик) или один столбец (потребитель). Очередную клетку, соответствующую $\min\limits_{i,j}\{c_{ij}\}$, заполняют по тем же правилам, что и в методе северо-западного угла. Поставщик исключается из рассмотрения, если его запасы использованы полностью. Потребитель исключается из рассмотрения, если его запросы удовлетворены полностью. На каждом шаге исключается либо один поставщик, либо один потребитель. При этом если поставщик еще не исключен, но его запасы равны нулю, то на том шаге, когда от данного поставщика требуется поставить груз, в соответствующую клетку таблицы заносится базисный нуль и лишь, затем поставщик исключается из рассмотрения. Аналогично с потребителем.

Решение транспортной задачи, построенное методом минимальной стоимости, является опорным.

<u>*Переход от одного опорного решения к другому*</u>

В транспортной задаче переход от одного опорного решения к другому осуществляется с помощью цикла. Для некоторой свободной клетки таблицы строится цикл, содержащий часть клеток, занятых опорным решений. По этому циклу перераспределяются объемы перевозок. Перевозка загружается в выбранную свободную клетку и освобождается одна из занятых клеток, получается новое опорное решение.

Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то для любой свободной клетки таблицы существует единственный цикл, содержащий эту клетку и часть клеток, занятых опорным решением.

<u>*Означенный цикл*</u>

Цикл называется *означенным,* если его угловые клетки пронумерованы по порядку и нечетным клеткам приписан знак «+», а четным – знак «-» (рис 2.)

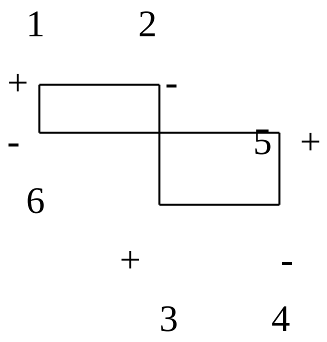


Рис 2.

Сдвигом по циклу на величину θ называется увеличение объемов перевозок во всех нечетных клетках цикла, отмеченных знаком «+», на θ и уменьшение объемов перевозок во всех четных клетках, отмеченных знаком «-», на θ.

Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то при сдвиге по любому циклу, содержащему одну свободную клетку, на величину $\theta = \min\limits_{<<->>} \{x_{ij}\}$ *получится опорное решение.*

<u>*Метод потенциалов*</u>

Широко распространенным методом решения транспортных задач является метод потенциалов. Этот метод позволяет упростить наиболее трудоемкую часть вычислений – нахождение оценок свободных клеток.

Признак оптимальности опорного решения. *Если допустимое решение X=(*x_{ij}*), i=1,2,,…,m, j=1,2,…,n транспортной задачи является оптимальным, то существует потенциалы (числа) поставщиков* u_i*, i=1,2,,…,m и потребителей* v_j*, j=1,2,…,n, удовлетворяющие следующим условиям:*

$u_i + v_j = c_{ij}$ *при* $x_{ij} > 0$*,*

$u_i + v_j \le c_{ij}$ *при* $x_{ij} = 0$*.*

Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

Порядок решения транспортной задачи методом потенциалов следующий.

1. Проверяют выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Если задача имеет неправильный баланс, то вводят фиктивного поставщика или потребителя с недостающими запасами или запросами и нулевыми стоимостями перевозок.
2. Строят начальное опорное решение (методом минимальной стоимости или каким-либо другим методом) и проверяют правильность его построения, для чего подсчитывают количество занятых клеток (их должно быть m+n-1) и убеждаются в линейной независимости векторов-условий (методом вычеркивания).
3. Строят систему потенциалов, соответствующих опорному решению. Для этого решают систему уравнений $u_i+v_j=c_{ij}$ при x_{ij}>0. Для того чтобы найти частное решение системы, одному из потенциалов (обычно тому, которому соответствует большее число занятых клеток) задают произвольно некоторое значение (чаще нуль). Остальные потенциалы однозначно определяются по формулам $u_i=c_{ij}-v_j$ при x_{ij}>0, если известен потенциал v_j, и $v_j=c_{ij}-u_i$ при x_{ij}>0, если известен потенциал u_i.
4. Проверяют, выполняется ли условие оптимальности для свободных клеток таблицы. Для этого вычисляют оценки для всех свободных клеток по формулам $\Delta_{lk}=u_i+v_j-c_{ij}$ и те оценки, которые больше нуля, записывают в левые нижние углы клеток. Если для всех свободных клеток $\Delta_{ij}\le 0$, то вычисляют значение целевой функции, и решение задачи заканчивается, так как полученное решение является оптимальным. Если же имеется хотя бы одна клетка с положительной оценкой, то опорное решение не является оптимальным.
5. Переходят к новому опорному решению, на котором значение целевой функции будет меньше. Для этого находят клетку таблицы задачи, которой соответствует наибольшая положительная оценка $\max\{\Delta_{ij}\}=\Delta_{lk}$. Строят цикл, включающий в свой состав данную клетку и часть клеток, занятых опорным решением. В клетках цикла расставляют поочередно знаки «+» и «-», начиная с «+» в клетке с наибольшей положительной оценкой. Осуществляют сдвиг (перераспределение груза) по циклу на величину $\theta=\min\limits_{<<->>}\{x_{ij}\}$. Клетка со знаком «-», в которой достигается $\min\limits_{<<->>}\{x_{ij}\}$, остается пустой. Если минимум достигается в нескольких клетках, то одна из них остается пустой, а в остальных проставляют базисные нули, чтобы число занятых клеток оставалось равным m+n-1. Далее возвращаемся к пункту 3 алгоритма.

Пример решения транспортной задачи методом потенциалов

1. Закрытая транспортная задача.

	b1 = 150	b2 = 150	b3 = 300
a1 = 100	2	1	2
a2 = 200	5	7	6
a3 = 300	3	2	5

2. Строим 1-ое опорное решение методом наименьших стоимостей.

	b1 = 150	b2 = 150	b3 = 300	
a1 = 100	2	100 1	2	u_1
a2 = 200	5	7	200 6	u_2
a3 = 300	150 3	50 2	100 5	u_3
	v_1	v_2	v_3	

3, 4. Проверяем 1-ое опорное решение на оптимальность методом потенциалов.

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 1 \\ u_2 + v_3 = 6 \\ u_3 + v_1 = 3 \\ u_3 + v_2 = 2 \\ u_3 + v_3 = 5 \end{cases}$$

$u_1 = 0 \quad v_1 = 2$

$u_2 = 2 \quad v_2 = 1$

$u_3 = 1 \quad v_3 = 4$

⌫$_{11} = 2 – (0 + 2) = 0$

⌫$_{13} = 2 – (0 + 4) = -2 < 0$

⌫$_{21} = 5 – (2 + 2) = 1 > 0$

⌫$_{22} = 7 – (2+ 1) = 4 > 0$

Вывод: 1-ый план не является оптимальным.

5. Переходим к новому опорному решению, на котором значение целевой функции будет меньше. Строим цикл.

$$\begin{array}{ccc} ^{-}100 & \boxed{} & ^{+}\,0 \\ ^{+}50 & & ^{-}100 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & \boxed{} & 100 \\ 150 & & 0 \end{array}$$

	b1 = 150	b2 = 150	b3 = 300	
a1 = 100	2	^{0} 1	^{100} 2	u_1
a2 = 200	5	7	^{200} 6	u_2
a3 = 300	^{150} 3	^{150} 2	5	u_3
	v_1	v_2	v_3	

Проверяем 2-ое опорное решение на оптимальность методом потенциалов.

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 1 \\ u_1 + v_3 = 2 \\ u_2 + v_3 = 6 \\ u_3 + v_1 = 3 \\ u_3 + v_2 = 2 \end{cases}$$

$u_1 = 0 \quad v_1 = 2$

$u_2 = 4 \quad v_2 = 1$

$u_3 = 1 \quad v_3 = 2$

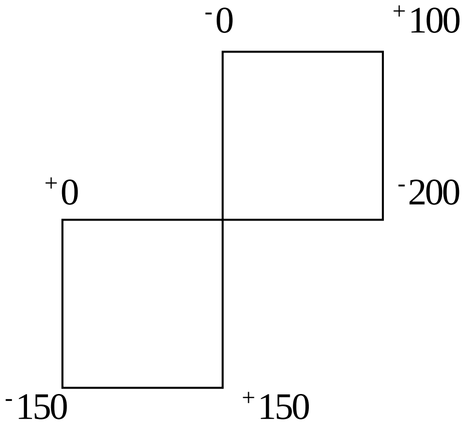
⌫$_{11} = 2 – (0 + 2) = 0$

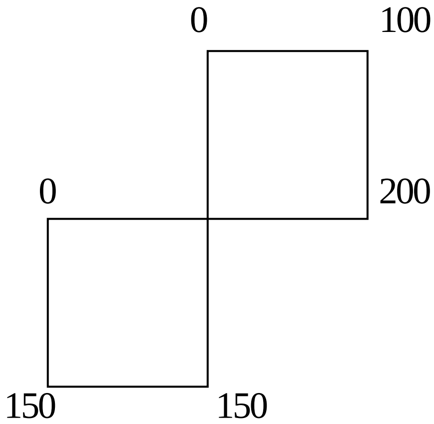
⌫$_{21} = 5 – (4 + 2) = -1 < 0$

⌫$_{22} = 7 – (4+ 1) = 2 > 0$

⌫$_{33} = 5 – (1 + 3) = 2 > 0$

Вывод: 2-ий план не является оптимальным.





	b1 = 150	b2 = 150	b3 = 300	
a1 = 100	2	1	^{100} 2	u_1
a2 = 200	^{0} 5	7	^{200} 6	u_2
a3 = 300	^{150} 3	^{150} 2	5	u_3
	v_1	v_2	v_3	

Проверяем 3-е опорное решение на оптимальность методом потенциалов.

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 2 \\ u_2 + v_1 = 5 \\ u_2 + v_3 = 6 \\ u_3 + v_1 = 3 \\ u_3 + v_2 = 2 \end{cases}$$

$u_1 = 0$ $v_1 = 1$

$u_2 = 4$ $v_2 = 0$

$u_3 = 2$ $v_3 = 2$

⌫$_{11}$ = 2 – (0 + 1) = 1 > 0
⌫$_{12}$ = 1 – (0 + 0) = 1 > 0
⌫$_{22}$ = 7 – (4+ 0) = 3 > 0
⌫$_{33}$ = 5 – (2 +2) = 1 > 0

Получили оптимальное решение.

$x_{11} = 0$
$x_{12} = 0$
$x_{13} = 100$
$x_{21} = 0$
$x_{22} = 0$
$x_{23} = 200$
$x_{31} = 150$
$x_{32} = 150$
$x_{33} = 0$

$L(x) = 100*2 + 0*5 + 200*6 + 150*3 + 150*2 = 2150$ (у. е.)

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1.Ахвердиев К.С. и др.Экономико-математические модели: Методические указания / К.С. Ахвердиев, Л.В. Данилова, Г.А. Шляхина, И.С. Стасюк. – Ростов н/Д: Рост. гос. ун-т путей сообщения, 2002. – 36 с. (с.34-36).

2. Шляхина, Г.А. [и др.]. Линейное программирование транспортная задача: методические указания / Г.А. Шляхина, Е.В. Пиневич, Т.С. Черкасова; Рост. гос. ун-т путей сообщения, – Ростов н/Д; 2006. – 32 с. (с.29-30).

Для проведения практических занятий и выдачи индивидуальных заданий используются следующие учебные и учебно-методические пособия:

1. Зеленина, А.А. Элементы теории вероятностей и математической статистики: учебно-методическое пособие. В 2 ч. Ч. 1. / А.А. Зеленина, Е.О. Лагунова, И.С. Стасюк; ФГБОУ ВО РГУПС. – Ростов н/Д, 2015. – 33 с. – Библиогр.: с. 30.
2. Зеленина, А.А. Элементы теории вероятностей и математической статистики: учебно-методическое пособие. В 2 ч. Ч. 2. / А.А. Зеленина, Е.О. Лагунова, И.С. Стасюк; ФГБОУ ВО РГУПС. ─ Ростов н/Д, 2015. – 42. – Библиогр.: с. 40.
3. Клодина, Т.В. Экономико-математические методы и моделирование: учеб. пособие / Т.В. Клодина, Н.С. Задорожная; ФГБОУ ВПО РГУПС. – Ростов н/Д, 2014. – 108 с.: ил. – Библиогр.: с. 107.
4. Данилова Л.В. Теория вероятностей. Типовые расчеты: учебно-методическое пособие / Л.В. Данилова, Н.В. Данилова, Е.В

5.Ахвердиев К.С. и др.Экономико-математические модели: Методические указания / К.С. Ахвердиев, Л.В. Данилова, Г.А. Шляхина, И.С. Стасюк. – Ростов н/Д: Рост. гос. ун-т путей сообщения, 2002. – 36 с. (с.34-36).

6. Шляхина, Г.А. [и др.]. Линейное программирование транспортная задача: методические указания / Г.А. Шляхина, Е.В. Пиневич, Т.С. Черкасова; Рост. гос. ун-т путей сообщения, – Ростов н/Д; 2006. – 32 с. (с.29-30).

***Самостоятельное изучение учебного материала*.**

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст] : полный курс / Д.Т. Письменный. - 13-е изд. - М. : Айрис-пресс, 2015. - 603 с. : ил., прил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6043-0
2. Владимирский, Б. М. Математика. Общий курс [Текст] : учебник / Б. М. Владимирский, А. Б. Горстко, Я. М. Ерусалимский. - 4-е изд., стер. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2008. - 957 с. : ил., табл. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Предм. указ. - ISBN 978-5-8114-0445-2
3. Клодина, Т.В. Экономико-математические методы и моделирование: учеб. пособие / Т.В. Клодина, Н.С. Задорожная; ФГБОУ ВПО РГУПС. – Ростов н/Д, 2014. – 108 с.: ил. – Библиогр.: с. 107.
4. Ковалев, Е. А. Теория вероятностей и математическая статистика для экономистов: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / Е. А. Ковалев, Г. А. Медведев; под общ. ред. Г. А. Медведева. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 284 с. — (Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-01082-4.